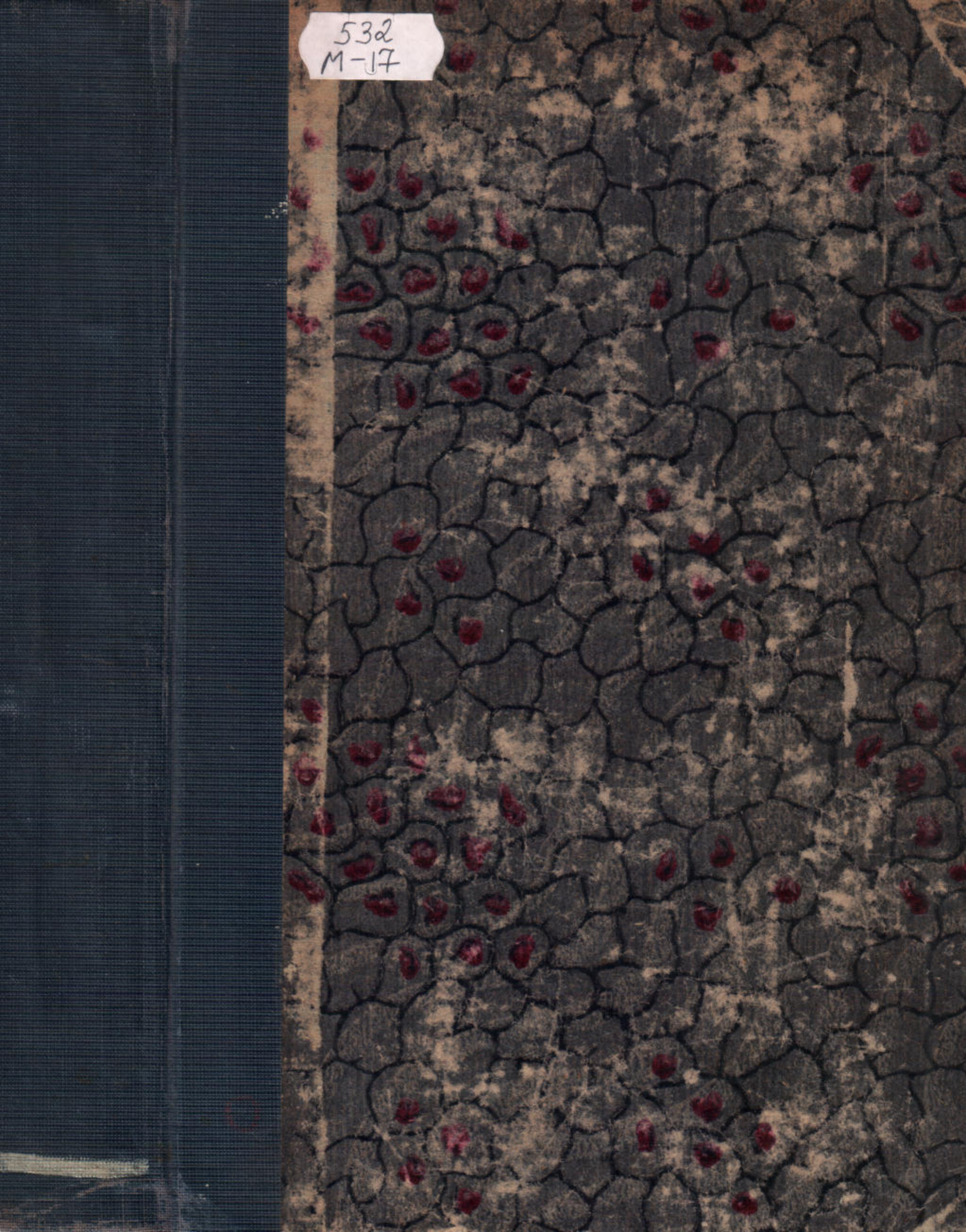
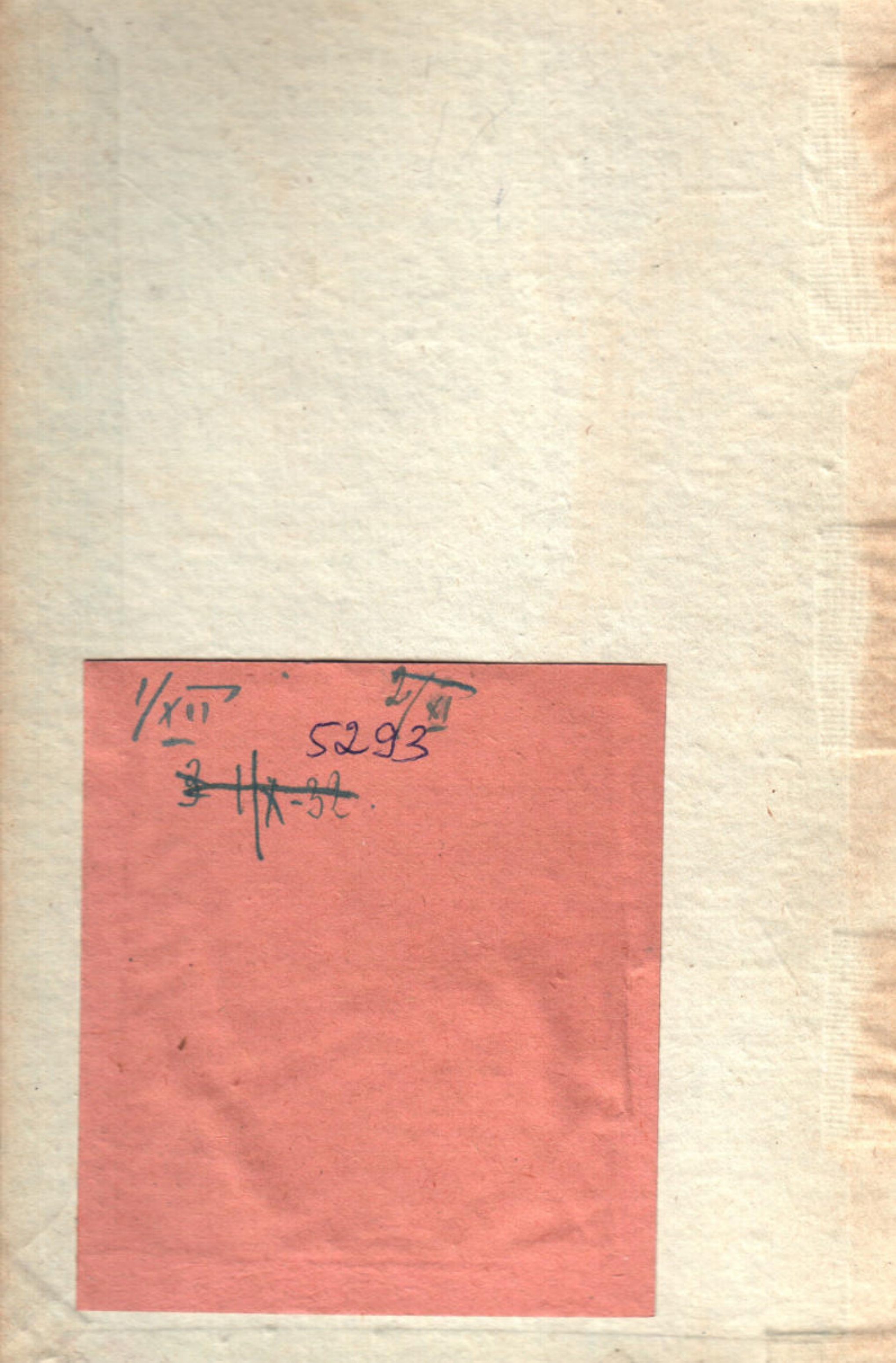
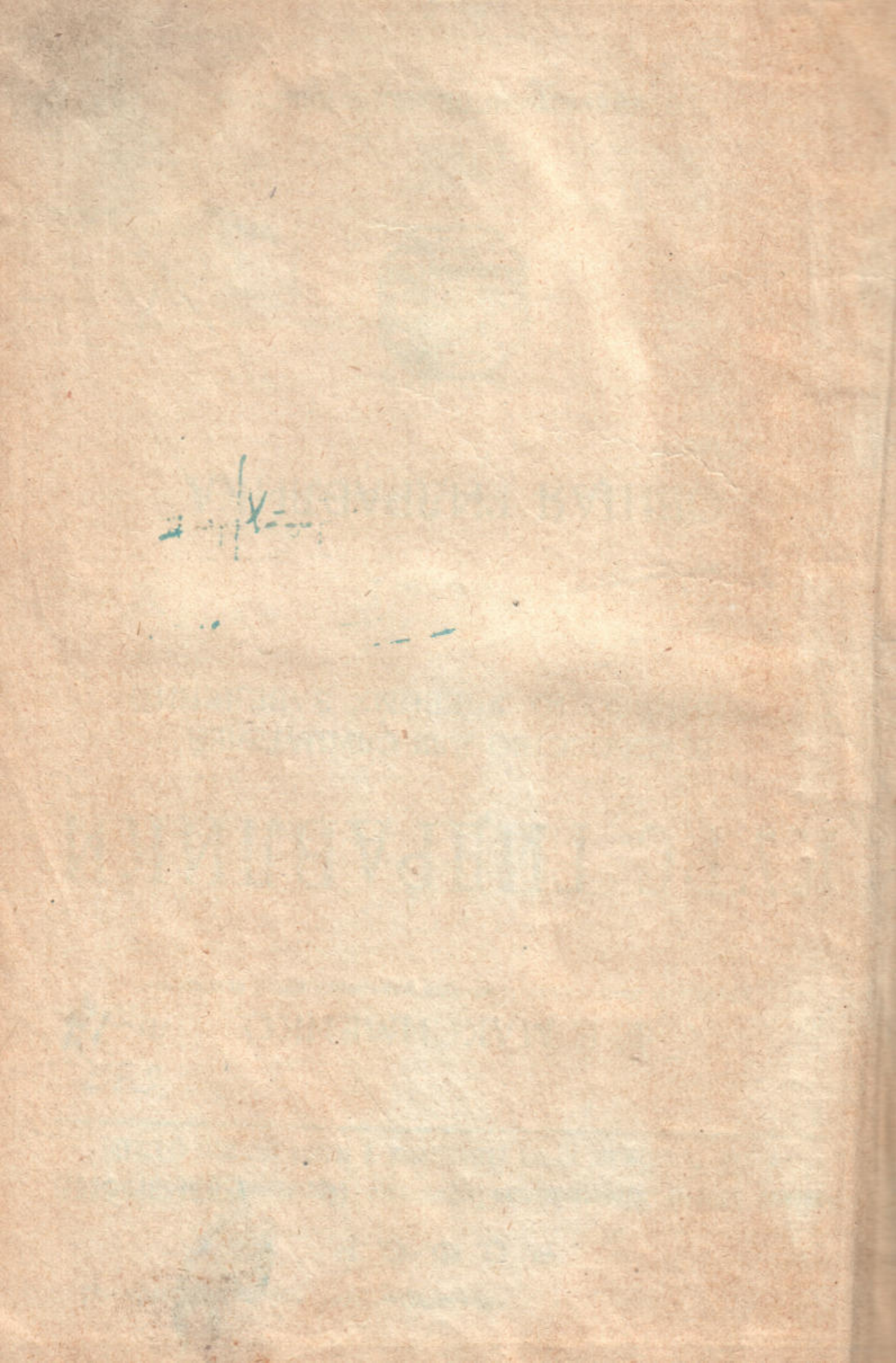
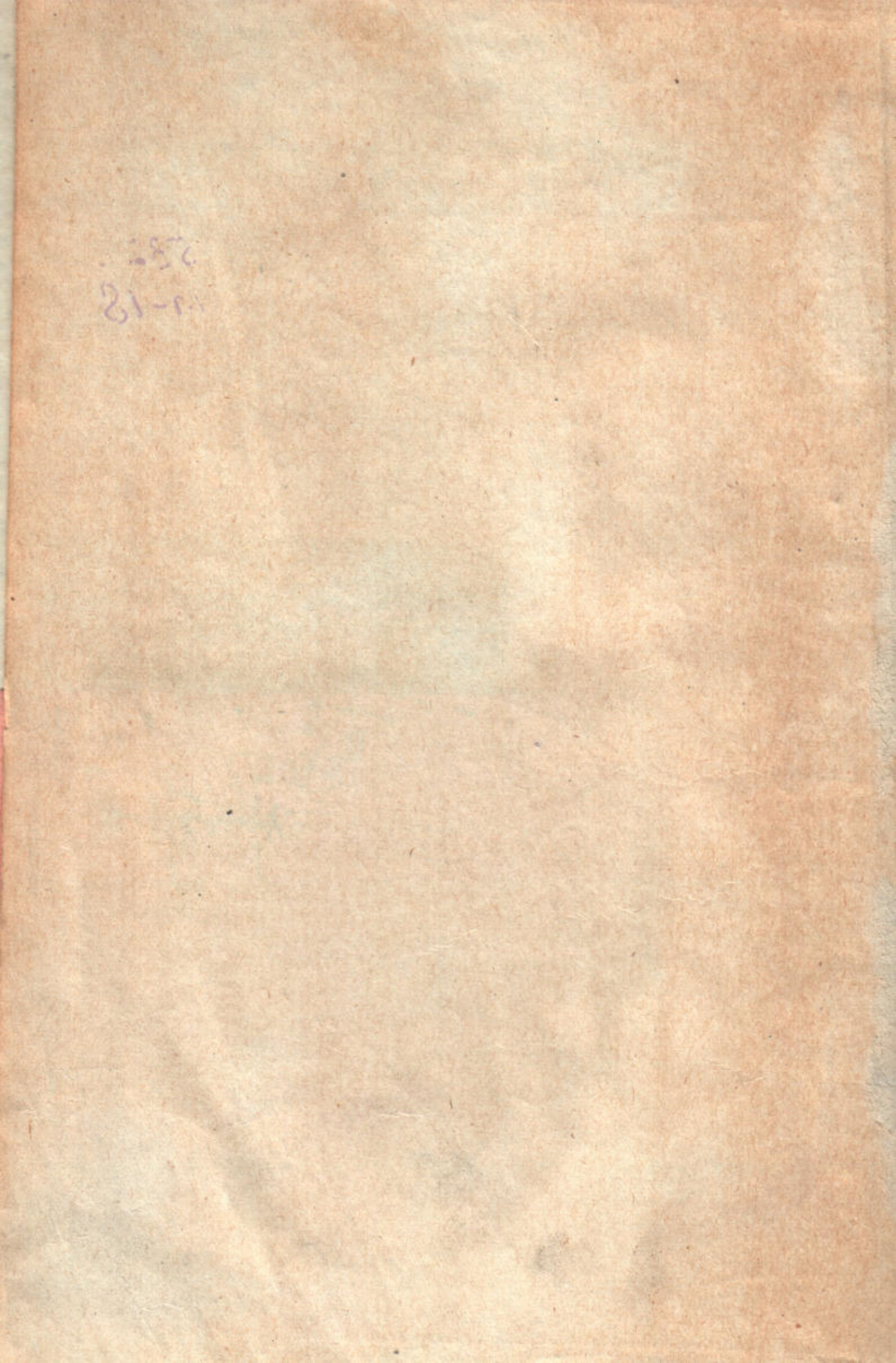



1/XII
2/XI
5293





Пролетарии всех стран, соединяйтесь!

Р. С. Ф. С. Р.

Главный Комитет Профессионально-Технического Образования (ГЛАВПРОФОБР)

Управл. по подготовке агентов железнодорожн. и водного транспорта (УЧТРАН)

Ф. Е. МАКСИМЕНКО

профессор Московского Института инженеров путей сообщения

КУРС ГИДРАВЛИКИ

РУКОВОДСТВО ДЛЯ СЛУШАТЕЛЕЙ
ТЕХНИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ



Часть I

ОБЩАЯ ГИДРАВЛИКА





ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
1921

Гиз. № 1294. (Р. В. Ц. Москва.) Напеч. 10.000 экз.

1-я Образцовая типогр. М. С. Н. Х., Москва, Пятницкая, 71.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Настоящая книга может служить руководством при преподавании гидравлики в технических учебных заведениях, выпускающих инженеров по строительной или механической специальности. Она заключает в себе следующие отделы: гидростатику, гидродинамику и гидравлику.

В **гидростатике** кроме обычных теорем изложены: доказательство закона Архимеда, определение давления жидкости на плоскую стенку и на некоторые простейшие поверхности; также помещено описание устройства главнейших гидравлических машин, как-то: гидравлического пресса, аккумулятора и гидравлических подъемных кранов.

В **гидродинамике** даны выводы: Эйлеровых уравнений движения жидкости и теоремы Д. Бернулли для совершенных и несовершенных жидкостей, а также рассмотрено установившееся движения газов при вытекании из сосудов. Как дополнение к основному курсу приведены главные понятия о деформации тел вообще и в частности о деформации безконечно малой части тела, а также понятия о вихрях и о вихревом движении.

Гидравлика разделена на следующие девять глав, а именно: глава I — вытекание жидкости через отверстия в тонкой стенке; глава II — вытекание жидкости через насадки; глава III — вытекание из сосудов при переменном горизонте; глава IV — вытекание через водосливы; глава V — движение воды в трубах; глава VI — движение воды в реках и каналах; глава VII — определение скоростей и расходов в открытых и закрытых руслах; глава VIII — о движении воды в канале или реке в случае местных изменений в русле; и глава IX—о движении волн. При изложении автор руководился мыслью дать не только учебник для более успешного прохождения курса гидравлики, но вместе с тем предоставить молодым инженерам возможность впоследствии находить в этой книге решения многих вопросов, которые могут возникнуть в их практической деятельности. Поэтому-то книга содержит больше материала, чем это требуется программой, установленной

для гидравлики. Такое расширение содержания было признано автором целесообразным еще и потому, что русская литература по гидравлике довольно бедна; многих книг по этой специальности нельзя имет; затем в справочных книжках отдел гидравлики является одним из самых кратких. Независимо сего автор считал полезным дать в книге больше материала также с тою целью, чтобы наиболее любознательные из читателей могли самостоятельно расширить свои познания в том или другом отделе гидравлики. В этих же видах в книге сделаны в соответственных местах ссылки на литературные источники, в которых читатели могут найти более подробное изложение интересующего их вопроса.

Что касается подготовки необходимой для успешного усвоения этого руководства, то по **высшей математике** она может быть не особенно обширной. По аналитической геометрии потребуется знание уравнений кривых 2-го порядка; по дифференциальному исчислению достаточно знать способ нахождения абсолютного и относительного maximum'a и minimum'a функций с одной и с двумя переменными; по интегральному исчислению потребуется: уменье находить простейшие квадратуры и знание теоремы Симпсона. При прохождении вышеуказанной добавочной части гидродинамики (о вихрях) нужно иметь понятие о криволинейном интеграле и о теоремах Стокса и Остроградского-Грина; но эта часть может быть значительно сокращена, почему знание этих теорем может быть необязательным.

Из **теоретической механики** потребуется знание следующих теорем: условия равновесия сил; нахождение моментов инерции для плоских фигур; общие уравнения движения системы материальных точек; уравнение живых сил; принцип Даламбера; теорема о проекции количеств движения системы материальных точек. Основные понятия о моментах инерции плоских фигур излагаются в курсе сопротивления материалов, почему при прохождении курса гидравлики могут считаться известными. Все вышеуказанные теоремы, согласно программы, излагаются в курсе теоретической механики; но, быть-может, некоторыя из них будут пройдены позже того времени, когда они понадобятся при чтении гидравлики. В таких случаях преподаватель гидравлики мог бы дать слушателям только определение соответственной теоремы теоретической механики с указанием, что доказательство будет дано в свое время в курсе этой механики. Подобный прием изложения применялся во многих случаях и давал вполне удовлетворительные результаты. Для преподавания гидравлики необходимо, как и для преподавания физики и химии, устроить небольшую гидравлическую лабораторию

с приборами, которые дадуть возможность изучать гидравлику не только по книге, но и в лаборатории при помощи опытов. Производство опытов в такой лаборатории в присутствии слушателей принесет огромную пользу для преподавания, очень оживит его и возбудит большой интерес к предмету. Гидравлическая лаборатория может быть устроена по такому общему плану. Из водопровода вода по трубе диаметром от 1,5 до 2 дюймов поступает в железные баки лаборатории общею емкостью не менее 600 ведер, расположенные на особых балках под потолком помещения. Из этих баков вода разводится по лаборатории к приборам трубою диаметром в 4 дюйма. Из лаборатории вода отводится в канализацию по особой керамиковой трубе диаметром в 4 дюйма. В книге дано описание устройства одного из главных приборов для производства опытов и аппарата для измерения поперечных сечений вытекающей струи. При помощи этого прибора можно удобно производить опыты над вытеканием воды из отверстий, через насадки, по трубам. Для опытов над вытеканием воды через водослив надо иметь другой довольно простой прибор. Опыты над движением воды в руслах не трудно организовать, устроив канал небольшого поперечного сечения из деревянных досок или цинковых листов. Вода из приборов поступает в особый приемный чан, расположенный на платформе сотенных весов, откуда после взвешивания выпускается в вышеупомянутую керамиковую трубу. Затем необходимо иметь: два катетометра; два секундомера; набор пластинок с отверстиями различной формы и различных размеров; набор насадок-цилиндрических, конически-расходящихся и конически-сходящихся; трубы железные различных диаметров от 1 д. до 3 д.; вентили для этих труб. О всех подробностях устройства подобной лаборатории можно справиться у автора книги (по адресу: Москва, Бахметьевская улица, д. № 15, Московский Институт инженеров путей сообщения), который с полной готовностью сообщит все требуемые сведения.

Для того, чтобы дать более определенное понятие о характере практических занятий в гидравлической лаборатории, здесь приводится программа таких занятий, выполняемая в Московском Институте инженеров путей сообщения в течение многих лет. Этим занятиям посвящается в течение учебного года 10 вечеров по $2^1/_2$ — 3 часа, а всего около 30 часов; число всех опытов, производимых за это время, около 20 — 25. Каждый раз преподаватель дает подробное объяснение предстоящих опытов и затем производит с помощью слушателей самые опыты. Слушатели записывают объяснения, а также все данные полученныя при производстве опыта и затем дома производят все вычисления,

какие требуются для получения окончательных результатов. Для зачета занятий в гидравлической лаборатории слушатели представляют все вычисления по каждому опыту и дают по ним все необходимые объяснения. Зачет по курсу гидравлики производится отдельно и независимо. Само собою разумеется, что нижеприводимую программу, быть-может, необходимо будет сократить или по недостатку соответственных приборов или за неимением времени; тогда придется ограничиться самым существенным из этой программы, но во всяком случае и от этого немногого не следует отказываться.

Вот эта программа.

I вечер.

1) Демонстрация вытекания воды через отверстия: круглые, прямоугольные, треугольные и т. п.

2) Определение коэф. сжатия струи вытекающей на воздух — непосредственным измерением.

3) Определение коэффициентов: скорости, сжатия, расхода и сопротивления измерением хорды и стрелки в параболической струе, вытекающей на воздух через круглое отверстие в наклонной стенке, и взвешиванием вытекшей воды.

II вечер.

4) Определение коэф. расхода для отверстия (круглого, прямоугольного и т. п.) при вытекании на воздух взвешиванием вытекшей воды.

5) То-же определение, но при условиях несовершенного сжатия.

6) То-же определение при вытекании через затопленное отверстие.

7) Построение опытным путем линий давлений и скоростей при движении воды по трубе переменного диаметра.

III вечер.

8) Определение коэф. расхода, сопротивления, высоты всасывания и коэф. внутреннего сжатия в случае цилиндрической насадки и при вытекании на воздух.

9) То-же определение и при тех же условиях в случае конически-расходящейся насадки.

10) Определение коеф. расхода и коэф. сопротивления в случае конически-сходящейся насадки и при вытекании на воздух.

11) Определение скорости и коэф. расхода при вытекании сжатого воздуха через отверстие.

IV вечер.

12) Определение коэф. расхода для водомера Вентури и определение постоянных величин для тарирования этого прибора.

13) Определение коэф. расхода для прямоугольного водослива с демонстрацией прибора Базена для определения скорости и давления в любой точке струи.

V вечер.

14) Определение коэф. расхода и продольного профиля поверхности воды для водослива с широким порогом.

15) Определение коэф. полезного действия для водоструйного насоса. Объяснение действия инжектора.

VI вечер.

16) Определние потери напора на удар по принципу Борда в случаях: *а)* при переходе струи из узкой трубы в широкую; *б)* при переходе струи из широкой трубы в узкую; *в)* при переходе струи через диафрагму в трубе.

17) Определение коэф. расхода, коэф. сопротивления и гидравлического уклона при вытекании воды на воздух из прямолинейной железной трубы диаметром 52 мм. и сравнение опытных результатов с результатами, получаемыми из формул.

VII вечер.

18) Определение коэф расхода, коэф. сопротивления и гидравлического уклона при движении воды в железной трубе диаметром 52 мм., соединяющей два резервуара и имеющей колена и закругления; определение сопротивлений в коленах и закруглениях и сравнение результатов опыта с вычислениями по различным формулам.

19) Определение коэф. расхода, коэф. сопротивления и гидравлического уклона при вытекании на воздух по железной трубе диаметром 105 мм. Демонстрация прибора, указывающего пульсацию воды.

VIII вечер.

20) Определение величины гидравлического удара в железной трубе диаметром 52 мм.

21) Определение коэф. расхода, коэф. сопротивления, гидравлического уклона и коэф. шереховатости в керамиковой трубе диаметром 4 дюйма при вытекании на воздух.

IX вечер.

22) Определение точности водомеров различных систем.

23) Демонстрация движения воды в свинцовой трубе, имеющей вид сифона.

24) Демонстрация движения воды в деревянном, прямоугольного поперечного сечения, канале с различными местными сопротивлениями.

X вечер.

25) Определение коэф. полезного действия центробежного насоса.

26) Демонстрация действия поршневого насоса Вортингтона, действующего сжатым воздухом.

27) Определение коэф. полезного действия гидравлического тарана.

28) Определение прыжка воды при движении в узком прямоугольном канале.

Что касается учебников по гидравлике, то русской технической литературе в этом отношении посчастливилось; за последние 30—40 лет на русском языке было напечатано учебников по этому предмету едва ли не больше, чем на каком-либо из иностранных языков. Первый по времени учебник по гидравлике на русском языке был издан в 1836 г. под заглавием:

Мельников. П. Основания практической гидравлики, или о движении воды в различных случаях и действие ее ударом и сопротивлением. 1836. Стр. 288 + 55.

Затем были изданы следующие учебники.

1) *Евневич.* Курс гидравлики. Часть I. 1874; стр. 302. Часть II. Гидравлические двигатели. 1874; стр. 361 с атласом.

2) *Максименко.* Курс гидравлики. 1888—1892; стр. 392.

3) *Тиме.* Курс гидравлики. Т. I. Общая гидравлика. 1894; стр. 264 с атласом. Т. II. Гидравлические двигатели. 1891; стр. 388 с атласом.

4) *Брикс.* Теоретический курс гидравлики и гидравлических двигателей. 1892; стр. 232.

5) *Зернов.* Гидравлика и теория турбин. 1897; стр. 145+163 с атласом.

6) *Саткевич.* Гидромеханика. 1904; стр. 255.

7) *Самусь.* Курс гидравлики. 1904; стр. 310.

8) *Астров.* Гидравлика. 1911; стр. 441.

9) *Есьман.* Курс гидравлики. 1914; стр. 238.

Главнейшие учебники на иностранных языках следующие.

1) *Bresse*. Hydraulique. 1879; p. 602.

2) *Collignon*. Hydraulique. 1880; p. 724.

3) *Boulanger*. Hydraulique generale. T. I. et II. 1909; p. 371 + 299.

4) *Flamant*. Hydraulique. 1909; p. 699.

5) *Grashof*. Theoretische Maschinenlehre. Bd. I. 1874. S. 972.

6) *Rühlmann*. Hydromechanik oder die technische Mechanik flüssiger Körper. 1880. S. 760.

7) *Meissner*. Die Hydraulik und die hydraulischen Motoren. In 3 Bänden. S. 546 + 817 + 438; Taf. 35 + 100 + 42.

8) *Lorenz. H*. Technische Hydromechanik. 1910; S. 500.

9) *Bubendey*. Praktische Hydraulik. 1911. S. 156.

10) *Prâsil*. Technische Hydrodynamik. 1913. S. 269.

11) *Forchheimer*. Hydraulik. 1914. S. 566.

12) *Smith. H*. Hydraulics. 1886. p. 362.

13) *Fanning*. A practical treatise on hydrauliç and Water-Supply-Engineering. 1906.

14) *Dunkerley*. Hydraulics. V. 1 — 2. 1908; p. 343 + 253.

15) *Lea*. Hydraulics. 1909; p. 536.

16) *Hughes* and *Safford*. A treatise on Hydraulics. 1911.

17) *Gibson*. Hydraulics. 1912; p. 813.

18) *Unwinn*. A treatise on Hydraulics. 1912.

19) *Nazzani*. Idraulica matematica e pratica. V. 1 — 4; 1876; p. 439 + 387 + 357 + 342. Atlas. Tav. 29.

20) *Masoni*. Corso di idraulica teoretica e pratica. 1900; p. 673.

21) *Cappa*. Corso di idraulica pratica. 1907; p. 1055.

Из иностранных учебников можно особенно рекомендовать следующие: №№ 1, 3, 4, 5, 6 и 11. Руководством при производстве гидравлических опытов может служить сочинение *I. Weisbach*. Die Experimental-Hydraulik. 1855. S. 281. В этом сочинении описан прибор, сконструированный Вейсбахом, применявшийся долгое время в гидравлических лабораториях не потерявший значения и в настоящее время.

Октябрь 1920 г.

Ф. Максименко.

Оглавление курса гидравлики.

ВВЕДЕНИЕ.

Стр.

Гидростатика.

Гидродинамика.

Стр.

Гидравлика.

ВВЕДЕНИЕ.

Глава I. Вытекание жидкости через отверстие в тонкой стенке.

Глава II. Вытекание жидкости через насадки.

Глава III. Вытекание из сосудов при переменном горизонте.

Глава IV. Вытекание через водосливы.

Стр.

Глава V. Движение воды в трубах.

Глава VI. Движение воды в реках и каналах.

Глава VII. Определение скоростей и расходов в открытых и закрытых руслах.

Глава VIII. О движении воды в каналах или реках в случае местных изменений в русле.

Глава IX. О движении волн.

Список опечаток в тексте.

Стран.	Строка.	Напечатано.	Должно быть.
7	3 св.	ω_3	$\Delta\omega_3$
14	15 „	XY'	$X'Y$
16	2 „	$ce=cd$	$Ad=AN$
„	2 „	e	N
„	13 „	$\Delta AEF'$	ΔAEF
28	3 сн.	растягивающие	растягивающие вертикальные
32	16 св.	OO'	OO_1
33	17 „	сегмента	полусегмента
„	18 „	$x_2y^2—x_1y_1$	$x_2z_2—x_1z_1$
48	14 „	интеграл	интегралы
53	1 „	$p_0\omega W_0dt$	$p_0\omega_0W_0dt$
53	19 „	P_2z_3	P_3z_3
56	6 сн.	dz	ds
60	5 св.	подъинтегральная величина	$\frac{dp}{p}$ [illegible]
63	1 сн.	abc	$a_1b_1c_1$
70	20 св.	$\frac{\partial l}{\partial z}$	$\frac{\partial l}{\partial z}dz$
73	9 сн.	$\varepsilon_3 z^{13}$	$\varepsilon_3 z'^2$
87	1 „	образующего	образующею
99	12 св.	$cgka$	$cgkd$
102	6 и 7 „	должно быть: вследствие отсутствия в ней трения— при образовании вихревых трубок не будет причины для потери...	
105	1 св.	III	VI
„	2 „	VI	III
„	9 сн.	108	106
120	3 св.	$Sin\,\Psi$	$Sin\,2\Psi$
„	8 „	$2\,V_p^2\,Cos^2\Psi$	$8\,V_p^2\,Cos^2\Psi$
„	16 „	X_1Y_1	$X'Y'$
„	17 „	$\left(\frac{x_1}{2}\right)$	$\left(\frac{x_1}{2}\right)^2$
„	18 „	(b)	(c)
122	6 сн.	(k)	(k_1)

Стран.	Строка.	Напечатано.	Должно быть.
125	17 сн.	0,598	0,592
„	17 „	0,592	0,598
134	3 св.	$\left(z_0 - z_2 + \frac{V_0^2}{2g}\right)$	$\left(z_0 - z_2 + \frac{p_0 - p_2}{\Delta} + \frac{V_0^2}{2g}\right)$
144	2 „	как	когда
149	4 „	0,90	0,97
164	3 сн.	2_n	$2n$
165	17 св.	ζ_0	ζ
166	20 „	ED	EF
167	8 сн.	$N—к$	N
172	9 „	$\sqrt{\frac{h}{2g}}$	$\sqrt{\frac{h_2}{2g}}$
179	6 „	$V = V$	$V_0 = V$
187	9 св.	0,0085	0,0008
„	10 „	0,00279	0,00263
188	10 „	V_0	V
„	12 „	V_0	V
„	7 сн.	0,2793	0,00263
195	15 св.	dk	gk
239	3 „	плоскость	плоскость NN
248	15 „	$abcdef\,M$	$kmngrM$
„	17 „	c и e	b и b'
„	17 „	abc	kml
„	18 „	$ef\,M$	$b'rM$
„	19 „	cde	$bnqb'$
„	5 сн.	dd'	qq'
„	2 „	A'	B
253	14 „	d'''	d''
„	7 „	Bm	Km
261	10 св.	97	197
„	12 „	a	$2a$
264	8 сн.	a	a_1
266	11 „	lm	mn
„	„ „	l	m
„	6 „	l	m
267	12 сн.	lm	mn
268	11 „	O	O_1
270	10 св.	Z	Z'
282	17 „	*maximum*'a	*minimum*'a
296	8 „	Ω	Ω_0
313	3 сн.	ef	наклонной ef
322	19 св. и далее	Q	G
343	16 св.	-2	$-2x$
354	4 „	$,788\,r$	$4,788\,r$
358	2 „	C	$C;$

Список исправлений чертежей.

На черт. 15 вертикальную линию EF обозначить FF'
„ „ 26 „ „ Ad_1 „ Aa_1'.
„ „ 42 „ „ FC „ Fg.
„ „ 44 клапан e поставить внизу трубы c.
„ „ 52 через b провести горизонтальную be' до пересечения в e' с линией df.
„ „ 55 через b провести горизонтальную bk до пересечения в k с линией ei.
„ „ 56 вместо MpW поставить $M_1p_1W_1$.
„ „ 76 поставить букву P_1 у начала сектора W_1.
„ „ 107 вместо H поставить H_0.
„ „ 127 на конце струи поставить буквы i и g.
„ „ 131 на правом конце отрезка V_c поставить d.
„ „ 144 вместо c поставить c'''.
„ „ 147 на вертикали проходящей через M_1 посравить H_1 вместо H.
„ „ 153 при входе в трубу поставить буквы k a b.
„ „ 156 на линии давлений поставить d'' вместо d.
„ „ 159 в конце трубы ab поставить c.
„ „ 161 в колодцах b и b' поставить на горизонте воды M_0 и M.
„ „ 163 поставить m' и n' на концах наклонной прямой заканчивающей линию скоростей 1—6; на линии $m'n'$ поставить цифру 7, а на соответственном отрезке линии давления поставить цифру 7^1.

Дополнение к тексту на стр. 218 см. стр. 510 и 511.

ВВЕДЕНИЕ.

§ 1. Предмет гидравлики; отношение ее к гидродинамике и физике. Разделение гидравлики на главные отделы. Под словом жидкости в механике подразумеваются капельные жидкости и газы или другими словами: неупругие или несжимаемые жидкости и упругие или сжимаемые жидкости. Мы будем рассматривать по преимуществу первые, называя их жидкими телами или просто жидкостями. Жидкости, в свою очередь, разделяются: на совершенные или идеальные жидкости и на несовершенные или вязкие жидкости. В совершенных жидкостях сил трения нет; в несовершенных силы трения существуют, но, очевидно, они проявляются только при движении. Движение совершенных жидкостей рассматривается в гидродинамике, которая в своих решениях исходит из общих уравнений механики, а потому ее выводы отличаются общностью и точностью. К сожалению, эти выводы заключены в дифференциальных уравнениях с частными производными (Эйлеровы уравнения гидродинамики), решение которых даже в простых случаях затруднительно. Вследствие этого последнего обстоятельства решение большей части задач помощью уравнений гидродинамики оказывается невозможным и трудно предвидеть, когда гидродинамика может выйти из такого положения. Между тем инженерная техника постоянно создавала задачи, требовавшие немедленного хотя бы и не полного (в смысле общности и точности) решения. Эта практическая настоятельная необходимость в решении многих задач, касающихся движения жидкостей, побуждала ученых искать иного пути для исследования вопросов сюда относящихся. Путь опыта оказался в этом деле весьма плодотворным. Произведенный в условиях, требуемых той или другой задачей, он давал непосредственное решение вопроса, хотя не всегда точное и общее. На основании результатов опыта можно было впоследствии при помощи особых гипотез и общих законов механики придать решениям аналитическую форму. Некоторые вопросы оказалось возможным решить при помощи гидродинамики. Совокупность решений вопросов по преимуществу практического характера — путем

опыта и при помощи специальных гипотез и общих законов механики — составляет предмет гидравлики. По самому существу гидравлика—наука экспериментальная, в которой главную роль играет опыт и притом над жидкостью несовершенною, т.-е. такою, в которой проявляется трение. В гидравлике опыт дает начальную основу для теоретических исследований; опыт же, проверяя выводы этих исследований, решает вопрос и о правильности последних. По этому-то ни по одной отрасли прикладной механики не было произведено такого значительного числа опытов, как по гидравлике. Большинство ученых, изучавших различные вопросы гидравлики, являлись в то же время авторами опытов или относящихся к этим же вопросам или к вопросам, которые решались другими исследователями и для которых нужна была опытная проверка.

Из вышеизложенного видно довольно ясно различие между гидравликой и гидродинамикой; в первой: предмет исследования —несовершенная жидкость; метод исследования — опыт; результаты исследования — решение многих вопросов практического значения при отсутствии общности и строгой точности выводов; во второй: предмет исследования — совершенная жидкость; метод исследования — теоретический на основании уравнений механики; результаты исследований—решение небольшого числа вопросов при общности и строгости выводов. Очевидно, что с проложением новых путей в гидродинамике и с введением в ее рассмотрение несовершенной жидкости, гидравлика сольется с гидродинамикой, потому что выводы первой будут так относиться к выводам второй, как частное к общему.

В гидродинамике рассматриваются почти исключительно совершенные жидкости в виду того, что при этом значительно упрощается решение задач. В гидравлике жидкости рассматриваются хотя несовершенными, но несжимаемыми; в действительности жидкости сжимаются. В огромном большинстве задач этим сжатием можно пренебрегать; но существуют случаи, как, напр., гидравлический удар в трубах, когда сжатие жидкости необходимо вводить в расчет. Заметим, что сжимаемость многих жидкостей значительно больше сжимаемости таких твердых тел, как, напр., железо, сталь и т. п., и что жидкости являются идеально упругими телами, так как сжатая жидкость возвращается вполне к первоначальному об'ему, как только сжимающие силы перестают действовать.

Явления движения жидкостей по своей природе суть явления чисто физические; поэтому гидравлика, изучая законы этих явлений, составляет часть физики и по приемам и методам решения своих задач не

отличается от других отделов этой науки. Изучение гидравликой большинства этих вопросов пока лишь с практическою целью указывает только на недостаточное еще развитие этой науки. Несовершенство метода гидравлики нисколько не может умалить ее значения, так как большинство наук находились в свое время в подобном же положении и только постепенно достигли той степени совершенства, которым они отличаются в настоящее время. Надо надеяться, что и гидравлика не составит исключения в этом отношении.

Изучаемые гидравликой вопросы могут быть соединены в следующие четыре группы:

I. Движение воды из сосудов через отверстия.

II. Движение воды в трубах (в руслах под напором).

III. Движение воды в реках и каналах (в руслах без напора).

IV. Взаимодействие воды и твердых тел в их относительном движении.

В *первую* группу входят случаи вытекания воды через отверстия в шлюзах, доках, через отверстия в водоспусках, через водосливы и прочее.

Во *вторую*:—случаи движения воды в водопроводах городских, заводских, железнодорожных, в трубах водоудержательных плотин, в трубах под насыпями дорог; сюда же относятся случаи движения нефти и керосина в нефтепроводах и керосинопроводах.

В *третью*:—случаи движения воды в городских водостоках и каналах различного назначения: для орошения, осушения, судоходных; случаи движения воды в реках и каналах при обыкновенных условиях и при устройстве в них заграждений: дамб, плотин, щитов и т. п.

В *четвертую*:—случаи действия воды на твердые тела, а именно: действие воды в водяных колесах, тюрбинах, насосах, на суда, на приборы, измеряющие скорость движения воды и т. п.

Из этого краткого перечня видно, какое важное значение имеет гидравлика в ряду других инженерных наук. Такие вопросы, как, напр., рассчеты водопроводов, водостоков, водяных колес и тюрбин, насосов; определение отверстий мостов, сопротивление судов при движении в воде; расчеты плотин, шлюзов, доков; вопросы, относящиеся к регулированию рек, и многие другие вопросы для правильного решения требуют основательного знакомства с гидравликой.

Изложению гидравлики предшествуют главнейшие теоремы гидростатики и гидродинамики. Такая последовательность дает возможность: во-первых, указать на применение некоторых выводов гидростатики к решению вопросов, встречающихся в практике; во-вторых, представить

учение о равновесии и движении жидкостей в возможной полноте; и в третьих, подробнее выяснить связь между гидравликой и гидродинамикой.

§ 2. Понятие о силах, проявляющихся внутри жидкого тела. Пусть жидкое тело AB (черт. 1) находится под действием некоторой системы сил P_1; P_2... (в числе которых заключаются: сила тяжести, атмосферное давление, противодействие стенок сосуда и т. п.) в известных обстоятельствах равновесия или движения. Тело AB разделим мысленно плоскостью или поверхностью MN на две части MAN и MBN, из которых будем рассматривать лишь последнюю; первую же часть отбросим. Если просто отбросить эту часть, то состояние части MBN станет совершенно иным, чем если бы часть MAN продолжала оставаться соединенной с ней. Состояние части MBN и по отнятии от нее части MAN остается без изменения, если только ко всем точкам сечения MN приложить силы в точности одинаковые с теми, которыми отбрасываемая часть действовала на остающуюся. В сечении MN возьмем бесконечно малую площадку $ab = \Delta\omega$. Пусть R по величине, направлению и по точке приложения C есть равнодействующая сил, которые нужно приложить ко всем точкам этой площадки, когда от MBN отделяется MAN. Если рассматривается несовершенная жидкость, то сила R с внутреннею нормально n' составляет угол не равный прямому. Разложим силу R на две составляющих: одну N, направленную по n', и другую T в плоскости площадки; последняя сила наз. *силою трения* или просто трением для площадки $\Delta\omega$, а первая — сжимающею силою или *давлением* для той же площадки; очевидно, она всегда направляется по внутренней нормали n' площадки. Если разделить N и T на $\Delta\omega$, то частные

$$\frac{N}{\Delta\omega} \quad \text{и} \quad \frac{T}{\Delta\omega} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

представят: первое — давление на ед. площади площадки $\Delta\omega$ или проще — ед. давление для $\Delta\omega$; второе — силу трения на ед. площади площадки $\Delta\omega$ или проще — ед. силу трения для $\Delta\omega$. Если постепенно уменьшать площадку $\Delta\omega$ и подводить ее к нулю, но так, чтобы точка C оставалась внутри площадки, то N, T и $\Delta\omega$ будут постепенно уменьшаться, а отношения (1), непрерывно изменяясь, будут подходить к некоторым предельным значениям p и t, которые наз. соответственно *ед. давлением* в точке C по направлению n' и *ед. трением* в точке C по плоскости MN. Итак

$$\text{пр.} \left(\frac{N}{\Delta\omega}\right) = p; \qquad \text{пр.} \left(\frac{T}{\Delta\omega}\right) = t \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

следовательно:

$$\frac{N}{\Delta\omega} = p + \varepsilon \qquad \frac{T}{\Delta\omega} = t + \varepsilon$$

где ε и ε' бесконечно малые величины при пределе равные нулю. Отсюда также следует:

$$N = (p + \varepsilon)\,\Delta\omega; \qquad T = (t + \varepsilon')\,\Delta\omega.$$

Пренебрегая здесь бесконечно малыми высших порядков, можем написать:

$$N = p\Delta\omega; \qquad T = t\Delta\omega \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

Проводя через ту же точку C другие сечения M_1N_1; M_2N_2... (черт. 2) и рассматривая площадки $\Delta\omega_1$; $\Delta\omega_2$..., расположенные в этих плоскостях и заключающих точку C, найдем подобным же рассуждением:

$$\text{пр.}\left(\frac{N_1}{\Delta\omega_1}\right) = p_1; \quad \text{пр.}\left(\frac{T_1}{\Delta\omega_1}\right) = t_1; \quad \text{пр.}\left(\frac{N_2}{\Delta\omega_2}\right) = p_2; \quad \text{пр.}\left(\frac{T_2}{\Delta\omega_2}\right) = t_2 \quad \text{и т. д.}$$

которые представляют: ед. давления в точке C по направлениям n_1', n_2'... и ед. силы трения в этой же точке в плоскостях M_1N_1, M_2N_2. Во всех этих случаях ед. силы p и t относятся к точке C, взятой внутри соответственной площадки $\Delta\omega$. Если в той же площадке взять произвольную точку C', то ед. силы в точке C' равные p' и t' будут равны: $p' = p + \delta$ и $t' = t + \delta'$ где δ и δ' — бесконечно малые величины. Тогда давление и сила трения для $\Delta\omega$ будут равны

$$N = p\Delta\omega = (p' - \delta')\,\Delta\omega, \qquad T = t\Delta\omega = (t' - \delta')\,\Delta\omega$$

пренебрегая безконечно малыми высших порядков, получим:

$$N = p'\Delta\omega, \qquad T = t'\Delta\omega \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

Итак для определения сил N и T для какой-либо площадки $\Delta\omega$ нужно величину площадки умножить на ед. давление или на ед. силу трения для *любой* точки, взятой внутри этой площадки. Трение в жидкостях не зависит от давления; оно находится в зависимости от относительной скорости перемещающихся частиц, от температуры и от свойств жидкости. Таким образом трение между частицами жидкости существенно отличается от трения между твердыми телами. Если частицы несовершенной жидкости находятся в равновесии, то силы трения T равны нулю, и силы R, R_1..., приводятся к давлениям N, N_1... В совершенной жидкости, будут ли ее частицы перемещаться или находиться в равновесии, силы R, R_1... приводятся к давлениям N, N_1.

ГИДРОСТАТИКА.

§ 3. Теорема первая: в каждой точке жидкости единичные давления по всем направлениям, проходящим через эту точку, равны между собою. Докажем сперва, что в произвольной точке жидкости O (черт. 3) ед. давления, идущие по каким-либо трем взаимно-перпендикулярным направлениям OX, OY, OZ, равны между собою.

Для этого проведем четыре плоскости XOZ, XOY, YOZ и ABC так, чтобы они взаимным пересечением образовали тетраэдр $OABC$ с бесконечно малыми ребрами Δx, Δy, Δz. Будем рассматривать только жидкость, заключенную в этом тетраэдре, а остальную отбросим; в таком случае взамен отброшенной жидкости необходимо ко всем граням тетраэдра приложить давления, соответствующие этим граням. Пусть эти давления суть R, U, V, W; они нормальны к соответственным граням и направляются во внутрь тетраэдра. Кроме этих давлений, на тетраэдр действуют внешние силы, как напр., сила тяжести, силы притяжения или отталкивания, исходящие из какого-либо центра и т. п.; эти силы можно изобразить одной силой S, величина ее пропорциональна массе жидкости, заключающейся в тетраэдре, так что $S = K\rho\triangle v$, где: $\triangle v$ — об'ем тетраэдра; ρ — средняя плотность жидкости в нем, и K — ед. сила, т.-е. сила соответствующая единице массы жидкости. Пусть S составляет с осями углы α, β, γ, а сила R — углы λ, μ, ν. При действии сил R, S, U, V, W тетраэдр находится в равновесии, а потому суммы проэкций этих сил на оси X, Y и Z должны каждая равняться нулю, т.-е.

$$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0, \qquad \Sigma Z = 0.$$

Тогда получаем:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma X &= U - R\,\mathrm{Cos}\,\lambda + S\,\mathrm{Cos}\,\alpha = 0 \\ \Sigma Y &= V - R\,\mathrm{Cos}\,\mu + S\,\mathrm{Cos}\,\beta = 0 \\ \Sigma Z &= W - R\,\mathrm{Cos}\,\nu + S\,\mathrm{Cos}\,\gamma = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Разделим все члены первого из этих уравнений на площадку

$OBC = \Delta\omega_1$; второго — на площ. $OAC = \Delta\omega_2$ и третьего — на площ. $OAB = \Delta\omega_3$. Тогда принимая во внимание, что

$$\frac{\Delta\omega_1}{\mathrm{Cos}\,\lambda} = \frac{\Delta\omega_2}{\mathrm{Cos}\,\mu} = \frac{\omega_3}{\mathrm{Cos}\,\nu} = \text{площ. } ABC = \Delta\Omega,$$

получим:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{U}{\Delta\omega_1} - \frac{R}{\Delta\Omega} + \frac{S\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{\Delta\omega_1} = 0 \\ \frac{V}{\Delta\omega_2} - \frac{R}{\Delta\Omega} + \frac{S\,\mathrm{Cos}\,\beta}{\Delta\omega_2} = 0 \\ \frac{W}{\Delta\omega_3} - \frac{R}{\Delta\Omega} + \frac{S\,\mathrm{Cos}\,\gamma}{\Delta\omega_3} = 0 \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots (5a).$$

Если теперь плоскость ABC постепенно приближать к точке O, то ребра AO, BO и CO, а также все грани тетраэдра, непрерывно уменьшаясь, будут подходить к нулю, а рассматриваемый тетраэдр будет последовательно переходить все в меньшие тетраэдры $A'B'C'O$, $A''B''C''O$... (черт. 4). Для каждого из них предыдущие уравнения будут справедливы; они останутся справедливыми и при пределе, т.-е. когда ребра тетраэдра обратятся в нули, хотя тогда эти уравнения примут другой вид, а именно следующий.

Так как

$$\frac{S\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{\Delta\omega_1} = \frac{K\rho.\frac{1}{6}\Delta x.\Delta y.\Delta z.\mathrm{Cos}\,\alpha}{\frac{1}{2}\Delta y.\Delta z} = \frac{1}{3}K\rho\,\Delta x\,\mathrm{Cos}\,\alpha,$$

то при пределе, т.-е. при $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$, третий член первого уравнения (5*a*) будет равен нулю; то же самое следует сказать относительно последних членов второго и третьего уравнений. Так что при пределе предыдущие уравнения (5*a*) примут вид:

$$\text{пр.}\left(\frac{U}{\Delta\omega_1}\right) - \text{пр.}\left(\frac{R}{\Delta\Omega}\right) = 0;\ \ \text{пр.}\left(\frac{V}{\Delta\omega_2}\right) - \text{пр.}\left(\frac{R}{\Delta\Omega}\right) = 0 \text{ и т. д.}$$

Но если через $p^x{}_0$; $p^y{}_0$; $p^z{}_0$ обозначить ед. давления в точке O по направлениям осей X; Y; Z, то согласно равен. (2) найдем:

$$\text{пр.}\left(\frac{U}{\Delta\omega_1}\right) = p^x{}_0 \qquad \text{пр.}\left(\frac{V}{\Delta\omega_2}\right) = p^y{}_0$$

$$\text{пр.}\left(\frac{W}{\Delta\omega_3}\right) = p^z{}_0 \qquad \text{пр.}\left(\frac{R}{\Delta\Omega}\right) = p^n{}_0.$$

Последнее выражение представляет ед. давления в точке O по направлению нормали n к площадке ABC. Следоват., из уравнения (5*a*) выходим:

$$p_0{}^x = p_0{}^y = p_0{}^z = p_0{}^n.$$

Итак, ед. давления в точке O по направлениям координатных осей равны между собою. Оставляя одно из этих направлений без изменения и переменяя прочие два, можем тем же способом доказать, что ед. давления в точке O по всем направлениям равны между собою. Отсюда следует, что ед. давление в какой-либо точке $a(x; y; z)$ жидкости есть функция только координат этой точки и не зависит от направления той линии, по которой идет давление, так что:

$$p_a^x = p_a^y = \cdots = F(x; y; z) = p_a = \text{ед. давление в точке } a.$$

§ 4. Теорема вторая. Частные производные по координатам ед. давления p_a в какой-либо точке жидкости a равны соответственным проэкциям X, Y, Z силы K, умноженным на плотность ρ_a жидкости в этой точке.

Докажем, что

$$\frac{\partial p_a}{\partial x} = \rho_a X; \qquad \frac{\partial p_a}{\partial y} = \rho_a Y; \qquad \frac{\partial p_a}{\partial z} = \rho_a Z \quad \ldots\ldots (6).$$

Из жидкости, находящейся в равновесии под действием сил, к ней приложенных, выделим плоскостями, параллельными координатным, параллелопипед $abcdefg$ с бесконечно малыми ребрами Δx; Δy; Δz (черт. 5). Будем рассматривать только жидкость в этом параллелопипеде, остальную же отбросим; тогда взамен этой последней необходимо к граням приложить соответствующие им давления U и U'; V и V'; W и W'; эти давления перпендикулярны к своим граням и направляются во внутрь параллелопипеда. Сверх этих давлений на параллелопипед действуют внешние силы, как напр., сила тяжести, силы притяжения или отталкивания, исходящие из какого-либо центра, и т. п. Эти силы можно изобразить одной силой S, величина которой пропорциональна массе жидкости в рассматриваемом об'еме; тогда

$$S = K\rho\Delta v,$$

где Δv — об'ем параллелопипеда; ρ — средняя плотность жидкости в этом об'еме, и K — сила на единицу массы жидкости. Пусть проэкции силы K суть: X; Y; Z. Так как параллелопипед под действием сил к нему приложенных находится в равновесии, то суммы проэкций этих сил на координатные оси равны нулю; следоват.:

$$\Sigma X = U - U' + X\rho\Delta v = 0$$
$$\Sigma Y = V - V' + Y\rho\Delta v = 0$$
$$\Sigma Z = W - W' + Z\rho\Delta v = 0.$$

Разделяя все члены этих уравнений на $\Delta v = \Delta x . \Delta y . \Delta z$, получим:

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{\frac{U'}{\Delta y . \Delta z} - \frac{U}{\Delta y . \Delta z}}{\Delta x} + X\rho = 0 \\
&-\frac{\frac{V'}{\Delta x . \Delta z} - \frac{V}{\Delta x . \Delta z}}{\Delta y} + Y\rho = 0 \\
&-\frac{\frac{W'}{\Delta x . \Delta y} - \frac{W}{\Delta x . \Delta y}}{\Delta z} + Z\rho = 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Выражение $\frac{U}{\Delta y . \Delta z}$ представляет ед. давление на площадку bc; его можно принять равным ед. давлению p_a в точке a плюс бесконечно малая величина ε, которая обращается в нуль при уменьшении размеров площадки bc до нуля подведением точек b и c к точке a. На этом основании можно положить:

$$\frac{U}{\Delta y . \Delta z} = p_a + \varepsilon; \quad \frac{U'}{\Delta y . \Delta z} = p_d + \varepsilon'; \quad \frac{V}{\Delta x . \Delta z} = p_a + \varepsilon_1; \quad \frac{V'}{\Delta x . \Delta z} = p_c + \varepsilon_1';$$

$$\frac{W}{\Delta x . \Delta z} = p_a + \varepsilon_2; \quad \frac{W'}{\Delta x . \Delta z} = p_b + \varepsilon_2'.$$

Здесь ε; ε'... суть бесконечно малые величины, обращающиеся в нуль при пределе, а p_a; p_b... ед. давления в точках a; b... Ед. давление в точке a есть функция координат этой точки, т.-е. $p_a = f(x y z)$; тогда $p_b = f(x, y, z + \Delta z)$; $\quad p_c = f(x, y + \Delta y, z)$; $\quad p_d = f(x + \Delta x, y, z)$. В таком случае предыдущие три уравнения можно переписать так:

$$\begin{aligned}
&-\frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z) + \varepsilon' - \varepsilon}{\Delta x} + X\rho = 0 \\
&-\frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z) + \varepsilon_1' - \varepsilon_1}{\Delta y} + Y\rho = 0 \quad \ldots\ldots (8) \\
&-\frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z) + \varepsilon_2' - \varepsilon_2}{\Delta z} + Z\rho = 0.
\end{aligned}$$

Если теперь размеры параллелопипеда постепенно уменьшать и подводить их к нулю, приближая точки b, c, d, e к точке a, то равенства (8) будут оставаться справедливыми; они будут верными и при пределе, т.-е. при $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$. В этом случае ρ, обозначающее среднюю плотность жидкости в параллелопипеде, обратится в ρ_a — плотность жидкости в точке a; количества ε; ε'... обратятся в нули; тогда получим:

$$\text{пр.}\left(\frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}\right) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial p_a}{\partial x}$$

$$\text{пр.}\left(\frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}\right) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial p_a}{\partial y}$$

$$\text{пр.} \left(\frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z} \right) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial p_a}{\partial z}.$$

Таким образом при пределе рав. (8) обратятся в рав. (6), которые суть условия, необходимые для равновесия жидкости. Так как равен. (6) справедливы для всякой точки жидкости, то эти равенства можно писать без значка a.

§ 5. Давление в жидкости при внешних силах, имеющих потенциал. Поверхности уровня. Давление в жидкости при действии силы тяжести. Примеры.

Умножая уравн. (6) соответственно на dx, dy, dz и складывая их, получим:

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9).$$

Так как первая часть этого равенства представляет полный дифференциал, то и вторая часть должна быть также полным дифференциалом. В таком случае количества ρX, ρY и ρZ должны равняться частным производным по координатам от некоторой функции $f(x, y, z)$, т.-е. должно быть

$$\rho X = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad \rho Y = \frac{\partial f}{\partial y}; \quad \rho Z = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Но так как очевидно

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right); \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

то должны существовать следующие равенства

$$\frac{\partial(\rho X)}{\partial y} = \frac{\partial(\rho Y)}{\partial x}; \quad \frac{\partial(\rho X)}{\partial z} = \frac{\partial(\rho Z)}{\partial x}; \quad \frac{\partial(\rho Y)}{\partial z} = \frac{\partial(\rho Z)}{\partial y} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (9a).$$

Следоват. если ρ, X, Y, Z таковы, что равенства (9a) выполняются, то ур. (9) удовлетворено и жидкость под действием данных сил находится в равновесии; в противном случае жидкость не будет в равновесии. Если рав. (9a) удовлетворяются, то из ур. (9) получим

$$p = f(x, y, z) + C,$$

где неизвестная постоянная C определится по условию, что в заданной точке M_0 (x_0; y_0; z_0) давление равно p_0. По этому уравнению определим давление в любой точке внутри жидкости. Что касается давления для точек, лежащих на поверхности жидкости, то это давление и внешнее давление P на поверхности (давление атмосферы, давление другой жидкости и т. п.) в каждой точке жидкости по величине равны, а по направлению противоположны.

Заслуживают особого внимания случаи, когда внешние силы имеют *потенциал*, таковы сила тяжести, силы, исходящие из какого-либо центра, и т. п. Если силы имеют потенциал, то это значит, что проекции ед. силы K, т.-е. X; Y; Z представляют частные производные по x; y; z какой-либо функции координат: $V = F(x;\ y;\ z)$, т.-е.

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}; \qquad Y = \frac{\partial V}{\partial y}; \qquad Z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Тогда из ур. (9) получаем

$$dp = \rho dV.$$

Для интегрируемости второй части необходимо, чтобы было $\rho = \varphi(V)$, тогда получаем

$$p = \Phi(V) + C = f(x;\ y;\ z) + C \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (a).$$

Если рассматривать только такие точки жидкости, координаты которых удовлетворяют следующему равенству

$$V = F(x;\ y;\ z) = C',$$

т.-е. такие точки, которые лежат на поверхности изображаемой этим уравнением, то для всех таких точек получается из равенства (a): $p =$ постоянному.

Поверхность $V = C'$ наз. *поверхностью уровня*. Для точек, лежащих на поверхности уровня, очевидно

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = Xdz + Ydy + Zdz = 0.$$

Если ds — элементарная дуга, лежащая на поверхности уровня и проекции которой суть dx, dy, dz, то элементарная работа силы $K(X;\ Y;\ Z)$ в перемещении ds выразится так:

$$Xdx + Ydy + Zdz = Ks \operatorname{Cos}(K;\ ds).$$

Так как первая часть этого равенства по условию равна нулю, то вторая часть также равна нулю; но K и ds не могут быть нулями, следоват., должно быть

$$\operatorname{Cos}(K; ds) = 0,$$

т.-е. внешняя сила K нормальна к поверхности уровня. Итак: 1) во всех точках какой-либо поверхности уровня ед. давления равны между собою; 2) внешние силы, действующие на точки жидкости, расположенные на поверхности уровня, нормальны к поверхности уровня, и 3) поверхности уровня не пересекаются.

Свободная поверхность ограничивает жидкость с внешней стороны, напр., со стороны атмосферы; так как давление атмосферы можно

принять одинаковым во всех точках свободной поверхности, то свободная поверхность есть одна из поверхностей уровня.

Внешние силы имеют потенциал, когда на жидкость действует *сила тяжести*; тогда: $X=0$; $Y=0$; $Z=-g$. Следоват.:

$$dV=Xdx+Ydy+Zdz=-gdz=d(-gz).$$

Уравнение поверхностей уровня представится так:

$$V=-gz=C \quad \text{или} \quad z=C',$$

так что всякая горизонтальная плоскость есть поверхность уровня. Для определения давления имеем

$$dp=\rho dV=-g\rho dz=-\Delta dz,$$

где $\Delta=g\rho$ — вес единицы об'ема жидкости.
Пусть ρ постоянно; тогда

$$p=-\Delta z+C.$$

Положим, что поверхности уровня $z=z_0$ соответствует давление p_0, тогда получается:

$$p_0=-\Delta z_0+C.$$

Вычтя это выражение из предыдущаго, находим:

$$p=p_0+\Delta(z_0-z) \quad \dots\dots\dots\dots (10).$$

Если ось Z направлена вниз и если принять $z_0=0$, тогда

$$p=p_0+\Delta z \quad \dots\dots\dots\dots (10a).$$

Если ордината z_0 соответствует свободной поверхности MN (черт. 6), то ур. (10) показывает, что давление p в какой-либо точке жидкости равно давлению p_0 на свободной поверхности, сложенному с весом столба жидкости, у которого площадь поперечного сечения равна единице, а высота (z_0-z) равна глубине погружения рассматриваемой точки под свободною поверхностью. Отсюда видно, что давление, существующее на свободной поверхности, передается одинаково во все точки лежащие внутри жидкости; в этом заключается закон *Паскаля*.

Внешние силы имеют потенциал также тогда, когда жидкость, находясь под действием силы тяжести, равномерно вращается с угловою скоростью ω около вертикальной оси OZ (черт. 7). Здесь при $\rho=C$ поверхности уровня суть параболоиды вращения около оси Z; свободная поверхность MEN, как одна из поверхностей уровня, есть также поверхность параболоида вращения.

Если жидкость вращается равномерно около оси OZ и сверх того частицы притягиваются к центру O по закону Ньютона, т.-е. пропор-

ционально массе dm частицы и обратно пропорционально квадрату расстояния ее от O, то в этом случае при $\rho = C$ силы имеют потенциал; поверхности уровня суть поверхности сфероидов, сжатых по оси вращения; свободная поверхность представляет также поверхность сфероида. Земной шар находится в аналогичных условиях.

Два сообщающиеся сосуда. Рассмотрим случай двух сообщающихся сосудов ABC (черт. 8), в которых от A до B находится жидкость плотности ρ, а от B до C плотности ρ'. Точки A и C лежат на свободных поверхностях с давлением p_0, но так как они принадлежат жидкостям с разною плотностью, то расстояния их от плоскости XY различны и равны z_0 и z_0'. Определим ед. давление p в точке B, где жидкости соприкасаются. Так как эта точка принадлежит жидкости AB, то, сравнивая ее давление p с давлением p_0 в A, получим по уравнению (10):

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z_1).$$

Если ту же точку рассматривать как принадлежащую жидкости BC, то, выражая для нее давление через давление в C, находим по тому же уравнению:

$$p = p_0 + \rho' g (z'_0 - z_1).$$

Обозначая $(z_0 - z_1) = H$ и $(z_0' - z_1) = H'$, получаем:

$$\frac{H}{H'} = \frac{\rho'}{\rho}.$$

Итак, жидкости с разными плотностями располагаются над горизонтальною плоскостью BB' столбами, высоты которых обратно пропорциональны плотностям.

Манометр и вакуумметр. Пусть жидкость плотности ρ налита в трубку, изогнутую в виде буквы U (черт. 9); конец ее A сообщается с атмосферой, где давление p_0; другой конец трубки соединен с воздушным резервуаром, в котором давление равно $p_1 > p_0$.

Давление p_1 в B определится по уравн. (10):

$$p_1 = p_0 + \Delta (z_0 - z_1) = p_0 + \Delta H \quad \text{и} \quad p_1 - p_0 = \Delta H.$$

Следов., давление p_1 в резервуаре больше атмосферного на вес столба жидкости высотою H (случай манометра).

Если давление в резервуаре $p_1 < p_0$ (черт. 10), тогда получаем:

$$p_1 = p_0 + \Delta (z_0 - z_1) = p_0 - \Delta (z_1 - z_0) = p_0 - \Delta H.$$

Здесь давление в резервуаре меньше атмосферного на вес столба жидкости высотою H (случай вакуумметра).

§ 6. Давление жидкости на плоскую стенку. Центр давления. Частные случаи. Жидкость в каком-либо сосуде AB (черт. 11) производит давление на дно и стенки его. Для безконечно малой площадки ab равной $d\omega$ это давление выражается силой N нормальной к площадке и равной $pd\omega$, где p — ед. давление в точке c. Давление нормально к площадке, так как жидкость находится в равновесии, а потому сила трения $T = 0$. Силы N, рассматриваемые для всей стенки или для некоторой ее части, приводятся вообще к одной силе и к одной паре. Силы N приводятся к одной силе в случаях: 1) плоской стенки; 2) сферической стенки; 3) погруженной боковой поверхности твердого тела, плавающего в жидкости, и др. случаях. Эта равнодействующая сила наз. *давлением жидкости* на соответственную часть стенки; точка пересечения ее со стенкой наз. *центром давления*.

Рассмотрим *случай плоской стенки*. Определим давление жидкости на площадь $EF = \omega$ (черт. 12), расположенную в плоскости XY', составляющей с горизонтом $\angle \alpha$; пусть плоскость XY — свободная поверхность жидкости. Давление N жидкости на площадку $d\omega$, взятую внутри EF, равно $pd\omega$. Ось Z направлена вниз; плоскость XY совмещена со свободною поверхностью, поэтому $z_0 = 0$ и по уравнению (10) получим

$$p = p_0 + \Delta z.$$

Обыкновенно давление p_0, существующее на свободной поверхности, проявляется также и на внешней стороне боковой стенки (например, атмосферное давление) и потому для упрощения можно не вводить его в расчет, полагая условно $p_0 = 0$; тогда $p = \Delta z$.

Давление N на площадку $\Delta\omega$, расположенную вокруг точки A, равно

$$N = pd\omega = \Delta z d\omega.$$

По чертежу имеем для точки A $(x;\ y;\ z)$: $z = x \operatorname{Sin} \alpha$.

Так как все давления N параллельны между собою и направлены в одну сторону, то они приводятся к одной силе R, равной:

$$R = \Sigma N = \int p d\omega = \Delta \int z d\omega = \Delta \operatorname{Sin} \alpha \int x d\omega = \Delta x_1 \omega \operatorname{Sin} \alpha = \Delta z_1 \omega \quad . \quad . \ (11).$$

Здесь интегрирование распространяется на всю площадь EF; затем по чертежу:

$$z_1 = x_1 \operatorname{Sin} \alpha,$$

где x_1 расстояние центра тяжести $C\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$ площади EF от оси Y и z_1 — глубина погружения C под свободною поверхностью. Наибольшее давление для EF получится при $\operatorname{Sin} \alpha = 1$, т.-е. для вертикальной стенки.

Равенство (11) показывает, что давление на EF равно площади ее, умноженной на ед. давление, соответствующее центру тяжести. Следов., если EF будет принимать различные положения в жидкости, то давление на нее будет оставаться без перемены, если только не будет изменяться глубина погружения z_1 центра тяжести. Пересечение равнодействующей R с плоскостью EF есть *центр давления* D. Определим его положение; координаты его суть ξ; η; ζ. Возьмем моменты сил R и N относительно осей Y и X'; тогда

$$R\xi = \Sigma Nx = \triangle \int xzd\omega = \triangle \operatorname{Sin} \alpha \int x^2 d\omega.$$
$$R\eta = \Sigma Ny = \triangle \int yzd\omega = \triangle \operatorname{Sin} \alpha \int xyd\omega.$$

Здесь интегрирование нужно распространить на всю площадь EF. Подставляя сюда значение для R, находим;

$$\xi = \frac{1}{x_1\omega}\int x^2 d\omega; \qquad \eta = \frac{1}{x_1\omega}\int xyd\omega.$$

Затем имеем по чертежу: $\zeta = \xi \operatorname{Sin} \alpha = \frac{z_1\xi}{x_1}$.

Следоват., положение центра давления на плоскости $X'Y$ не зависит от угла α. Выражение

$$\int x^2 d\omega$$

представляет момент инерции площади EF относительно оси Y; из теоретической механики известно, что

$$\int x^2 d\omega = I + x_1^2\omega,$$

где I — *момент инерции* EF относительно оси ab параллельной Y и проходящей через центр тяжести C. Тогда получается

$$\xi = x_1 + \frac{I}{x_1\omega} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12).$$

Отсюда видно, что всегда $\xi > x_1$ или центр давления более удален от оси Y, чем центр тяжести. С удалением площади EF от свободной поверхности центр давления приближается к центру тяжести. Величина

$$\int xyd\omega$$

наз. центробежным моментом инерции; эта величина, а также и момент инерции I, вычисляются по известной фигуре EF. Из выражений для ξ и η видно, что, если плоскость $X'Y$ вращать около оси Y вместе с находящеюся на ней фигурою EF, т.-е. изменять угол α, то центр давления для EF не изменится, хотя давление R и будет изменяться.

Давление R можно представить весом известного об'ема жидкости. Действительно, если для каждой площадки $\Delta\omega$ ординату $z = cd$

(черт. 13) отложить по нормали к плоскости $X'Y$ в виде отрезка $oe = cd$, то все точки, подобные точке e, будут лежать на некоторой поверхности EF', и, очевидно, вес жидкости, заключенной в об'еме $EFE'F'$, будет равен давлению R по величине и по положению (черт. 14). Вес этого об'ема, взятый по нормали к плоскости $X'Y$, пересечет площадь EF в центре давления S. Поверхность $E'F'$ есть плоскость, так как ее уравнение, отнесенное к осям $X'YZ'$, имеет вид:

$$-z' = x \operatorname{Sin} \alpha \quad \text{или} \quad x \operatorname{Sin} \alpha + z' = 0.$$

Это уравнение плоскости проходящей через ось Y. Если EF расположена в вертикальной плоскости, то плоскость $E'F'$ составляет с горизонтом $\angle 45°$. Таким образом давление R на прямоугольник $ABDE$ (черт. 15 и 16), имеющий высоту $AE = H$ и длину $AB = L$, равно весу призмы, основание которой равно $\triangle AEF'$ (где $EF = EF'$), а высота равна длине $AB = L$. Следовательно,

$$R = \triangle \frac{1}{2} H . H \operatorname{Sin} \alpha . \ L = \frac{1}{2} \triangle H^2 L \operatorname{Sin} \alpha.$$

Очевидно, R проходит через центр тяжести призмы $ABDEFG$; тогда центр давления S отстоит от оси Y на расстояние $aS = \frac{2}{3} H$.

Давление на прямоугольник $MNDE$ (черт. 17) высотою $ME = H$ и длиною $DE = L$ равно весу призмы, основание которой равно трапеции $MEF'Q$, а высота равна DE. Обозначим $AM = e$ и $AE = d$, тогда

$$R = \triangle . \frac{1}{2} (d \operatorname{Sin} \alpha + e \operatorname{Sin} \alpha) H . L = \frac{1}{2} \triangle (d + e) HL \operatorname{Sin} \alpha =$$
$$= \frac{1}{2} \triangle (d^2 - e^2) L \operatorname{Sin} \alpha.$$

Так как прямоугольник $MNDE$ можно рассматривать как разность прямоугольников $ABDE$ и $ABNM$, то поэтому давление R на первый из них равно разности давлений: на второй R' и на третий R''. Но по только что найденному:

$$R' = \frac{1}{2} \triangle d^2 L \operatorname{Sin} \alpha, \qquad R'' = \frac{1}{2} \triangle e^2 L \operatorname{Sin} \alpha.$$

Следовательно:

$$R = R' - R'' = \frac{1}{2} \triangle (d^2 - e^2) L \operatorname{Sin} \alpha.$$

Давление R' представляется весом призмы, основание которой треугольник AQM и длина L, а давление R'' — весом призмы, основание которой треугольник $AF''E$ и длина L. Разность их дает призму, основание которой трапеция $MQF''E$ и длина L.

Случай давления воды на площадь с двух сторон. Определим давление R на площадь $EF = \omega$, лежащую в плоскости $X'Y$, которая составляет угол α с горизонтом, для случая, когда на эту площадь жидкость давит с двух сторон (черт. 18). Разность горизонтов воды равна c и $OO_1 = e$.

Давление R' на EF от жидкости, лежащей справа:

$$R' = \Delta \omega x_1' \operatorname{Sin} \alpha; \text{ где } x_1' = CO.$$

Давление R'' на EF от жидкости, лежащей слева:

$$R'' = \Delta \omega x_1'' \operatorname{Sin} \alpha, \text{ где } x_1'' = CO_1.$$

Тогда полное давление R равно:

$$R = R' - R'' = \Delta \omega (x_1' - x_1'') \operatorname{Sin} \alpha = \Delta \omega . \ OO_1 . \operatorname{Sin} \alpha = \Delta \omega c.$$

Давление R' представляется весом жидкости в усеченном цилиндре $EFE'F'$, а давление R'' — весом жидкости в усеченном цилиндре $EFE''F''$. Если отложить $EE'' = EE'''$ и $FF'' = FF'''$, то давление R представится весом жидкости в цилиндре $E'F'E'''F'''$.

Для центра давления S' жидкости лежащей справа имеем:

$$OS' = \xi' = x_1' + \frac{I}{x_1' \omega}.$$

Для центра давления S'' жидкости лежащей слева получаем:

$$O_1 S'' = \xi'' = x_1'' + \frac{I}{x_1'' \omega}.$$

Здесь I — момент инерции EF относительно оси параллельной OY и проходящей через центр тяжести C. Найдем положение центра давления S. Момент равнодействующей R относительно оси OY равен сумме моментов составляющих R' R'' относительно той же оси; тогда получаем:

$$R\xi = R'\xi' - R''(\xi'' + e)$$

здесь $\xi = SO$ расстояние центра давления S от оси OY. Подставляя сюда значения для ξ' и ξ'', имеем:

$$R\xi = (R' - R'') x_1' + \frac{I}{\omega} \left(\frac{R'}{x_1'} - \frac{R''}{x_1''} \right)$$

Так как

$$\frac{R'}{x_1'} = \frac{R''}{x_1''} = \Delta \omega \operatorname{Sin} \alpha$$

то последний член предыдущего равенства равен нулю, следов. $\xi = x_1'$, т.-е. центр давления совпадает с центром тяжести. Найденные результаты справедливы только в том случае, когда жидкость действует с двух сторон на *всю* площадь EF. Не трудно решить подобную задачу в том случае, когда жидкость справа давит на всю площадь, а жид-

кость слева — только на часть ее, т.-е. когда горизонт O_1X_1 лежит ниже точки E.

Случай составной площади. Покажем, как определяется давление и центр давления для составной площади. Если заданная площадь может быть разбита на простые площади (прямоугольники, треугольники и т. п.) или может быть рассматриваема как разность простых площадей (круговое кольцо, разность двух секторов, двух сегментов и т. п.). то давление и центр давления можно определить следующим способом, Положим, данную площадь можно разбить (черт. 19) на 2 площади E_1F_1; E_2F_1, для которых C_1; C_2 суть центры тяжести а S_1; S_2 — центры давлений. Давление для каждой из этих площадей определяется по формулам:

$$r_1 = \Delta x_1 \omega_1 \operatorname{Sin} \alpha; \quad r_2 = \Delta x_2 \omega_2 \operatorname{Sin} \alpha.$$

Следоват. все давление R равно:

$$R = r_1 + r_2 = \Delta \operatorname{Sin} \alpha \, (x_1\omega_1 + x_2\omega_2) = \Delta x_0 \Omega \operatorname{Sin} \alpha$$

где Ω площадь всей фигуры E_1F_2 и x_0 расстояние центра тяжести ее C_0. Так как по чертежу: $z_0 = x_0 \operatorname{Sin} \alpha$, то

$$R = \Delta z_0 \Omega.$$

Следов. давление для составной площади выражается так же как и для простой. Координаты ξ_0; η_0 центра давления S_0 для всей площади определим, взяв сумму моментов давлений r_1;r_2 относительно осей X и Y и приравняв ее моменту R относительно тех же осей; тогда получаем:

$$R\xi_0 = r_1\xi_1 + r_2\xi_2; \quad R\eta_0 = r_1\eta_1 + r_2\eta_2.$$

Глубину погружения ζ_0 центра давления S_0 найдем по чертежу:

$$\zeta_0 = \xi_0 \cdot \operatorname{Sin} \alpha.$$

Если составная площадь может быть рассматриваема как разность, то вычитаемые площади ω и соответственные давления r нужно брать со знаком минус. Как и в случае простой фигуры давление R для составной площади можно представить весом цилиндра, основание которого равно площади E_1E_2, а производящие перпендикулярны к плоскости $X'Y$; сверху этот цилиндр ограничен наклонною плоскостью, проходящею через ось Y.

§ 7. Частные случаи определения давления и центра давления для простых и составных площадей.

Прямоугольник и параллелограм. Рассмотрим прямоугольник AB и параллелограм $A'B'$ (черт. 20), основания которых лежат на свободной

поверхности и равны a, а высота равна h; все рассуждения и результаты вычислений для той и другой площади тожественны. Так как для прямоугольника момент инерции

$$I = \frac{ah^3}{12}$$

то для R и абсциссы ξ получаем:

$$R = \Delta x_1 \omega \operatorname{Sin} \alpha = \frac{1}{2} \Delta a h^2 \operatorname{Sin} \alpha; \quad \xi = x_1 + \frac{I}{x_1 \omega} = \frac{1}{2} h + \frac{1}{6} h = \frac{2}{3} h.$$

Ординату η нет надобности определять, так как центр давления S лежит на линии uv, делящей пополам линии AF и BE. В самом деле, если разбить площадь AB линиями параллельными основанию на бесконечно малые площадки $mn = d\omega$, то глубина погружения всех точек этой площадки одна и та же, следов. ед. давление p одинаково; давление на всю площадку равно $pd\omega$ и приложено на середине линии mn. Давление на прочие элементарные площадки приложены также на середине полосок, т.-е. по линии uv; поэтому точка приложения их равнодействующей R, т.-е. центр давления, лежит также на uv.

Если прямоугольник или параллелограм имеют (черт. 21) основание a в расстоянии e от свободной поверхности, то получим:

$$R = \frac{1}{2} \Delta a h (h + 2e) \operatorname{Sin} \alpha; \quad \xi = e + \frac{h}{3} \cdot \frac{2h + e}{h + 2e}.$$

Можно этим выражениям придать другой вид, положив $d = h + e$, тогда, исключив h из предыдущих выражений, получим:

$$R = \frac{1}{2} \Delta a (d^2 - e^2) \operatorname{Sin} \alpha; \quad \xi = \frac{2}{3} \frac{d^3 - e^3}{d^2 - e^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (a)$$

Центр давления S лежит на линии, делящей пополам стороны a.

Треугольник. Рассмотрим треугольник, основание которого a (черт. 22) лежит на свободной поверхности, а высота равна h. Для треугольника момент инерции

$$I = \frac{1}{36} a h^3;$$

тогда для R и ξ получаем:

$$R = \frac{1}{6} \Delta a h^2 \operatorname{Sin} \alpha; \quad \xi = \frac{1}{2} h.$$

Ординату η центра давления не нужно определять, так как легко видеть, что центр давления S лежит на линии AB, соединяющей вершину A со серединой основания; в этом убеждаемся рассуждением как для прямоугольника.

Если основание треугольника, параллельное свободной поверхности, лежит в расстоянии e от оси Y (черт. 22 a), т.-е. от свободной поверхности, то получаем:

$$R = \frac{1}{6}\Delta ah(h + 3e)\,\mathrm{Sin}\,\alpha;\ \xi = e + \frac{h}{2}\frac{h + 2e}{h + 3e}.$$

Центр давления S лежит на линии AB соединяющей вершину A со серединой основания a.

Круг, круговое кольцо и эллипс. Для *круга* радиусом r (черт. 23), касающагося свободной поверхности, находим, имея в виду, что для него момент инерции $I = \frac{1}{4}\pi r^4$:

$$R = \Delta\pi r^3\,\mathrm{Sin}\,\alpha;\quad \xi = \frac{5}{4}r_1.$$

Если же *круг* лежит в расстоянии e от свободной поверхности, то получается:

$$R = \Delta\pi r^2(r + e)\,\mathrm{Sin}\,\alpha;\quad \xi = r + e + \frac{r^2}{4(r + e)}.$$

Ординату η для того и другого случая вычислять не нужно, так как очевидно центр давления S лежит на диаметре, перпендикулярном к оси Y.

Если определяется давление на *круговое кольцо*, наружный диаметр которого r_1, а внутренний r_2, то в случае, когда кольцо касается свободной поверхности, получится:

$$I = \frac{1}{4}\pi(r_1{}^4 - r_2{}^4);\ R = \Delta\pi(r_1{}^3 - r_1 r_2{}^2)\,\mathrm{Sin}\,\alpha;\ \xi = \frac{5r_1{}^2 + r_2{}^2}{4r_1}.$$

Когда *кольцо* лежит в расстоянии e от свободной поверхности, то найдем:

$$R = \Delta\pi(r_1{}^2 - r_2{}^2)(r_1 + e)\,\mathrm{Sin}\,\alpha;\ \xi = \frac{4(r + e)^2 + (r_1{}^2 + r_2{}^2)}{4(r_1 + e)}.$$

Для *эллипса*, полуоси которого суть a и b (черт. 24), касающагося свободной поверхности полуосью a, имеем:

$$\omega = \pi ab;\ I = \frac{1}{4}\pi a^3 b;\ R = \Delta\pi a^2 b\,\mathrm{Sin}\,\alpha;\ \xi = \frac{5}{4}a.$$

Если эллипс лежит полуосью a в расстоянии e от свободной поверхности, то получается:

$$R = \Delta\pi ab(a + e)\,\mathrm{Sin}\,\alpha;\ \xi = a + e + \frac{a^2}{4(a + e)}.$$

Центр давления лежит в обоих случаях на оси перпендикулярной к Y.

Деление прямоугольника на несколько прямоугольников равного давления. При расчете шлюзных ворот необходимо решать следующую задачу.

Разделить на n частей прямоугольник $ABA'B'$ (черт. 25), основание которого лежит на свободной поверхности и равно a и высота AA' равна H, так, чтобы на каждую часть приходилось одинаковое давление, и найти для каждой части расстояние центра давления от оси Y. Пусть линии a_1b_1; a_2b_2... делят прямоугольник на требуемые части; назовем расстояние их от Y через h_1; h_2...; требуется определить величину их. Рассмотрим сперва часть ABa_1b_1, затем ABa_2b_2 и т. д.; пусть давление на весь прямоугольник равно R; тогда для i частей, вместе взятых, давление равно $i\cdot\frac{R}{n}\cdot$ Так как давление R на площадь $ABA'B'$ равно

$$R=\frac{1}{2}\Delta aH^2\operatorname{Sin}\alpha$$

то давление для i частей, вместе взятых и образующих прямоугольник ABa_ib_i, равно:

$$i\cdot\frac{R}{n}=\frac{i}{2n}\Delta a\,H^2\operatorname{Sin}\alpha.$$

С другой стороны для того же прямоугольника, в котором $Aa_i=h_i$, давление определяется по общей формуле

$$i\cdot\frac{R}{n}=\frac{1}{2}\Delta ah_i{}^2\operatorname{Sin}\alpha.$$

Из сравнения этих выражений получается

$$h_i=H\sqrt{\frac{i}{n}}\cdot$$

Величины h_i удобно определять графически следующим способом. На стороне $AA'=H$ (черт. 26) как на диаметре опишем окружность; затем разделим AA' на n равных частей и из точек деления восставим перпендикуляры до пересечения с окружностью, тогда хорды $Aa_1=h_1$; $Aa_2=h_2$....

В самом деле из $\Delta AA'a_i$ имеем:

$$AA':Aa_i=Aa_i:Aa_i'.$$

Отсюда $(Aa_i)^2=AA'.Aa_i'=H.\frac{i}{n}H;\quad Aa_i=H\sqrt{\frac{i}{n}}=h_i.$

Расстояния ξ центров давления для отдельных прямоугольников ABa_1b_1; $a_1b_1a_2b_2$... можно определить по форм. (a); так для прямоугольника $a_{i-1}\,b_{i-1}\,a_ib_i$ находим, полагая в этой формуле $d=h_i$ и $e=h_{i-1}$:

$$\xi_i=\frac{2}{3}\cdot\frac{h^3{}_i-h^3{}_{i-1}}{h^2{}_i-h^2{}_{i-1}}.$$

Подставляя сюда значения для h_i и h_{i-1}, получаем

$$\xi_i = \frac{2}{3} H \cdot \frac{\sqrt{i^3} - \sqrt{(i-1)^3}}{\sqrt{n}}.$$

На расстояниях ξ_1; ξ_2 . . . ставятся ригели шлюзных ворот, т.-е. брусья, принимающие давление воды, приходящееся на каждый прямоугольник. Таким образом в этом случае ригели располагаются на разных расстояниях друг от друга; чем дальше ригели от свободной поверхности, тем ближе ставятся они друг к другу; на каждый ригель приходится одно и то же давление; поэтому поперечные размеры их будут одинаковы. Если ригели располагать на равных расстояниях друг от друга, то давления на них, а следоват. и размеры их, будут разные.

§ 8. Определение давления на поверхность. Мы не будем определять давление жидкости на поверхность в самом общем случае, а ограничимся выводом формул для простейших случаев. В основание выводов положены две следующие теоремы.

Теорема первая. Ед. давление p для какой-либо бесконечно малой площадки $d\omega$ поверхности EF равно давлению N для площадки, деленному на $d\omega$; оно также равно давлению N_e, деленному на площадку $d\omega_e$, где N_e — проекция N на любую ось e и $d\omega_e$ — проекция $d\omega$ на плоскость перпендикулярную к оси e. Если за ось e последовательно брать оси $X; Y; Z$ и обозначить проекции давления через $N_x; N_y; N_z$, а проекции $d\omega$ на плоскости перпендикулярные к $X; Y; Z$ через $d\omega_x$; $d\omega_y$; $d\omega_z$, то эта теорема заключается в следующем равенстве:

$$p = \frac{N}{d\omega} = \pm \frac{N_x}{d\omega_x} = \pm \frac{N_y}{d\omega_y} = \pm \frac{N_z}{d\omega_z} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (a).$$

На поверхности EF (черт. 27) возьмем вокруг точки A бесконечно малую площадку $d\omega$, на которую давление N жидкости действует по внешней нормали n в точке A. Пусть p — ед. давление в точке A; тогда $N = p d\omega$. Далее обозначим через $\alpha; \beta; \gamma$ углы, составляемые нормалью n с координатными осями; углы, образуемые касательною плоскостью в A к поверхности с координатными плоскостями, равны означенным углам или составляют дополнение их до 180°. Тогда взяв знак + при угле остром и знак — при угле тупом, получим:

$$d\omega_x = \pm d\omega . \operatorname{Cos} \alpha \quad d\omega_y = \pm d\omega . \operatorname{Cos} \beta \quad d\omega_z = \pm d\omega . \operatorname{Cos} \gamma.$$

Проекции давления суть:

$$N_x = N \operatorname{Cos} (Nx) = N \operatorname{Cos} \alpha; \; N_y = N \operatorname{Cos} (Ny) = N \operatorname{Cos} \beta;$$
$$N_z = N \operatorname{Cos} (Nz) = N \operatorname{Cos} \gamma.$$

Разделив почленно последние три равенства на предыдущие три равенства, получим равен. (a) и теорема доказана. Из равен. (a) находим: $N_x = \mp p d\omega_x$; $N_y = \pm p d\omega_y$; $N_z = \pm p d\omega_z$ . . . . (b).

Теорема вторая. На основании доказанной теоремы можно определить проекции давлений для всей поверхности EF (черт. 28). Разобьем эту поверхность на бесконечно малые площадки; давление N на одну из этих площадок, равное $pd\omega$, разложим на составляющие N_x;N_y;N_z; то же самое сделаем с давлениями для прочих площадок. Тогда суммы проекций давлений N на всю поверхность суть:

$$\Sigma N_x;\ \Sigma N_y;\ \Sigma N_z$$

где знак Σ распространяется на все площадки. Так как $p = p_0 + \Delta(z_0 - z)$ то на основании равен. (b) имеем:

$$\Sigma N_x = \int p d\omega_x = \int \{p_0 + \Delta(z_0 - z)\} d\omega_x = \{p_0 + \Delta(z_0 - z_1)\} \omega_x.$$

Здесь интегрирование нужно распространить на всю площадь $\omega_x = E_1F_1$, представляющую проекцию EF на плоскость YZ. Величина $zd\omega_x$ представляет статический момент площадки $d\omega_x$ относительно оси Y; если C_1 центр тяжести площади E_1F_1 и z_1 ордината его, то

$$\int z d\omega_x = z_1\omega_x.$$

Обозначим расстояние C_1 до свободной поверхности $X'Y'$ равное $(z_0 - z_1)$ через h_1, тогда окончательно

$$\Sigma N_x = (p_0 + \Delta h_1)\omega_x \quad . . . . (a)$$

Подобным же образом выведем:

$$\Sigma N_y = \int p d\omega_y = \{p_0 + \Delta(z_0 - z_2)\} \omega_y = (p_0 + \Delta h_2)\omega_y \quad . . . . (b)$$

Здесь интегрирование распространяется на площадь $\omega_y = E_2F_2$, представляющую собою проекцию поверхности EF на плоскость XZ; z_2 — ордината центра тяжести C_2 площади E_2F_2 и h_2 расстояние его до свободной поверхности. Также получим:

$$\Sigma N_z = \int p d\omega_z = p_0\omega_z + \Delta\int (z_0 - z) d\omega_z$$

где $\omega_z = E_3F_3 = E_4F_4$ представляет проекцию поверхности EF на плоскость XY или ей параллельную; подинтегральное количество $(z_0 - z)d\omega_z$ представляет об'ем элементарного цилиндра, поперечное сечение которого равно $d\omega_z$, а высота равна глубине погружения точки A под свободною поверхностью. Тогда интеграл

$$\Delta\int (z_0 - z) d\omega_z = G$$

распространенный на всю площадь ω_z представляет вес жидкости G, заключенной в цилиндре EFE_4F_4, проектирующем поверхность EF на свободную поверхность $X'Y'$; следоват.

$$\Sigma N_z = p_0\omega_z + G \quad . . . . (c).$$

В равенствах $(a;b;c)$ заключается вторая теорема. Если не принимать во внимание давление p_0 на свободной поверхности, то найдем:

$$\Sigma N_x = \Delta h_1 \omega_x;\quad \Sigma N_y = \Delta h_2 \omega_y;\quad \Sigma N_z = G \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (d).$$

Эти равенства можно формулировать так: проекции давлений на поверхность EF равны весу жидкости в трех цилиндрах, проектирующих эту поверхность на плоскости XZ, YZ и на свободную поверхность $X'Y'$, при чем высоты первых двух цилиндров равны h_1 и h_2. В частности, когда основание одного из проектирующих цилиндров обращается в кривую линию, то площадь этого основания нуль, и тогда соответственная сумма проекций давлений также нуль. Напр., если определяется давление на часть боковой цилиндрической поверхности, то при производящих параллельных оси Z получается $\omega_z = 0$ и $G = 0$, а следов. $\Sigma N_z = 0$; при производящих параллельных оси Y имеем $\omega_y = 0$ и $\Sigma N_y = 0$.

Если обозначить через $M_x;M_y;M_z$ суммы моментов всех давлений относительно координатных осей, то условие, что все давления приводятся к одной силе R, выражается так:

$$M_x \Sigma N_x + M_y \Sigma N_y + M_z \Sigma N_z = 0.$$

Когда все давления приводятся к силе R, то можно определить координаты точки S пересечения R с поверхностью EF; эта точка называется центром давления.

§ 9. Давление на поверхность тела, погруженного в жидкость. Закон Архимеда. Основываясь на первой теореме § 8, докажем, что составляющие ΣN_x и ΣN_y давлений жидкости равны нулю для боковой поверхности тела, погруженного в жидкость. Тело, погруженное в жидкость, разбиваем горизонтальными плоскостями mn; $m'n'$ (черт. 29) (где $X'Y'$ — свободная поверхность) на бесконечно тонкие слои, которые в свою очередь разделяем на элементарные призмы плоскостями параллельными плоскости YZ. Рассмотрим давление N и N' жидкости на основания $d\omega$ и $d\omega'$ одной из этих призм qr; ед. давление p для этих оснований равны между собою, так как центры тяжести площадок лежат в одинаковом расстоянии от свободной поверхности. Проекции оснований на плоскость XZ равны $d\omega_y$; тогда $N_y = N_y' = pd\omega_y$, а так как эти проекции одна направляется по оси Y, а другая в обратном направлении, то поэтому $N_y' + N_y' = 0$. Тот же вывод получим, рассматривая прочие призмы параллельные оси Y, на которые разбивается рассматриваемое тело. Разбиваем затем элементарный слой $mn\,m'n'$ черт. 30) плоскостями параллельными плоскости XZ на бесконечно

тонкие призмы uv; тогда давления N'' и N''' на основания каждой призмы имеют проекции N_x'' и N_x''' по величине равные, а по направлению противоположные, а потому $N_x''+N_x'''=0$; то же самое докажем для прочих элементарных призм параллельных оси X. Итак для всей боковой поверхности тела:

$$\Sigma N_x = 0; \quad \Sigma N_y = 0.$$

Определим теперь выражение для ΣN_z в случае, когда тело вполне погружено в жидкость (черт. 31). Разбиваем тело на бесконечно тонкие призмы плоскостями параллельными плоскостям XZ и YZ. На основания одной из таких призм st действуют давления N^{IV} и N^{V}, составляющие которых равны

$$N_z^{\text{IV}} = p' d\omega_z; \quad N_z^{\text{V}} = p'' d\omega_z$$

где p' и p'' ед. давления в каких-либо точках A и B площадок s и t; если z' и z'' ординаты этих точек, то

$$p' = p_0 + \Delta(z_0 - z'); \quad p'' = p_0 + \Delta(z_0 - z'').$$

Эти составляющие направляются во внутрь тела и потому противоположны, а следоват. сумма их равна:

$$N_z^{\text{IV}} + N_z^{\text{V}} = p' d\omega_z - p'' d\omega_z = \Delta(z'' - z') d\omega_z.$$

т.-е. весу жидкости в элементарной призме st. Рассуждая подобным образом относительно прочих элементарных призм, находим для всей боковой поверхности тела:

$$\Sigma N_z = \Delta \int (z'' - z') d\omega_z = G,$$

т.-е. весу жидкости, заключенной в об'еме тела. Сумма этих проекций положительна, следов., ΣN_z направляется снизу вверх. Если тело не вполне погружено в жидкость и свободная поверхность $X''Y''$ (черт. 31) рассекает тело по RS, то рассуждая по предыдущему, находим:

$$N_z^{\text{IV}} = p' d\omega_z; \quad N_z^{\text{V}} = p'' d\omega_z$$

где $$p' = p_0 + \Delta(z_0' - z); \quad p'' = p_0$$

здесь z_0' ордината свободной поверхности $X'Y'$. Следоват.

$$N_z^{\text{IV}} + N_z^{\text{V}} = \Delta(z_0' - z) d\omega_z$$

т.-е. весу жидкости в элементарной призме tt'. Для всей боковой поверхности, находящейся в жидкости, получается:

$$\Sigma N_z = \Delta \int (z_0' - z) d\omega_z = G'$$

т.-е. весу жидкости, вытесненной тою частью тела, которая погружена в жидкость.

Если тело погружено в жидкость вполне, то на него действуют две силы: вес самого тела G_0 и составляющая давлений $\Sigma N_z = G =$ весу

воды в об'еме тела; обе силы приложены к центру тяжести тела C_0 и действуют в противоположные стороны.

Равнодействующая их $R = G_0 - G$ направлена вертикально вниз. Отсюда следует *закон Архимеда*: тело, находящееся в воде, теряет в своем весе столько, сколько весит вытесненный телом об'ем жидкости.

Если тело погружено в жидкость только частью, то на него действуют две силы: вес тела G_0, приложенный к центру тяжести тела C_0 и составляющая давлений $\Sigma N_2 = G' =$ весу воды вытесненной погруженною частью тела; она приложена к центру тяжести C_0' той части об'ема тела, которая погружена в жидкость. Равнодействующая их $R' = G_0 - G'$ направлена вертикально вниз; закон Архимеда остается и здесь справедливым.

Если в сосуде A (черт. 32 и 33) находится жидкость, то давление ее на горизонтальное дно сосуда $N = \Delta H \Omega$, где Ω площадь дна и H глубина погружения дна; это давление равно весу воды в цилиндре, основание которого Ω, а высота H; для черт. 32 этот цилиндр есть $abcd$, а для чертежа 33 есть $a'b'c'd'$; в первом случае—давление больше веса жидкости в сосуде, а во втором—меньше; в этом заключается *гидростатический парадокс*. Взвешиванием получим, очевидно, вес всей жидкости + вес сосуда.

Нетрудно доказать, что вертикальное давление жидкости на боковую поверхность сосуда, включая и дно, равно весу всей жидкости, т.-е. результату, который получается взвешиванием. Давление жидкости на вертикальные стенки $aebh$ и $ff'gg'$ (черт. 32) будут горизонтальными; для каждой из этих стенок равнодействующая давлений равна 0 [1]). Что касается наклонных стенок ef и hg, то давление S на площадку $d\omega$ разлагаем на вертикальную составляющую S_2 и горизонтальную S_1; все горизонтальные составляющие в сумме равны 0 [2]). Составляющая S_2 равна весу жидкости в элементарном цилиндре, основание которого $m = d\Omega$ равно проекции $d\omega$ на плоскость cd, а высота равна h расстоянию $d\omega$ от cd; следоват., $S_2 = \Delta h d\Omega$; для всей стенки $efgh$ получим равнодействующую:

$$\Sigma S_2 = \Delta \int h d\Omega,$$

что равно весу жидкости в об'еме $ecf'fhdg'g$; эта сила направлена по вертикали вверх. Итак, давление жидкости на стенки сосуда приводится к двум силам: на дно вертикально вниз действует сила $= \Delta \Omega H$, а на наклонные стенки вертикально вверх сила равная весу жидкости в во-

[1]) Эти силы распирают стенки.

[2]) Эти силы также распирают стенки и вызывают продольное сжатие стенок.

ображаемом сосуде $ecf'fhdg'g$. В результате получается сила направленная вниз и равная весу воды в сосуде. Если рассматривать сосуд на черт. 33, то найдем, что суммы проекций горизонтальных составляющих S_1 и S_1' будут равны 0; сумма составляющих S_2 и S_2' представится весом жидкости в об'еме $efec'ghdd'$; эта сила действует вертикально вниз. На дно сосуда по тому же направлению действует вес жидкости $a'b'c'd'$; в результате получается для всего сосуда давление вниз по вертикали равное весу жидкости в сосуде. Эти рассуждения можно применить к сосудам какой угодно формы.

Определение толщины цилиндрических и сферических стенок сосудов. Рассмотрим цилиндрический сосуд кругового поперечного сечения (черт. 34); проведем два смежные горизонтальные сечения mm и nn; получим цилиндрическое кольцо высотою dz. Давление жидкости на бесконечно малую площадку этого кольца равно $N = pd\omega = \Delta z d\omega$. Найдем по второй теореме § 8 сумму проекций ΣN_x на полукольцо abc Проекция abc на плоскость ZOY равна $d\omega_x = dz . D$; расстояние ее от свободной поверхности равно z; следоват.

$$\Sigma N_x = \Delta z D . dz$$

где D — внутренний диаметр цилиндра. Для полукольца adc сумма $\Sigma N_x' = \Sigma N_x$. Следоват., кольцо растягивается 2 равными горизонтальными силами ΣN_x. Рассечем это кольцо пополам вертикальною плоскостью AA и рассмотрим левую половину; тогда в поперечных сечениях a и c будут приложены усилия равные $\frac{1}{2}\Sigma N_x$, растягивающие эти сечения, которые равны $\delta . dz$, где δ толщина стенки кольца. Для прочности необходимо, чтобы было выполнено условие:

$$\frac{\frac{1}{2}\Sigma N_x}{\delta . dz} \lesseqgtr R_1 \quad \text{или} \quad \frac{\Delta z . D . dz}{2 . \delta . dz} \lesseqgtr R_1$$

где R_1 — прочное сопротивление растяжению материала стенки. Отсюда получается искомая толщина

$$\delta \gtreqless \frac{\Delta z . D}{2R_1} = \frac{pD}{2R_1} \quad \dots\dots\dots\dots (a)$$

Если цилиндр имеет одну и ту же толщину по всей высоте, то ее нужно определить для наибольшего $z = H$; тогда

$$\delta \gtreqless \frac{\Delta H . D}{2R_1}.$$

Если же цилиндр по высоте составляется из колец разной толщины δ_1; $\delta_2 \dots$, соответствующим глубинам H_1; $H_2 \dots$ нижней грани кольца, то

$$\delta_1 \gtreqless \frac{\Delta H_1 D}{2R_1}; \quad \delta_2 \gtreqless \frac{\Delta H_2 D}{2R_1}.$$

В действительности эти величины надо брать больше получаемого по формулам, так как при большом диаметре сосуда каждое кольцо надо составлять из отдельных листов склепываемых между собою; очевидно, эти листы будут ослабляться отверстиями заклепок; затем металлистов может портиться (железо ржавеет). Поэтому толщину листов надо определять по формуле:

$$\delta \gtreqless \frac{\beta.\Delta H.D}{2R_1} + a \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b)$$

где для железных листов: коеф. $\beta = 1,3$ учитывает ослабление листов заклепками (приблизительно на 30%) и коеф. $a = 0,2$ дюйм. $= 5$ мм. учитывает ослабление от ржавчины. Найденное значение нужно округлить до ближайшего большего числа в целых милиметрах.

Для *чугунных водопроводных труб* толщина стенок определяется по наибольшему рабочему давлению, обыкновенно не более 10 атмосфер, и по прочному сопротивлению чугуна растяжению $R_1 = 260$ килогр. на кв. сант. Так как давлению в 10 атмосфер. соответствует высота водяного столба H равная 10.10,33 метра, то получаем при $\Delta = 1000$ килогр.

$$\delta = \frac{\Delta HD}{2R_1} = \frac{1000.10.10{,}33\,D}{2.260.100^2} = 0{,}02\,D.$$

По сортаменту, установленному V русским водопроводным с'ездом, толщина стенок чугунных водопроводных труб определяется по формуле:

$$\delta = 0{,}02\,D + a \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (c)$$

где $a = 6,5$ мм. для труб диаметром меньше 300 мм. и $a = 6$ мм. для труб бо̀льших диаметров. Эта прибавка делается на несовершенство отливки, на ржавление металла и на удары при перевозке и укладке труб.

Пусть сосуд (бак или резервуар) состоит из верхней части цилиндрической и нижней—*полусферы* радиуса r (черт. 35). Все давления жидкости на сферическую поверхность проходят через центр сферы и дают одну равнодействующую равную вертикальной силе ΣN_2, которая равна весу воды G в сосуде, где

$$G = \Delta\left\{\pi r^2 (H_0 - r) + \frac{2}{3}\pi r^3\right\}.$$

Ед. давление для сферической части будет наибольшим в самой пониженной точке a и равно $p = \Delta H_0$. Если провести горизонтальное сечение mm, то в этом сечении проявляются растягивающие силы S, так как полусфера под действием веса G стремится оторваться от цилиндрической части.

Эти силы S распределяются по площади $2\pi r.\delta$, где δ толщина стенок сферы. Для прочности необходимо выполнение условия:

$$\frac{G}{2\pi r.\delta} \lesseqgtr R_1 \quad \text{или} \quad \frac{\Delta\left\{\pi r^2(H_0-r)+\frac{2}{3}\pi r^3\right\}}{2\pi r.\delta} \lesseqgtr R_1.$$

Если глубина H_0 довольно велика сравнительно с r, то в числителе можно (H_0-r) принять за H_0, а весом воды в полусфере можно пренебречь; тогда находим:

$$\delta \gtreqless \frac{\Delta H_0 r}{2R_1} = \frac{pr}{2R_1} \cdots\cdots\cdots\cdots (d)$$

Здесь R_1 прочное сопротивление материала растяжению. Отсюда видно, что при одном и том же H толщина сферической стенки в *два* раза тоньше цилиндрической. По тем же основаниям, как для цилиндрической стенки, нужно вычисленную величину δ увеличить и брать е по формуле:

$$\delta = \frac{\beta\,\Delta H_0 r}{2R_1} + \alpha \cdots\cdots\cdots\cdots (e)$$

где для железных листов можно принимать $\alpha = 0{,}2$ дюйма $= 5$ мм. и $\beta = 1{,}3$. Найденное значение нужно округлить до ближайшего большего числа в целых милиметрах.

Если цилиндрический бак высотою H и диаметром D имеет *сферическое дно* со стрелкой f и радиусом r (черт. 36), то толщину этого дна можно определить подобным же образом. На дно действует вес воды в баке равный

$$G = \Delta W = \Delta\left\{\frac{1}{4}\pi D^2.H + \pi f^2\left(r - \frac{1}{3}f\right)\right\}$$

Под действием этого веса дно стремится оторваться от цилиндра.

Поэтому в месте соединения дна с цилиндром со стороны цилиндра проявляются вертикальные силы ΣN_z действующие вверх и распределенные равномерно по окружности диаметра D. Очевидно

$$\Sigma N_z = G = \Delta W.$$

Если в каждой точке окружности AA разложить силы ΣN_z на горизонтальные и по касательным к сфере, то эти последние силы ΣQ будут растягивать листы дна в том месте, где они соединяются с цилиндром. Из чертежа видно, что

$$\Sigma Q = \frac{\Sigma N_z}{\cos\beta}; \quad \text{но} \quad \cos\beta = \frac{D}{2r}; \quad \text{следоват.} \quad \Sigma Q = \frac{2r}{D}\Sigma N_z.$$

По условию прочности означенных листов необходимо, чтобы

$$\frac{\Sigma Q}{\omega} \lesseqgtr R_1; \quad \text{но} \quad \omega = \pi D.\delta; \quad \text{следоват.,} \quad \delta \gtreqless \frac{\Sigma Q}{\pi D R_1}.$$

Подставляя сюда значение для Q, находим окончательно:

$$\delta \geqq \frac{\Delta r}{2R_1}\left\{H + \left(\frac{2f}{D}\right)^2 (r - \frac{1}{3}f)\right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (f)$$

Чтобы получить практическую толщину δ нужно вторую часть умножить на коэффициент $\beta = 1{,}3$ и прибавить к ней $a = 5$ мм. Найденное значение нужно округлить до ближайшего большего числа в целых милиметрах.

Наибольшая толщина дна δ_0 соответствует самой низкой точке дна a и определяется по формулам (d и e).

§ 10. Определение давления жидкости на сферические, конические и цилиндрические поверхности. Применим формулы § 8 к некоторым частным случаям простейших поверхностей, полагая, что давление на свободной поверхности $p_0 = 0$, и что жидкость расположена *вне* об'ема соответствующего поверхности, т.-е. давление в каждой точке направляется по внутренней нормали к поверхности.

a) Определим проекции давлений на одну *восьмую часть сферы abc* (черт. 37) радиуса r. Центр тяжести C сектора abO (черт. 38) отстоит от O в расстоянии

$$OC = \frac{4}{3} \cdot \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\beta}{arc\beta} r; \text{ при } \beta = 90^0\text{: } OC = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} r.$$

$$AC = OC \,.\, \operatorname{Sin} 45^0 = \frac{4r}{3\pi}.$$

Тогда по формуле (d) в § 8 получаем, полагая, что $X'Y'$ свободная поверхность:

$$\omega_x = \omega_y = \frac{1}{4}\pi r^2;\ h_1 = h_2 = z_0 - \frac{4r}{3\pi};$$

следоват.,
$$\Sigma N_x = \Sigma N_y = \frac{1}{4}\pi r^2 \left(z_0 - \frac{4r}{3\pi}\right).$$

$$\Sigma N_z = \text{вес } (OabO'a'b') - \text{вес } (Oabc) = \frac{1}{4}\Delta\pi r^2 z_0 - \frac{1}{6}\Delta\pi r^3 = \frac{1}{4}\Delta\pi r^2\left(z_0 - \frac{2r}{3}\right).$$

Направления этих проекций противоположны направлениям координатных осей. Так как давление в каждой точке поверхности проходит через центр сферы, то все эти давления приводятся к одной равнодействующей равной

$$R = \sqrt{2(\Sigma N_x)^2 + (\Sigma N_z)^2} = \frac{1}{4}\Delta\pi r^2 \sqrt{2\left(z_0 - \frac{4r}{3\pi}\right)^2 + \left(z_0 - \frac{2r}{3}\right)^2}.$$

Если рассматривать *четверть сферы* (черт. 39), то ΣN_x для частей *abc* и *bcd* равны и действуют противоположно, а потому для всей четверти $\Sigma N_x = 0$; ΣN_y и ΣN_z равны удвоенной величине проекций на оси Y и Z для одной восьмой сферы *abc*, т.-е.

$$\Sigma N_y = \frac{1}{2}\Delta\pi r^2\left(z_0 - \frac{4r}{3\pi}\right);\ \ \Sigma N_z = \frac{1}{2}\Delta\pi r^2\left(z_0 - \frac{2r}{3}\right).$$

Направления их противоположны направлениям осей. Для *верхней полусферы abdec* найдем $\Sigma N_x = 0$; для четвертей *abdc* и *aedc* (черт. 39) проекции ΣN_y равны и противоположны, а потому для всей полусферы $\Sigma N_y = 0$. Проекция ΣN_z равна удвоенной величине для четверти сферы, именно:

$$\Sigma N_z = \Delta \pi r^2 \left(z_0 - \frac{2r}{3}\right).$$

Направление этого давления по вертикали вниз.

Для *всей сферы*, как тела погруженного в жидкость, имеем:

$$\Sigma N_x = 0; \quad \Sigma N_y = 0; \quad \Sigma N_z = G = \frac{4}{3} \Delta \pi r^3.$$

Направление этой составляющей по вертикали вверх.

б) Найдем давление на одну *четверть* боковой поверхности прямого *конуса* высотою $OA = H$ с *вертикальною* осью и с круговым основанием (черт. 40). Имеем:

$$\omega_x = \omega_y = \frac{1}{2} Hr; \quad h_1 = h_2 = z_0 - \frac{2}{3} H.$$

Следовательно:

$$\Sigma N_x = \Sigma N_y = \Delta \omega_x h_1 = \frac{1}{2} \Delta Hr \left(z_0 - \frac{2}{3} H\right).$$

Проекция ΣN_z равна весу жидкости в рассматриваемой части конуса + вес жидкости в проектирующем цилиндре $AabO'a'b'$; следов.:

$$\Sigma N_z = \frac{1}{4} \Delta \pi r^2 . \frac{1}{3} H + \frac{1}{4} \Delta \pi r^2 (z_0 - H) = \frac{1}{4} \Delta \pi r^2 \left(z_0 - \frac{2}{3} H\right).$$

Составляющие ΣN_x и ΣN_y действуют в сторону обратную направлению осей X и Y, а ΣN_z действует в сторону оси Z.

Давление на *половину* боковой поверхности конуса, лежащую по сю сторону от плоскости XZ, определим так: $\Sigma N_x = 0$; ΣN_y равно удвоенной величине соответствующей одной четверти боковой поверхности; следоват., $\Sigma N_y = \Delta Hr \left(z_0 - \frac{2}{3} H\right)$; на этом же основании получится $\Sigma N_z = \frac{1}{2} \Delta \pi r^2 \left(z_0 - \frac{2}{3} H\right)$.

Для боковой поверхности *всего конуса* $\Sigma N_x = \Sigma N_y = 0$. Проекция ΣN_z равна удвоенной величине соответствующей половине боковой поверхности, т.-е. $\Sigma N_z = \Delta \pi r^2 \left(z_0 - \frac{2}{3} H\right)$. Эта составляющая действует по оси Z.

Если *конус* имеет *горизонтальную* ось $OA = H$ (черт. 41) и круговое основание радиуса r, то для *четверти* боковой поверхности полу-

чается: $\omega_x = \frac{1}{4}\pi r^2$; $\omega_y = \frac{1}{2}Hr$. Так как $A_1C_1 = \frac{4r}{3\pi}$, то $h_1 = z_0 - \frac{4r}{3\pi}$; также $h_2 = z_0 - \frac{1}{3}r$. Тогда получится:

$$\Sigma N_x = \frac{1}{4}\Delta\pi r^2\left(z_0 - \frac{4r}{3\pi}\right);\ \Sigma N_y = \frac{1}{2}\Delta Hr\left(z_0 - \frac{1}{3}r\right).$$

Проекция ΣN_z равна весу жидкости в призме $OACO'A'C'$ без веса жидкости в части конуса $OABC$; следоват.,

$$\Sigma N_z = \frac{1}{2}\Delta Hrz_0 - \frac{1}{4}\Delta\pi r^2 . \frac{1}{3}H = \frac{1}{2}\Delta Hr\left(z_0 - \frac{1}{6}\pi r\right).$$

Направление ΣN_x по оси X, а направления прочих проекций противоположны направлениям осей Y и Z. Для *половины* боковой поверхности конуса, лежащей выше плоскости XY, получается:

$$\Sigma N_x = \frac{1}{2}\Delta\pi r^2\left(z_0 - \frac{4r}{3\pi}\right);\ \Sigma N_y = 0;\ \Sigma N_z = \Delta Hr\left(z_0 - \frac{1}{6}\pi r\right).$$

Направления этих составляющих теже, что и выше.

Для боковой поверхности *всего* конуса найдем:

$$\Sigma N_x = \Delta\pi r^2 z_0; \quad \Sigma N_y = 0; \quad \Sigma N_z = \Delta\pi r^2 . \frac{1}{3}H.$$

в) Пусть требуется определить давление на часть $ABCD$ (черт. 42) цилиндрической стенки в предположении, что *цилиндр* имеет *вертикальную* ось $OO'' = H$ и поперечное круговое сечение радиуса r. Назовем координаты точки A через x_1 и y_1, а точки B через x_2 и y_2; тогда $\omega_x = efgh = (y_2 - y_1)H$; $h_1 = z_0 - \frac{1}{2}H$; $\omega_y = abcd = (x_1 - x_2)H$; $h_2 = z_0 - \frac{1}{2}H$. Тогда получим:

$$\Sigma N_x = \Delta\omega_x h_1 = \Delta H(y_2 - y_1)\left(z_0 - \frac{1}{2}H\right);$$

$$\Sigma N_y = \Delta\omega_y h_2 = \Delta H(x_1 - x_2)\left(z_0 - \frac{1}{2}H\right).$$

Давления N нормальны к производящим цилиндра, а следоват., и к оси Z, а потому $\Sigma N_z = 0$. Направления составляющих обратны направлениям осей X и Y. Для *четверти* боковой поверхности цилиндра, т.-е. для $EFGH$ имеем: $y_1 = x_2 = 0$; $x_1 = y_2 = r$; следоват.,

$$\Sigma N_x = \Delta Hr\left(z_0 - \frac{1}{2}H\right);\ \Sigma N_y = \Delta Hr\left(z_0 - \frac{1}{2}H\right);\ \Sigma N_z = 0.$$

Направления составляющих теже, что и выше.

Для *половины* боковой поверхности, находящейся по сю сторону от плоскости XZ, получается:

$$\Sigma N_x = \Sigma N_z = 0; \quad \Sigma N_y = 2\Delta Hr\left(z_0 - \frac{1}{2}H\right).$$

Составляющая по оси Y направлена противоположно этой оси.

Для боковой поверхности *всего* цилиндра:

$$\Sigma N_x = \Sigma N_y = \Sigma N_z = 0.$$

Определим давление на часть $ABCD$ (черт. 43) боковой поверхности *цилиндра* с *горизонтальною* осью $OO'' = H$ и с круговым поперечным сечением радиуса r; пусть координаты точки C суть x_1 и z_1, а точки $D = x_2$ и z_2. Тогда

$$\omega_x = abcd = H(z_1 - z_2);\ \omega_y = 0;\ h_1 = z_0 - \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Затем

$$\Sigma N_x = \Delta\omega_x h_1 = \Delta H(z_1 - z_2)\left\{z_0 - \frac{1}{2}(z_1 + z_2)\right\};\ \Sigma N_y = 0$$

ΣN_z равно весу жидкости в параллелопипеде $mnm'n'rqr'q'$ без веса жидкости в об'еме $mnABCDqr$. Так как площадь полусегмента $BA'n$ равна

$$\omega' = \frac{r^2}{2}\left(\alpha_1 - \frac{x_1 z_1}{r^2}\right),$$

а площадь полусегмента AmA' равна

$$\omega'' = \frac{r^2}{2}\left(\alpha_2 - \frac{x_2 z_2}{r^2}\right),$$

где α_1 и α_2 углы при центре, соответствующие дугам $A'B$ и AA', то площадь сегмента $ABnm$ равна:

$$\omega = \omega' - \omega'' = \frac{1}{2}(x_2 y^2 - x_1 y_1 + r^2 \varphi)$$

где $\varphi = (\alpha_1 - \alpha_2) =$ центральный угол соответствующий дуге AB. Тогда можно написать:

$$\Sigma N_z = \Delta H z_0 (x_2 - x_1) - \Delta H \omega.$$

Направления составляющих по осям X и Z противоположны этим осям. Для боковой поверхности *одной четверти* цилиндра, т.-е. для поверхности $A'B'C'D'$ получим проекции давлений, имея в виду, что $x_1 = z_2 = 0;\ x_2 = z_1 = r$ и $\omega = \frac{1}{4}\pi r^2$:

$$\Sigma N_x' = \Delta Hr\left(z_0 - \frac{1}{2}r\right);\ \Sigma N_y = 0;\ \Sigma N_z = \Delta H z_0 r - \frac{1}{4}\Delta\pi r^2 H =$$

$$\Delta Hr\left(z_0 - \frac{1}{4}\pi r\right).$$

Направление составляющих тоже, что и выше.

Если определяется давление на боковую поверхность *половины* цилиндра, лежащей выше плоскости XY, то получается:

$$\Sigma N_x = \Sigma N_y = 0;\ \Sigma N_z = 2\Delta Hr\left(z_0 - \frac{1}{4}\pi r\right).$$

Направление этой составляющей противоположно оси Z.

Для боковой поверхности *всего* цилиндра имеем:

$$\Sigma N_x = \Sigma N_y = 0; \quad \Sigma N_z = \Delta \pi r^2 H,$$

что представляет вес жидкости в рассматриваемом цилиндре; направление этой составляющей по оси Z.

§ 11. Описание устройства простейших гидравлических машин, действующих гидростатическим давлением. Опишем вкратце устройство простейших машин, приводимых в действие гидростатическим давлением. К таким машинам относятся: гидравлические прессы для различных целей; аккумуляторы; гидравлические под'емники для людей, грузов, вагонов, судов (асцензоры); гидравлические клепальные машины; гидравлические машины для сверления горных пород при устройстве тоннелей; гидравлические машины для разводки мостов; для открывания и закрывания ворот и щитов в шлюзах и для проводки судов через них и т. п.

Гидравлические машины вообще, т.-е. машины действующие водой, могут быть двоякого рода. Машины *первого* рода, к которым относятся водяные колеса и водяные тюрбины, суть такие двигатели, которые приводятся водой, протекающей через них.

Вода, частицы которой имеют скорость V и ед. давление p большее атмосферного p_0, вступает в машину и, заставляя ее вращаться, производит в ней работу помощью живой силы и давления; затем частицы ее выходят из машины со скоростью V' близкою к нулю и с ед. давлением равным p_0. Машины *второго* рода, которые мы и будем теперь рассматривать, приводятся в действие гидростатическим давлением по принципу Паскаля, т.-е. передачей давления. Здесь вода, вступая в машину с ед. давлением p, сохраняет это давление и вовсе не вытекает из нее; вода выпускается из машины после окончания работы за известный период.

Машины первого рода суть *двигатели*, а второго рода суть большею частью машины *орудия*.

a) **Гидравлический пресс** состоит из двух частей: насоса *ac* и собственно пресса *BC* (черт. 44). Насос, действующий в ручную, состоит из стакана *a*, в котором движется вверх и вниз ныряло *b*, приводимое в движение рычагом *gk*; *g* — неподвижная точка вращения рычага; *h* — подвижная точка; *k* — точка приложения силы рабочего *P*. Вода забирается из сосуда *d* помощью всасывающей трубки *c*, на верхнем конце которой помещен клапан *e*. Вода из стакана помощью трубки *ifm*, подняв клапан *f*, направляется под давлением $p_1 > p_0$ через металлическую пробку *n* в цилиндр *C*. При под'еме ныряла *b*, клапан *e*

поднимается, а клапан f (обратным давлением p_1 из трубки m) опускается и вода давлением атмосферы вгоняется по трубке c в стакан a. При опускании ныряла клапан e опускается, а клапан f давлением воды поднимается и, таким образом, присосанная вода нагнетается в цилиндр C. В цилиндре C движется вверх и вниз поршень A с платформой B на верху, на которой помещается поднимаемый груз Q. В кольцеобразной камере r помещается кожаный воротник s, плотно прижимаемый к поршню давлением воды. Для выпуска воды из цилиндра служит особая трубка q с краном на конце. Найдем зависимость между силой P и грузом Q. Обозначим плечи рычага gk так: $gh=l$; $gk=L$. Когда ныряло опускается вследствие действия силы P, то такому движению противодействует давление воды S на нижнее основание ныряла; $S=\omega p_1$, где ω — поперечное сечение ныряла. Так как по закону рычага

$$Sl=PL, \text{ то получается: } p_1=\frac{P}{\omega}\frac{L}{l} \quad \ldots\ldots\ldots (a)$$

Вода в цилиндре C давит на дно поршня A, имеющего поперечное сечение Ω, силою $Q=\Omega p_1$, и $p_1=\frac{Q}{\Omega}$. Сравнивая полученные результаты и называя D и d диаметры поршня и ныряла, находим:

$$Q=P\left(\frac{D}{d}\right)^2\frac{L}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

При этом выводе для упрощения не были приняты во внимание ни вес поршня, ни трение между поршнем и воротником. Отсюда видно, что помощью гидравлического пресса можно поднимать весьма значительные грузы, а также производить очень большие давления.

Напр., при усилии двух рабочих по 15 килогр., при $D=30$ сант., $d=3$ сант. и $\frac{L}{l}=10$ находим: $Q=2.15.(10)^2.10=30000$ килогр. Давление в цилиндре: $p_1=\frac{Q}{\Omega}=\frac{30000}{707}=42,4$ килограммам на см.^{2} или 42,4 атмосф. Гидравлические прессы употребляются постоянно в фабричном и заводском деле для пресования и сдавливания различных материалов, для обжимки и проковки железных и стальных болванок, для штампования металлических изделий, для испытания труб гидравлическим давлением. Они применяются также в инженерном деле, напр., в разводных мостах, при установке мостовых ферм на опоры, для открывания и запирания шлюзных ворот, в гидравлических кранах для под'ема грузов и т. п. Вода подается в пресс или в ручную, или помощью паровых насосов или аккумуляторами. Самой большой силой обладают гидравлические прессы, служащие для проковки тяжелых пароходных валов, паровозных осей, орудийных болванок и т. п. Они развивают давление до 4000 тон и даже до 8000 тон.

б) **Аккумулятор** изобретен в 1846 г. англичанином *Армстронгом*. Аккумулятор состоит из полого цилиндра AA (черт. 45), укрепленного в подушке BB притянутой болтами к каменному фундаменту. В цилиндре движется поршень CC, к верхней части которого прикреплена доска DD, через которую пропущены болты EE, поддерживающие нагрузку LL (ящики с металлическим ломом, чугунные плиты). Между стенками цилиндра и поршнем оставляется небольшой зазор, а для уничтожения просачивания воды в кольцевидной полости pq помещается кожаный воротник, который нажимается сверху втулкой $m'n'$ с флянцами rs. В цилиндр вода накачивается паровыми насосами по трубе I; тогда поршень CC поднимается вместе с доской и нагрузкой; на этой трубе поставлен особый клапан (обратный); он препятствует воде двигаться обратно из цилиндра к насосу при остановке действия насоса. Пусть поршень CC, поднятый на высоту H, равномерно опускается. Тогда вода в цилиндре будет находиться под действием веса G: поршня, доски DD, болтов и нагрузки, за вычетом трения F между поршнем и цилиндром. Ед. давление в воде равно p_1. Очевидно, такому опусканию поршня противодействует давление воды на нижнее основание поршня равное $p_1\Omega$, где Ω поперечное сечение поршня. Так как

$$P = p_1\Omega = G - F, \text{ то } p_1 = \frac{G-F}{\Omega} \quad \dots\dots\dots (c)$$

Отсюда видно, что чем больше вес нагрузки LL, тем больше ед. давление p_1 в воде. Если теперь открыть кран на трубке K, идущей к гидравлическим машинам, напр., к гидравлическому прессу, гидравлическим кранам и т. п., то вода из цилиндра будет притекать к этим машинам под давлением p_1 и производить в них полезную работу. Работа T, которую производит поршень при опускании на высоту H, равна $T = PH = p_1\Omega H$; эта работа передается гидравлическим машинам не полностью, а за вычетом работы всех сопротивлений, которые будут проявляться как в самых машинах, так и на пути протекания воды из аккумулятора к этим машинам. Об'ем воды, притекающей к гидравлическим машинам из аккумулятора при опускании поршня на H, равен $W = \Omega H$; тогда работа, им произведенная, выразится так:

$$T = p_1 W \quad \dots\dots\dots\dots\dots (d)$$

Аккумуляторы ставятся на механических заводах с целью приведения в действие гидравлических прессов для штампования различных предметов, гидравлических клепальных машин, гидравлических под'емных кранов и т. п. Напр., в Англии в г. Гулле аккумуляторы, поставленные в доке Альберта и питаемые 60-ти сильным паровым насосом, приводят в действие: разводный мост пролетом в 80 фут., 19 гидравли-

ческих машин, служащих для открывания и закрывания затворов в шлюзах и для действия кабестанов при проводе пароходов через эти шлюзы; 3 крана для погрузки каменного угля силою по 20 тон; 1 кран силою в 15 тон; 1 кран силою в 3 тоны и 34 крана силою по $1^1/_2$ тоны. Все эти машины работают водою под начальным давлением около 53 атмосфер.

Работа всех гидравлических машин-орудий одновременно может происходить сравнительно не часто; обыкновенно одновременно работает только часть их. Работа аккумулятора здесь представляется в таком виде. В продолжении всего времени паровые насосы накачивают воду в аккумулятор, откуда вода по трубам направляется к машинам; смотря по тому, будет ли вода уходить по трубам из аккумулятора в большем или меньшем количестве сравнительно с количеством доставляемым в аккумулятор насосами, поршень будет то подниматься, то опускаться. Следоват., аккумулятор, служащий посредником между машиной-двигателем (паровым насосом) и машинами-орудиями, воспринимает работу первой и скопляет, собирает ее (отсюда и самое название „аккумулятор", т.-е. собиратель) тогда, когда машины-орудия потребляют мало работы или вовсе не работают, с тем, чтобы в часы усиленной работы машин-орудий отдавать им скопленную энергию. Обыкновенно нагрузку аккумулятора LL соединяют с паропроводной трубой, идущей от котлов к паровым насосам, таким образом, что при полном поднятии груза эта труба закрывается, а затем при понижении нагрузки кран вновь открывается.

В некоторых случаях аккумулятор можно заменить напорным резервуаром A (черт. 46), находящимся на высоте H над гидравлическими машинами. В этот резервуар вода накачивается паровым насосом по трубе abc, откуда она отводится к машинам трубою cbd. Такая замена аккумулятора возможна только тогда, когда требуемое ед. давление p не велико, напр., не более 4 атмосфер; тогда высота соответственного водяного столба равна:

$$H = \frac{p_1}{\Delta} = \frac{4.10333}{1000} = 41{,}3 \text{ метра} = 136 \text{ футов.}$$

При больших давлениях эта высота получается настолько значительной, что помещение напорного резервуара неудобно.

Для получение очень значительных ед. давлений применяются *дифференциальный* аккумулятор и *интенсивный* аккумулятор. Первый из них изобретен англичанином Тведеллем.

Устройство его во всем сходно с устройством простого аккумулятора с тем только отличием, что поршень CC (черт. 47) диаметром d_1

и сечением ω_1 снабжен хвостом KK, имеющим диаметр d_2 и сечение ω^2 и проходящим через дно неподвижного цилиндра AA; плотное соприкасание хвоста с цилиндром достигается помощью кожаного воротника, втулки r_1s_1 и болтов с гайками. Как и в простом аккумуляторе определим ед. давление p_1 в цилиндре следующим образом. Пусть вес поршня CC, хвоста KK, доски DD, болтов EE и груза LL равен G; трение поршня вверху и хвоста—внизу равно F. Давление воды P на поршень проявляется в сечении cb по кольцеобразной площади $\Omega = (\omega_1 - \omega_2)$. При равномерном опускании поршня получается:

$$P = p_1\Omega = G - F; \quad p_1 = \frac{G - F}{\omega_1 - \omega_2} \ldots \ldots \ldots (e)$$

Отсюда видно, что одним и тем же грузом G в дифференциальном аккумуляторе можно получать ед. давление значительно большее, чем в простом; для чего нужно только взять $(\omega_1 - \omega_2)$ достаточно малым. Об'ем воды, израсходованный при опускании поршня на H равен $W = H(\omega_1 - \omega_2)$. Работа, произведенная при этом опускании, определится так:

$$T = PH = p_1(\omega_1 - \omega_2)H = p_1W \ldots \ldots \ldots (f).$$

На черт. 48 показано другое устройство дифференциального аккумулятора. Здесь поршень AB' неподвижен и укреплен верхнею и нижнею частями в чугунных подушках CC и DD, стянутых сильными болтами.

Поршень имеет неодинаковый по длине диаметр: нижняя половина имеет диаметр d_1 и сечение ω_1, а верхняя — d_2 и ω_2.

По длине поршня просверлен канал mn, соединяющийся внизу с трубкой $abcd$, идущей от насосов (ab) к гидравлическим машинам (bd). Цилиндр EF, диаметром d_0 и сечением ω_0, подвижной и может скользить по поршню; он плотно охватывает поршень в двух местах: внизу—в утолщенной части и вверху—в утоненной, для чего в этих местах помещены кожаные воротники, прижимаемые втулками с флянцами. На цилиндре помещена нагрузка LL в виде чугунных плит. Вода в цилиндр накачивается насосами по трубке bmn. Для един. давления p_1 и для работы T получаются те же выражения, что и для первой конструкции (форм. e и f). Помощью дифференциального аккумулятора получается давление до 100 атмосф.

в) **Гидравлический кран.** Во многих случаях для под'ема грузов употребляются гидравлические краны, представляющие соединение гидравлического пресса с полиспастом; это соединение показано в схеме на черт. 49. В цилиндре A гидравлического пресса движется поршень B со штоком C; ко дну цилиндра прикреплен блок E, а к концу штока C

два блока E. Цепь, служащая для перемещения груза P, укреплена концом a в станине, поддерживающей цилиндр A; затем она идет на первый подвижной блок E, оттуда на неподвижный блок E', далее на второй подвижный E и, наконец, через неподвижный блок E'' к грузу P. При начале под'ема поршень B находится почти у дна цилиндра A; если по трубке f впустить воду из аккумулятора, то поршень B, выдвигаясь из цилиндра, будет вытягивать конец цепи e, а следов. поднимать груз P. Если полная длина, на которую может передвинуться поршень, равна l, то длина цепи, навитой на один неподвижный блок E' и два подвижных E, увеличится при этом перемещении на $3\,l$; следов., груз поднимется на высоту $H=3\,l$. Вообще, при числе подвижных блоков n и числе неподвижных n' длина цепи увеличится на $(n+n')l$, а следоват., груз поднимется на высоту $H=(n+n')l$. Чтобы поршень вернуть в первоначальное положение, необходимо по трубке g пустить воду из аккумулятора, предварительно раз'единив трубку f от аккумулятора.

Давление воды на поршень B, площадь поперечного сечения которого ω_1, равно $Q=p_1\omega_1$, где p_1 ед. давление в цилиндре; при перемещении поршня на длину λ работа этого давления равна $Q\lambda$; работа, произведенная грузом P, который поднимется на высоту $(n+n')\lambda$, равна $P(n+n')\lambda$. Пренебрегая трением поршня и штока, а также жесткостью цепи и трением осей блоков, находим:

$$Q\lambda=P(n+n')\lambda;\quad \text{откуда}\quad P=\frac{Q}{n+n'}=\frac{p_1\omega_1}{n+n'}\;.\;.\;.\;.\;.\;(g)$$

В действительности вследствие существования трений и жесткости груз P будет меньше исчисленного по этой формуле и будет равен:

$$P=\frac{\alpha Q}{n+n'}=\frac{\alpha p_1\omega_1}{n+n'}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(g')$$

где коеф. $\alpha<1$ выражает влияние трения и жесткости. Полученное равенство показывает, что, пользуясь полиспастом, мы увеличиваем высоту H под'ема груза в $(n+n')$ раз сравнительно с l, но вместе с этим величину груза P уменьшаем во столько же раз сравнительно с Q. Величина груза пропорциональна един. давлению воды и поперечному сечению поршня.

Определим количество воды W, расходуемое при под'еме груза. По трубке f нужно впустить в цилиндр об'ем $W=\omega_1 l$. На возвратное движение поршня потребуется израсходовать об'ем $W'=(\omega_1-\omega_2)l$; итак полный расход воды составляет: $W+W'=(2\omega_1-\omega_2)l$. Работа, произведенная давлением Q при длине пути l, равна:

$$T=Ql=p_1\omega l=p_1 W\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(f$$

Величина поднимаемых грузов может изменяться в довольно широких пределах; действующее же на поршень усилие Q остается без изменения; различие в под'еме всех этих грузов будет заключаться в том, что более легкие грузы будут подниматься быстрее. Обыкновенно эта быстрота не составляет существенной выгоды; недостаток же ее заключается в том, что для под'ема легких грузов тратится аккумуляторной воды столько же, сколько для под'ема предельного груза P, т.-е. об'ем $(W+W')$. Поэтому для экономического действия гидравлических кранов необходимо видоизменить их устройство так, чтобы под'емная сила их Q могла принимать значения Q_1; Q_2... меньшие Q, при чем расходуемые об'емы аккумуляторной воды W_1; W_2... должны быть меньше $(W+W')$. Если в только что описанном гидравлическом кране при под'еме груза впускать воду из аккумулятора одновременно по трубкам f и g, то, обозначая поперечное сечение штока C через ω_2, найдем, что давление на поршень B: справа равно $Q'=p_1(\omega_1-\omega_2)$, а слева $Q=p_1\omega_1$; следоват., усилие, выдвигающее поршень и шток из цилиндра, равно $(Q-Q')=p_1\omega_2$. Тогда по предыдущему поднимаемый груз P' будет равен:

$$P'=\frac{a(Q-Q')}{n+n'}=\frac{ap_1\omega_2}{n+n'}\ldots\ldots\ldots\ldots(h)$$

Итак, в этом случае величины поднимаемых грузов относятся между собою так:

$$P:P'=Q:(Q-Q')=\omega_1:\omega_2=d_1{}^2:d_2{}^2,$$

где d_1 и d_2 диаметры поршня B и штока C. Таким образом, грузы больше P' и меньше P будут подниматься впуском воды по трубке f, а грузы меньше P' — впуском воды одновременно по трубкам f и g. Найдем об'ем воды расходуемый при под'еме груза P' и меньших. При начале под'ема по трубке g впускается в цилиндр A об'ем воды $W'=$ $=(\omega_1-\omega_2)l$; затем вода впускается в тот же цилиндр по трубке f, и тогда поршень B движется слева направо, вытесняя из цилиндра обратно в аккумулятор ранее впущенный об'ем W'; всего по трубке f войдет об'ем $W=\omega_1 l$. При обратном движении поршня этот об'ем должен быть выпущен внаружу, а из аккумулятора по трубке g будет впущен в цилиндр об'ем W', который будет затем вытеснен в аккумулятор и т. д. Очевидно, для под'ема груза и для постановки поршня B в прежнее положение расходуется об'ем $W=\omega_1 l$. Если бы тот же груз P' поднимался прежним порядком, то пришлось бы израсходовать об'ем $(W'+W)=(2\omega_1-\omega_2)l$, как это было показано выше, или больше на

$W' = (\omega_1 - \omega_2)l$. Работу, произведенную давлением $(Q - Q')$, можно выразить так:

$$T = (Q - Q')l = p_1 \omega_2 l = p_1 W \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (i)$$

Для управления впуском аккумуляторной воды в цилиндр, а также для выпуска ее устанавливается особый распределительный прибор (золотник), с которым соединены аккумулятор и трубки f и g.

ГИДРОДИНАМИКА.

§ 12. О скорости и об ускорении частиц при движении жидкости. В пространстве, занятом движущеюся жидкостью, возьмем определенную точку $P(x; y; z)$. В какой-либо момент времени t через эту точку проходит частица жидкости M (черт. 50) со скоростью W. Для этого момента t скорость W и ее проекции $u; v; w$ будут функции координат $x; y; z$. В следующий момент $t+dt$ через P пройдет другая жидкая частица M'; ее скорость и проекции будут уже другие; поэтому можно сказать, что скорость и проекции ее частиц, проходящих через P, суть функции 4 независимых переменных: координат и времени; следоват.,

$$u = f(x; y; z; t); \quad v = f_1(x; y; z; t); \quad w = f_2(x; y; z; t).$$

Теперь будем следить за частицей M при ее движении по траектории; в момент $t_1 = t + dt$ эта частица переместится и пройдет путь $PP_1 = ds = W.dt$; координаты точки P_1 на траектории будут:

$$x_1 = x + udt; \quad y_1 = y + vdt; \quad z_1 = z + wdt.$$

Скорость W_1 частицы M в точке P_1 имеет проекции $u_1; v_1; w_1$, которые будут функциями координат $x_1; y_1; z_1$ и времени t_1 и выразятся так:

$$u_1 = f(x_1; y_1; z_1; t_1) = f(x + udt; y + vdt; z + wdt; t + dt)$$
$$v_1 = f_1(x + udt; \ldots\ldots); \quad w_1 = f_2(x + udt; \ldots\ldots).$$

Проекции ускорения частицы M при ее переходе из P в P_1 выразятся по общему определению следующим образом:

$$I_x = \frac{u_1 - u}{dt} = \frac{du}{dt}; \quad I_y = \frac{v_1 - v}{dt} = \frac{dv}{dt}; \quad I_z = \frac{w_1 - w}{dt} = \frac{dw}{dt}.$$

Если переменные x; y; z; t получают бесконечно малые приращения h; k; l; m, то какая-либо функция $F(x; y; z; t)$ обращается в $F(x+h; y+k; z+l; t+m)$. Эту последнюю функцию можно разложить в ряд по строке Тайлора и тогда получим:

$$F(x+h; y+k; z+l; t+m) = F(x; y; z; t) +$$

$$+\frac{\partial F}{\partial x}h+\frac{\partial F}{\partial y}k+\frac{\partial F}{\partial z}l+\frac{\partial F}{\partial t}m+\alpha,$$

где α представляет сумму членов бесконечно малых высших порядков. Заменяя здесь $F(x; y; z; t)$ последовательно функциями u; v; w, мы должны затем $F(x+h; \ldots\ldots)$ заменить функциями u_1; v_1; w_1, а приращения h; k; l; m заменить приращениями udt; vdt; wdt и dt. Тогда получаем:

$$u_1=u+\frac{\partial u}{\partial x}udt+\frac{\partial u}{\partial y}vdt+\frac{\partial u}{\partial z}wdt+\frac{\partial u}{\partial t}dt.$$

Следоват., проекция ускорения на ось X:

$$I_x=\frac{du}{dt}=\frac{u_1-u}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial u}{\partial z}w+\frac{\partial u}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Подобным же образом можно вывести для проекций ускорения на оси Y и Z:

$$\left.\begin{aligned} I_y=\frac{dv}{dt}=\frac{v_1-v}{dt}=\frac{\partial v}{\partial x}u+\frac{\partial v}{\partial y}v+\frac{\partial v}{\partial z}w+\frac{\partial v}{\partial t}. \\ I_z=\frac{dw}{dt}=\frac{w_1-w}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}u+\frac{\partial w}{\partial y}v+\frac{\partial w}{\partial z}w+\frac{\partial w}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

В эти выражения входят *полные* производные по времени: $\frac{du}{dt}$; $\frac{dv}{dt}$; $\frac{dw}{dt}$, и *частные* производные по времени $\frac{\partial u}{\partial t}$; $\frac{\partial v}{\partial t}$; $\frac{\partial w}{\partial t}$.

Различие между теми и другими заключается в следующем. Когда частица M перемещается из P в P_1, то $x; y; z; t$ переходят в $x_1; y_1; z_1; t_1$ и проекции u; v; w переходят в проекции

$$u_1=u+\frac{du}{dt}dt;\ v_1=v+\frac{dv}{dt}dt;\ w_1=w+\frac{dw}{dt}dt.$$

Если частица M в момент t проходит через точку P с проекциями скорости u; v; w, а в момент $t+dt$ через ту-же точку проходит частица M' с проекциями скорости u'; v'; w', то при этом получаем:

$$u'=u+\frac{\partial u}{\partial t}dt;\quad v'=v+\frac{\partial v}{\partial t}dt;\quad w'=w+\frac{\partial w}{\partial t}dt,$$

здесь $u'=f\ (x;\ y;\ z;\ t+dt)$; $v'=f_1\ (x;\ y;\ z;\ t+dt)$; $w'=\ldots\ldots$

Движение жидкой частицы характеризуется 5 величинами: проекциями скорости u; v; w; ед. давлением p и плотностью ρ. Последние две величины суть функции тех же 4 независимых переменных: $x; y; z; t$. При переходе частицы M из точки P в точку P_1 величины p и ρ переходят в p_1 и ρ_1, при чем будет:

$$p_1=p+\frac{dp}{dt}dt;\quad \rho_1=\rho+\frac{d\rho}{dt}dt.$$

Рассуждая так-же, как и выше, получим:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp}{dt}&=\frac{\partial p}{\partial x}u+\frac{\partial p}{\partial y}v+\frac{\partial p}{\partial z}w+\frac{\partial p}{\partial t}\\ \frac{d\rho}{dt}&=\frac{\partial \rho}{\partial x}u+\frac{\partial \rho}{\partial y}v+\frac{\partial \rho}{\partial z}w+\frac{\partial \rho}{\partial t}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14).$$

Здесь $\frac{dp}{dt}$ и $\frac{d\rho}{dt}$ суть полные производные p и ρ по времени, а $\frac{\partial p}{\partial t}$ и $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ суть частные производные тех же функций по времени. Различие между этими производными было об'яснено выше.

Переменные x; y; z; t, входящие в функции u; v; w; p и ρ, называются *Эйлеровыми* независимыми переменными; они применяются почти во всех выводах гидродинамики. В некоторых немногих случаях, напр., при рассмотрении движения волн, применяются *Лагранжевы* переменные.

Рассмотренный случай движения жидкости есть самый общий; такое движение жидкости называется *неустановившимся.*

Из вышеизложенного видно, что при таком движении в какую-либо точку P пространства приходят частицы M; M' . . . имеющие скорости W; W' . . . ; эти частицы движутся по разным траекториям проходящим через эту точку. Как показано выше, здесь u; v; w; p; ρ суть функции x; y; z; t.

Рассмотрим теперь движение не столь общее, но часто наблюдаемое в действительности; оно называется *установившимся.* Здесь через точку P проходит только *одна* траектория, по которой жидкие частицы и следуют друг за другом. Каждая частица, придя в точку P, будет иметь одну и ту же скорость W, именно соответствующую этой точке. В этом случае u; v; w; p; ρ суть функции трех независимых переменных x; y; z, т.-е

$$u=f\,(x;\ y;\ z);\quad v=f_1\,(x;\ y;\ z);\quad w=f_2\,(x;\ y;\ z).$$

Время t в эти выражения *явным* образом не входит; следов., должны быть такие равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0;\ \frac{\partial v}{\partial t}=0;\ \frac{\partial w}{\partial t}=0;\ \frac{\partial p}{\partial t}=0;\ \frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Эти *пять* уравнений представляют условия характеризующие установившееся движение. Траектории частиц называются *линиями тока;* эти линии с течением времени не изменяют своего положения в пространстве.

§ 13. Уравнение неразрывности жидкости. Эйлеровы уравнения гидродинамики. Внутри движущейся жидкости рассмотрим бесконечно малый параллелопипед AC (черт. 51) с ребрами Δx; Δy; Δz; положе-

ние его в пространстве неизменно; пусть ρ представляет среднюю плотность массы жидкости в этом об'еме в момент t; тогда масса параллелопипеда в этот момент равна:

$$\Delta m = \rho . \Delta x . \Delta y . \Delta z .$$

В промежуток времени dt некоторые частицы уйдут из этого об'ема; другие притекут в этот об'ем извне и, наконец, часть частиц будет продолжать оставаться в нем. Поэтому средняя плотность массы в об'еме изменится и для момента $t + dt$ будет равна:

$$\rho_1 = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt,$$

а потому масса жидкости равняется:

$$\Delta_1 m = (\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt) \; \Delta x . \Delta y . \Delta z$$

Следоват., приращение массы за время dt равно:

$$\Delta_t (\Delta m) = \Delta_1 m - \Delta m = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt . \Delta x . \Delta y . \Delta z .$$

Вхождение жидкости в об'ем, а также выхождение ее из него можно представить происходящим тремя независимыми потоками, параллельными координатным осям. Назовем приращения массы в параллелопипеде вызываемые этими потоками через:

$$\Delta_x (\Delta m); \quad \Delta_y (\Delta m); \quad \Delta_z (\Delta m)$$

Тогда очевидно:

$$\Delta_t (\Delta m) = \Delta_x (\Delta m) + \Delta_y (\Delta m) + \Delta_z (\Delta m).$$

Определим сперва приращение $\Delta_x (\Delta m)$. Частица жидкости в момент t в точке A за время dt переместится в рассматриваемом потоке на величину $AF = u_A dt$. Другие частицы A_1; $A_2 \ldots$, лежащие на грани AD, переместятся на величины $A_1 F_1$; $A_2 F_2 \ldots$, так что частицы, находившиеся в момент t на грани AD, будут лежать в момент $t + dt$ на поверхности EF. Вследствие неразрывности массы жидкости взамен переместившихся частиц в об'ем войдут из внешнего пространства новые, которые займут об'ем $AFED = \Delta V$. Найдем массу жидкости в ΔV; средняя плотность жидкости в ΔV бесконечно мало разнится от плотности ρ_A в точке A; самый об'ем также бесконечно мало разнится от об'ема $\Delta y . \Delta z . AF = \Delta y . \Delta z . u_A dt$. Тогда искомая масса равна

$$\rho_A u_A \Delta y . \Delta z . dt + \varepsilon_1;$$

где ε_1 бесконечно малая высшего порядка. Одновременно с этим частицы, лежавшие в момент t на грани BC, передвинутся за время dt по направлению оси X и будут лежать в момент $t + dt$

на поверхности GH. Рассуждая, как и выше, найдем, что масса жидкости, вышедшей из об'ема через грань BC за время dt, равна $\rho_B u_B. \Delta y. \Delta z. dt + \varepsilon_1'$; где ρ_B и u_B соответствуют точке B. Следоват.. приращение массы от потока, параллельного оси X равно:

$$\Delta_x (\Delta m) = (\rho_A u_A - \rho_B u_B)\ \Delta y.\ \Delta z.\ dt + \varepsilon_1 - \varepsilon_1'.$$

Так как: $u = f\ (x; y; z; t)$ и $\rho = f_4\ (x; y; z; t)$, то $\rho_A u_A = \theta\ (x; y; z; t)$ и $\rho_B u_B = \theta\ (x + \Delta x; y; z; t)$. Тогда $(\rho_B u_B - \rho_A u_A) = \Delta_x \{\theta\ (x; y; z; t)\} =$
$= \Delta_x\ (\rho_A u_A)$.

Здесь значек Δ_x указывает, что приращение $(\rho_A u_A)$ взято по x.

Теперь окончательно находим для приращения массы от потока, параллельного оси X:

$$\Delta_x (\Delta m) = -\Delta_x\ (\rho_A u_A)\ \Delta y.\ \Delta z.\ dt + \varepsilon_1 - \varepsilon_1'.$$

Подобным же образом найдем для приращений массы в об'еме, происходящих от потоков, параллельных осям Y и Z, при чем вхождение жидкости рассматриваем через грани AB' и AB'', а выхождение через грани DB' и DB'':

$$\Delta_y (\Delta m) = -\Delta_y\ (\rho_A v_A)\ \Delta x.\ \Delta z.\ dt + \varepsilon_2 - \varepsilon_2'$$
$$\Delta_z (\Delta m) = -\Delta_z\ (\rho_A w_A)\ \Delta x.\ \Delta y.\ dt + \varepsilon_3 - \varepsilon_3'.$$

Складывая найденные приращения и разделяя обе части равенства на $\Delta x.\ \Delta y.\ \Delta z.\ dt$, получаем:

$$\frac{\Delta_t\ (\Delta m)}{\Delta x. \Delta y. \Delta z.\ dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\Delta_x\ (\rho_A u_A)}{\Delta x} - \frac{\Delta_y\ (\rho_A v_A)}{\Delta y} - \frac{\Delta_z\ (\rho_A w_A)}{\Delta z} + \sigma,$$

где σ обозначает сумму бесконечно малых величин. Если теперь, не изменяя положения точки A, размеры параллелопипеда уменьшать непрерывно и подводить их к нулю, то в предыдущем равенстве средняя плотность ρ об'ема обратится в плотность ρ_A для точки A и, следоват., $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho_A}{\partial t}$; затем получаем:

$$\text{пр.} \left\{\frac{\Delta_x\ (\rho_A u_A)}{\Delta x}\right\} = \frac{\partial\ (\rho_A u_A)}{\partial x};\ \text{пр.} \left\{\frac{\Delta_y\ (\rho_A v_A)}{\Delta y}\right\} = \frac{\partial\ (\rho_A v_A)}{\partial y}\quad \text{и т. д.}$$

Величина σ при пределе равна нулю, и получаем:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = -\frac{\partial\ (\rho_A u_A)}{\partial x} - \frac{\partial\ (\rho_A v_A)}{\partial y} - \frac{\partial\ (\rho_A w_A)}{\partial z}.$$

Это равенство заключает величины, относящиеся к точке A; но оно будет справедливо для любой точки; поэтому значки A можно отбросить и получим окончательно:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial\ (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial\ (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \quad \text{. . . . .} \quad (16)$$

Этому уравнению можно дать еще другой вид. Производя указанное дифференцирование, находим:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x}u+\frac{\partial\rho}{\partial y}v+\frac{\partial\rho}{\partial z}w+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0.$$

Сумма первых 4 членов согласно предыдущему равна $\frac{d\rho}{dt}$, а потому окончательно имеем:

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16a)$$

Это равенство справедливо для упругих жидкостей (газов) и для неупругих (капельных). Если жидкость *несжимаема*, то это равенство распадается на два:

$$\rho=C \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Неразрывность массы жидкости при движении является следствием того, что в гидродинамике рассматриваются только такие движения жидкостей, при которых u; v; w; p и ρ суть неразрывные функции 4 независимых переменных x; y; z; t.

Эйлеровы уравнения гидродинамики. В гидростатике мы рассматривали равновесие жидкости под действием внешних сил, проекции которых, отнесенные на единицу массы, суть X; Y; Z, и получили уравнения гидростатики (6). Предположим теперь, что под действием сил жидкость находится в движении; пусть частица жидкости, на единицу массы которой действует внешняя сила, имеющая проекции X; Y; Z, движется со скоростью W, проекции которой суть:

$$u=\frac{dx}{dt};\ v=\frac{dy}{dt};\ w=\frac{dz}{dt}.$$

Единичное давление и плотность этой частицы равны p и ρ. Тогда ускорение для этой частицы на ед. массы будет иметь проекции:

$$I_x=\frac{du}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2};\quad I_y=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2};\quad I_z=\frac{dw}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Вообразим, что на рассматриваемую частицу, кроме предыдущей силы, действует еще сила (фиктивная), проекции которой на ед. массы суть: $-I_x$; $-I_y$; $-I_z$. Тогда на основании принципа Даламбера можно рассматривать эту частицу, как находящуюся в равновесии, и, следоват., для нее будут иметь место уравнения гидростатики. В этом случае проекции внешних сил на ед. массы будут: $(X-I_x)$; $(Y-I_y)$; $(Z-I_z)$. Вставляя эти значения в уравнения (6) гидростатики, получаем:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=X-I_x;\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=Y-I_y;\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=Z-I_z.$$

Вставляя сюда полученные нами выражения для I_x . . . . , находим окончательно:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=X-\left\{\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial u}{\partial z}w\right\}\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=Y-\left\{\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial v}u+\frac{\partial v}{\partial y}v+\frac{\partial v}{\partial z}w\right\}\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=Z-\left\{\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}u+\frac{\partial w}{\partial y}v+\frac{\partial w}{\partial z}w\right\}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Эти уравнения называются *Эйлеровыми;* это дифференциальные уравнения с частными производными. Они выражают в дифференциальной форме законы всяких движений жидкости, лишь бы только входящие сюда величины u; v; w; p и ρ были неразрывными функциями независимых переменных x; y; z; t. Однако интегрировать эти уравнения, т.-е. выразить u; v; w; p и ρ в функции x; y; z; t до сих пор было невозможно в виду недостаточнаго развития этой отрасли высшего анализа. Только в ограниченном числе случаев возможно было найти интеграл Эйлеровых уравнений. В эти уравнения входят *пять неизвестных функций* u; v; w; p и ρ; для их определения нужно иметь *пять уравнений.* Если жидкость несжимаема, то эти пять уравнений будут следующие: три уравнения Эйлера и еще два, а именно:

$$\rho=C \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Когда жидкость упругая, то имеем также пять уравнений: три уравнения Эйлера, уравнение неразрывности (16) и характеристичное уравнение. *Характеристичным* называется такое уравнение, которое дает связь между ед. давлением p и плотностью ρ. Если сжатие и расширение упругой жидкости следует *изотермическому* закону, то характеристичное уравнение имеет вид:

$$p=p_0\,(1+\alpha t)\,\frac{\rho}{\rho_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Когда же жидкость следует закону *адиабатному,* то характеристичное уравнение будет следующее:

$$p=p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Здесь p_0 и ρ_0 суть ед. давление и плотность для какой либо определенной частицы (x_0; y_0; z_0); t — температура газа; α — коэффициент расширения газа, равный $\frac{1}{273}$; γ — отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном об'еме; для воздуха $\gamma=1{,}408$ и для перегретого пара $\gamma=1{,}30$.

При интеприровании Эйлеровых уравнений войдут постоянныя величины, которые определяются по начальным условиям и по граничным условиям. Первыя условия дают значения неизвестных для начального времени, напр. при $t=0$; вторые дают значения неизвестных для частиц жидкости находящихся на границе, напр. на свободной поверхности, на стенке сосуда и т. п.

§ 14. Установившееся движение при силах, имеющих потенціал и при плотности, зависящей от давления. Теорема Даниила Бернулли для совершенных жидкостей. Для того, чтобы движение было установившимся, необходимо и достаточно (§ 12), чтобы u; v; w; p и ρ были функциями только координат и не зависели явным образом от времени t, т. . чтобы существовали равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

Внешние силы должны быть при этом функциями только координат. Тогда очевидно, каждой геометрической точке пространства $P\,(x;\,y;\,z)$, занятаго жидкостью, будут соответствовать определенные величины u; v; w; p и ρ, которые в этой точке не изменяются с течением времени. Частицы жидкости, проходящие последовательно через точку P, следуют по одной и той же траектории и потому через P проходит только *одна* траектория. Пусть силы имеют *потенциал* и силовая функция равна $U\,(x;\,y;\,z)$; следоват.

$$X=\frac{\partial U}{\partial x};\; Y=\frac{\partial U}{\partial y};\; Z=\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Затем положим, что $\rho=f\,(p)$. При таких условиях можно найти интеграл Эйлеровых уравнений, который называется формулой или уравнением Даниила Бернулли.

Для вывода ур. Д. Бернулли положим сперва в Эйлеровых уравнениях (уравн. 18):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial t}=0$$

Затем умножим каждое из уравнений Эйлера соответственно на dx; dy; dz и сложим все три уравнения. Тогда сумма первых частей даст:

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\,dx+\frac{\partial p}{\partial y}\,dy+\frac{\partial p}{\partial z}\,dz\right)=\frac{dp}{\rho}=\frac{dp}{f\,(p)}$$

Сумма первых членов вторых частей равна:

$$Xdx+Ydy+Zdz=\frac{\partial U}{\partial x}\,dx+\frac{\partial U}{\partial y}\,dy+\frac{\partial U}{\partial z}\,dz=dU$$

Затем остальные члены перваго уравнения дадут:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w\right) dx = u \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{vdx}{u} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{wdx}{u}\right)$$

Так как

$$\frac{v}{u} dx = \frac{dy}{dt} dx : \frac{dx}{dt} = dy$$

$$\frac{w}{u} dx = \frac{dz}{dt} dx : \frac{dx}{dt} = dz$$

то получается:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w\right) dx = udu$$

Остальные члены второго и третьяго уравнений дадут:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w\right) dy = vdv;$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w\right) dz = wdw.$$

Так как:

$$W^2 = u^2 + v^2 + w^2, \text{ то } udu + vdv + wdw = d\left(\frac{W^2}{2}\right)$$

На основании изложенного окончательно получаем:

$$\frac{dp}{f(p)} = dU - d\left(\frac{W^2}{2}\right) \dots \dots \dots (21)$$

Пусть (черт. 52) траектория частицы есть M_0M; значения W; U и p для точек M_0 (x_0; y_0; z_0) и M (x; y; z) суть W_0; U_0; p_0 и W; U; p. Тогда интегрируя уравн. (21) по линии $M_0\,M$, находим:

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{f(p)} = \int_{U_0}^{U} dU - \int_{W_0}^{W} d\left(\frac{W^2}{2}\right) = (U - U_0) - \frac{W^2 - W_0^2}{2} \dots (22)$$

Можно это равенство переписать так:

$$\frac{W^2}{2} - U + \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{f(p)} = \frac{W_0^2}{2} - U_0 = C \dots \dots (22a)$$

Это равенство есть искомый интеграл Эйлеровых уравнений и называется *уравненеим Д. Бернулли для совершенных жидкостей*. Оно справедливо для совершенных жидкостей как упругих так и не сжимаемых и выражает, что сумма количеств, стоящих в левой части, есть величина постоянная для всякой частицы, движущейся по определенной траектории. Постоянная C различна для различных траекторий; она имеет постоянную величину для всех траекторий, т. е. для всей жидкости, только в случае потенциала скоростей.

Случай тяжелой несжимаемой жидкости. Как показано в гидростатике, для этого случая имеем силовую функцию: $U = -gdz$; $f(p) = \rho = C$. Так как

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho}(p - p_0)$$

то уравн. (22) напишем в следующем виде, разделяя на g и заменяя ρg через Δ:

$$\frac{W^2 - W_0^2}{2g} = \left(z_0 + \frac{p_0}{\Delta}\right) - \left(z + \frac{p}{\Delta}\right) \quad \ldots \ldots \ldots (23)$$

Это искосное *уравн. Д. Бернулли* для совершенных несжимаемых жидкостей при действии только силы тяжести. Уравн. (23) можно переписать еще так:

$$z + \frac{p}{\Delta} + \frac{W^2}{2g} = z_0 + \frac{p_0}{\Delta} + \frac{W_0^2}{2g} = C \quad \ldots \ldots (23a)$$

Для случая равновесия имеем: $W = W_0 = 0$ и уравн. (23) дает нам известный закон Паскаля (уравн. 10), следов. закон. Паскаля есть частный случай уравн. Д. Бернулли.

Уравнение Д. Бернулли представляет собою основание всей гидравлики, почему играет особо важную роль в ней. Можно сказать, что почти все задачи гидравлики решаются при помощи этого уравнения.

Второе доказательство теоремы Д. Бернулли для тяжелой несжимаемой жидкости. Внутри жидкости возьмем бесконечно малый замкнутый контур σ_0 (черт. 53); через точки этого контура проходят различные траектории, образующие элементарную трубку $\sigma_0\,\sigma$. Частицы проходящие через площадь, ограниченную контуром σ_0, движутся внутри трубки. Совокупность этих частиц образует *струю.* Рассмотрим конечную часть струи, ограниченную элементарными площадками ω_0 и ω; длина струи конечная величина. Применим теорему живых сил к массе жидкости, заключающейся в струе $\omega_0\,\omega$. Живая сила частиц в этой струе для момента t равна:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{1}{2} W^2\, dm$$

где dm—масса частицы и W—ея скорость; интегрирование распространяется на все частицы струи. Затем определим живую силу *тех же* частиц для момента $(t + dt)$. За время dt частицы об'ема $\omega_0\,\omega$ переместятся

по своим траекториям и займут об'ем $\omega_1 \omega_2$; живая сила частиц в этом об'еме равна:

$$\int_{\omega_2}^{\omega_1} \frac{1}{2} W^2 \, dm$$

Струю $\omega_0 \omega$ можно разбить на две части: бесконечно малую $\omega_0 \omega_1$ и конечную $\omega_1 \omega$; струю $\omega_1 \omega_2$ также разбиваем на бесконечно малую $\omega \omega_2$ и на конечную $\omega_1 \omega$. Так как длина $\omega_0 \omega_1 = ds_0 = W_0 dt$, где W_0—скорость одинаковая для всех частиц в об'еме $\omega_0 \omega_1$, то масса об'ема $\omega_0 \omega_1$ равна:

$\Delta m_0 = \frac{\Delta}{g} \omega_0 W_0 dt$ а живая сила его равна $\Delta m_0 . \frac{W_0^2}{2} = \left(\frac{\Delta}{g} \omega_0 W_0 dt\right) \frac{W_0^2}{2}$

Живая сила частиц в об'еме $\omega \omega_2$ равна:

$$\Delta m . \frac{W^2}{2} = \left(\frac{\Delta}{g} \omega \, W dt\right) \frac{W^2}{2}$$

На основании вышеизложенного можно написать равенства:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{1}{2} W^2 \, dm = \frac{\Delta}{g} \omega_0 \, W_0 \, dt. \, \frac{W_0^2}{2} + \int_{\omega_1}^{\omega} \frac{1}{2} W^2 \, dm$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{2} W^2 \, dm = \frac{\Delta}{g} \omega \, W dt. \, \frac{W^2}{2} + \int_{\omega_1}^{\omega} \frac{1}{2} W^2 \, dm$$

Вычтя первое равенство из второго, получим приращение живой силы частиц в струе $\omega_0 \omega$ за время dt. Вторые члены вторых частей представляют живую силу частиц в об'еме $\omega_1 \omega$ в момент t и в момент $t + dt$; эти выражения равны между собою, так как движение установившееся, а потому, какая бы частица не находилась в любой точке a разсматриваемаго об'ема, всегда живая сила ее в этой точке будет одна и та же. И так искомое приращение живой силы равно:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{2} W^2 \, dm - \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{1}{2} W^2 \, dm = \frac{\Delta}{2g} \omega_0 \, W_0 \, dt \, (W^2 - W_0^2)$$

Здесь об'емы $(\omega_0 \, W_0 \, dt)$ и $(\omega \, W \, dt)$ равны между собою, так как очевидно массы об'емов $\omega_0 \omega_1$ и $\omega \omega_2$ равны, а следоват. равны и самые об'емы, ибо жидкость несжимаемая.

Только что найденное приращение живой силы нужно по теореме живых сил приравнять работе всех сил, приложенных к частицам об'ема $\omega_0 \omega$, в их элементарном перемещении. Силы эти следующие: 1) Давление на площадку ω_0 равное $p_0 \omega_0$; работа его равна: $p_0 \omega_0 \cdot ds_0 =$

$p_0\omega \cdot W_0\, dt$. 2) Давление на площадку ω равное $p\omega$; работа его равна: $-p\omega \cdot ds_1 = -p\omega \cdot W dt$; здесь поставлен знак — потому, что направления силы и перемещения прямопротивопожны. 3) Давления на боковой поверхности струи $\omega_0\,\omega$; работа их равна нулю, так как направление давлений нормально к боковой поверхности струи, а следоват. и к перемещению частиц. 4) Вес частиц. Найдем работу этого веса. Элементарная работа силы тяжести на единицу массы равна по общей формуле (когда ось Z направлена вертикально вверх):

$$P.ds.\ Cos\ (P;ds) = Xdx + Ydy + Zdz = -gdz$$

По этому элементарная работа веса P массы m струи $\omega_0\,\omega$ равна $-mgdz = -Pdz$.

Если центр тяжести этой массы перемещается по вертикальному направлению с z до $z' = z + dz$, то работа веса P в этом перемещении равна $-P\ (z' - z) = -Pdz$. Обозначим вес частей $\omega_0\,\omega_1$; $\omega_1\,\omega$ и $\omega\,\omega_2$ через P_1; P_2 и P_3; разстояния их центров тяжести от произвольной горизонтальной плоскости пусть равны z_1; z_2 и z_3. Разстояния от той же плоскости центров тяжести об'емов: $\omega_0\,\omega$ и $\omega_1\,\omega_2$ обозначим через z и z'. Тогда по известной теореме статики имеем:

$$(P_1 + P_2)\,z = P_1 z_1 + P_2 z_2;\ (P_2 + P_3)\,z' = P_2 z_2 + P_2 z_3$$

Очевидно, что $P_1 = P_3$; затем $P_1 + P_2 = P$; тогда вычитанием первого равенства из второго и переменой знака у остатка получаем работу веса струи $\omega_0\omega$:

$$-P\,(z' - z) = -Pdz = -P_1\,(z_3 - z_1)$$

Так как

$$P_1 = \Delta\omega_0\, W_0\, dt;\quad z_1 = z_0 + \alpha;\quad z_3 = z + \beta$$

где z_0 и z — ординаты центров тяжести площадок ω_0 и ω; α и β суть бесконечно малые величины; поэтому

$$-Pdz = -\Delta\omega_0\, W_0\, dt\ (z - z_0 + \beta - \alpha)$$

Найденное приращение живой силы приравниваем работе сил; тогда получим:

$$\frac{\Delta}{2g}\,\omega_0 W_0 dt\,(W^2 - W_0{}^2) = p_0\omega_0 W_0 dt - p\omega W dt - \Delta\omega_0\, W_0\, dt\,(z - z_0 + \beta - \alpha)$$

Разделим это равенство на $\Delta\omega_0\, W_0\, dt$; тогда переходя к пределу подведением ds_0 и ds_1 к нулю, получим: $\alpha = \beta = 0$, и затем имеем:

$$\frac{W^2 - W_0{}^2}{2g} = \left(z_0 + \frac{p_0}{\Delta}\right) - \left(z + \frac{p}{\Delta}\right)\ \ldots\ldots\ (23)$$

Что и требовалось доказать.

Плоскость напора; кривыя давлений и скоростей. В уравнении Д. Бернулли члены

$$\frac{W_0^2}{2g} \text{ и } \frac{p_0}{\Delta}$$

представляют некоторые высоты; обозначим:

$$\frac{p_0}{\Delta}=h_0;\quad \frac{p}{\Delta}=h;\quad \frac{W_0^2}{2g}=h'_0;\quad \frac{W^2}{2g}=h'.$$

Тогда уравн. Д. Бернулли (23а) можно представить в такой простой форме:

$$z+h+h'=z_0+h_0+h'_0=C\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (23b)$$

Это выражение показывает, что в установившемся движении совершенной тяжелой несжимаемой жидкости сумма 3-х высот, а именно: ординаты z, высоты соответствующей ед. давлению $\frac{p}{\Delta}$ (так называемая *пьезометрическая высота*), и высоты скорости $\frac{W^2}{2g}$ есть величина постоянная для частицы, движущейся по какой-либо траектории. Откладывая по вертикали вверх от точек M_0 и M (черт. 52) отрезки:

$$M_0b=\frac{p_0}{\Delta};\ bc=\frac{W_0^2}{2g};\ Me=\frac{p}{\Delta} \text{ и } ef=\frac{W^2}{2g}$$

найдем в силу предыдущаго равенства, что $ac=df$; следоват. концы отрезков c; f . . . . лежат в одной и той же горизонтальной плоскости cf, которая называется *плоскостью напора* для разсматриваемой траектории. Кривая be называется *кривой скоростей*, так как ординаты ее относительно плоскости cf дают соответственныя высоты скоростей; она же называется *кривой давления*, так как вертикальные расстояния между be и траекторией M_0M представляют высоты соответственных давлений. При установившемся движении несовершенной жидкости, как будет показано ниже, эти кривыя различны между собою; при совершенной жидкости они совпадают.

Напор. Вообразим в различных точках M_0; M . . . . . (черт. 52) траектории вертикальные тонкие трубки открытые сверху, так называемые пьезометры; жидкость в них поднимается на высоту соответственную ед. давлению в этих точках, так что

$$M_0b=\frac{p^0}{\Delta};\ Me=\frac{p}{\Delta} \text{ и т. д.}$$

Высоты M_0b; Me . . . называются *пьезометрическими высотами*, а уровни b; e . . . называются *пьезометрическими уровнями*. Разность $ee'=y$ пьезометрических уровней b и e для точек M_0 и M называется

напором между этими точками. Из чертежа и из уравн. (23) видно, что напор равен:

$$y = ab - de = \left(z_0 + \frac{p_0}{\Delta}\right) - \left(z + \frac{p}{\Delta}\right) = \frac{W^2 - W_0^2}{2g} \quad . \ . \ . \ . \ (23)$$

Смотря потому, будет ли $W \lesseqgtr W_0$ напор $y \lesseqgtr 0$. Напр. для точек M_0 и M получается напор $y > 0$.

Скорость. Из уравн. (23) получаем скорость частицы

$$W = \sqrt{2g\left((z_0 - z) + \frac{p_0 - p}{\Delta} + \frac{W_0^2}{2g}\right)} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (24)$$

Из этого выражения видно, что при одних и тех же условиях скорость W возрастает с уменьшением ед. давления p. *Maxim.* W получается при $p = 0$, что указывает на то, что скорость в струе не может превзойти известного предела.

Во многих случаях ед. давления в начале и конце траектории равны т.-е. $p_0 = p$; напр. при вытекании жидкости из сосуда через отверстия, В этом случае точку M_0 (черт. 54) возьмем на свободной поверхности, где $p = p_0$ — атмосфернему давлению; точку M возьмем в сжатом сечении струи (по выходе ея из отверстия), которое мы можем охарактеризовать тем, что в нем $p = p_0$ для всех точек. Тогда, обозначая $z_0 - z) = H$, получим:

$$W = \sqrt{2g\left(H + \frac{W_0^2}{2g}\right)} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (24\,a$$

Скорость W_0 называется начальною скоростью или скоростью притекания. Скорость, определенная по форм. (24) и (24*a*), называется *теоретическою* и относится к совершенной жидкости; мы будем обозначать ее через W_t в отличие от практической или действительной W_p, имеющей место для вязкой или несовершенной жидкости. При $W_0 = 0$ получается формула *Торичелли*:

$$W = \sqrt{2gH}. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (25),$$

Кинетическая и потенциальная энергия движущейся частицы жидкости. В уравн. Д. Бернулли члены

$$\frac{W_0^2}{2g} \text{ и } \frac{W^2}{2g}$$

представляют собою *кинетическую* (видимую) *энергию* частицы, вес которой равен единице, в положении M_0 и M; члены

$$\left(z_0 + \frac{p_0}{\Delta}\right) \text{ и } \left(z + \frac{p}{\Delta}\right)$$

представляют собою *потенциальную* (скрытую) *энергию* той же частицы и для тех же положений. В таком случае уравнение (23*a*) показывает,

что для частицы, описывающей какую-либо траекторию $M_0 M$, сумма кинетической и потенциальной энергий есть величина постоянная, которая называется *полной энергией* частицы. При движении частицы один вид энергии может переходить в другой с сохранением постоянства суммы их. Системы частиц, в которых полная энергия остается постоянной, называются *консервативными* в отличие от систем, в которых полная энергия убывает с течением времени и которые называются *диссипативными*. К первым системам принадлежат совершенные жидкости и ко вторым—несовершенные (с трением).

§ 15. Теорема Д. Бернулли для несовершенных жидкостей.

В параллель с теоремой Д. Бернулли для совершенных жидкостей покажем применение ее к несовершенным жидкостям для установившегося движения. Для этого обратимся к Эйлеровым уравнениям (18). В них надо положить для установившегося движения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

Обозначим через φ силу трения на единицу массы движущейся жидкости, а через φ_x; φ_y; φ_z — проекции этой силы. Прибавим силу φ к числу других внешних сил, действующих на жидкость, суммы проекций которых в уравн. (18) обозначены через X; Y; Z. Тогда уравн. (18) примут такой вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= X + \varphi_x - \left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w\right) \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= Y + \varphi_y - \left(\frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w\right) \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= Z + \varphi_z - \left(\frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (26)$$

Умножая эти уравнения последовательно ка dx; dy; dz и складывая, получим так же, как в § 14, при силах, имеющих потенциал:

$$\frac{dp}{f(p)} = dU + \varphi_x\, dx + \varphi_y\, dy + \varphi_z\, dz - d\left(\frac{W^2}{2}\right) \quad \ldots\ldots (27)$$

Если обозначить через dz путь, проходимый точкой приложения силы φ, и через γ — угол между φ и ds, то получим элементарную работу силы трения:

$$\varphi_x\, dx + \varphi_y\, dy + \varphi_z\, dz = \varphi\, ds.\ Cos\gamma.$$

Интегрируя уравн. (27) по линии тока $M_0 M$ (черт. 55), находим подобно тому как при выводе уравн. (22):

$$\frac{W^2 - W_0^2}{2} - (U - U_0) + \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{f(p)} - \int_{s_0}^{s} \varphi\, ds.\ Cos\gamma = 0. \quad \ldots (28)$$

Здесь W и W_0 суть скорости; U и U_0 — значения силовой функции и p_0 и p — ед. давления в точках M_0 и M; s_0 и s — расстояния этих точек от какой-либо произвольной точки A на траектории. Это равенство справедливо для жидкостей как упругих так и капельных.

Случай несовершенной тяжелой несжимаемой жидкости. Для этого случая имеем: $U = -gz$; $U_0 = -gz_0$; далее:

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{f(p)} = \frac{1}{\rho}(p - p_0).$$

Величина $\varphi\, ds \operatorname{Cos} \gamma < 0$, так как по самому понятию о силе трения угол между силой φ и перемещением ds должен быть тупой; поэтому

$$\int_{s_0}^{s} \varphi\, ds \operatorname{Cos} \gamma < 0.$$

Этот интеграл представляет работу сил трения на пути от s_0 до s т. е. между точками M_0 и M на единицу массы. Тот же интеграл, деленный на g, дает работу сил трения на единицу веса, и так как его величина отрицательная, то можно представить его некоторой высотой, взятой со знаком минус. Интеграл $\int_{s_0}^{s}$ можно представить как разность: $\int_{s_0}^{s} = \int_0^{s} - \int_0^{s_0}$

Каждый из них, деленный на g, равен некоторой высоте со знаком минус.

Пусть

$$\frac{1}{g}\int_0^{s} = -h''; \; \frac{1}{g}\int_0^{s_0} = -h_0''; \text{ тогда } \int_{s_0}^{s} = -(h'' - h_0'').$$

Теперь в уравнении (28) разделим все члены на g и получим:

$$\frac{W^2 - W_0^2}{2g} + (h'' - h_0'') = \left(z_0 + \frac{p_0}{\Delta}\right) - \left(z + \frac{p}{\Delta}\right) \quad \ldots \quad (29)$$

Это искомое *уравнение Д. Бернулли* для *несовершенной*, тяжелой и несжимаемой жидкости. Оно вместе с уравн. (23) постоянно применяется в гидравлике и является основным для нее.

Сравнивая это уравнение с уравн. (23), видим, что в левой части появился новый член $(h'' - h_0''')$, соответствующий работе гидравлических сопротивлений (сил трения) на единицу веса при перемещении частицы из M_0 в M. Скорость W, определенная из уравн. (29), назы-

вается *практической* и обозначается через W_p. Отношение этой скорости к теоретической называется *коэффициентом скорости* φ; следоват., $\varphi = \frac{W_p}{W_t}$. Очевидно, φ всегда меньше единицы, так как трение всегда уменьшает скорость.

Плоскость напора, кривыя скоростей и давлений. Предыдущее равенство можно переписать еще в таком виде:

$$z + \frac{p}{\Delta} + \frac{W^2}{2g} + h'' = z_0 + \frac{p_0}{\Delta} + \frac{W_0^2}{2g} + h_0'' = C \quad . \; . \; . \; . \; (29a),$$

что аналогично уравн. (23a). Выше было обозначено:

$$\frac{p}{\Delta} = h; \; \frac{p_0}{\Delta} = h_0; \; \frac{W^2}{2g} = h'; \; \frac{W_0^2}{2g} = h_0'.$$

Тогда можно написать еще так:

$$z + h + h' + h'' = z_0 + h_0 + h_0' + h_0'' = C \quad . \; . \; . \; . \; . \; (29b)$$

Это равенство показывает, что в случае несовершенной жидкости при движении частицы по траектории сумма *четырех* высот есть величина постоянная, а именно: сумма ординаты, высоты ед. давления (пьезометрическая высота), высоты скорости и высоты гидравлических сопротивлений. Последняя высота, по самому определению работы трения, всегда увеличивается с течением времени, т. е. с передвижением частицы по траектории. Каждая же из прочих трех величин может и увеличиваться и уменьшаться. Очевидно, увеличение высоты гидравлических сопротивлений может совершаться только на счет уменьшения суммы прочих высот, т. е. на счет полной энергии частицы. И так в этом случае происходит уменьшение полной энергии, поглощаемой силами трения.

Для точки M_0 (черт. 55) откладываем вверх по вертикали высоты:

$$\frac{p_0}{\Delta}; \; h_0''; \; \frac{W_0^2}{2g}$$

и делаем то же самое для точки M; тогда согласно уравн. (29b) линия $ad = ei = \; . \; . \; .$; следоват., концы отрезков d; i . . . лежат в горизонтальной плоскоети di, называемой *плоскостью напора* для рассматриваемой траектории $M_0 M$. Кривая bf называется *кривой давлений*, а кривая cg—*кривой скоростей*; вертикальное расстояние bc; fg . . . между обеими кривыми равно *высоте гидравлических сопротивлений*, считая их от какой-либо произвольной точки A, принятой за начальную, до рассматриваемой точки M_0; M . . . Если поместить в M_0 и M пьезометрические трубки, то жидкость в них поднимется на высоту M_0b и Mf. Разность пьезометрических уровней, т.-е.

$$\left(z_0 + \frac{p_0}{\Delta}\right) - \left(z + \frac{p}{\Delta}\right) = ab - ef = fk = y$$

есть напор y между точками M_0 и M, равный fk. При совершенной жидкости, как было показано выше (уравн. 23), напор y равен приращению высоты скорости, т.-е.

$$y=\left(z_0+\frac{p_0}{\Delta}\right)-\left(z+\frac{p}{\Delta}\right)=\frac{W^2-W_0^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots (23)$$

Для несовершенной жидкости напор равен:

$$y=\left(z_0+\frac{p_0}{\Delta}\right)-\left(z+\frac{p}{\Delta}\right)=\frac{W^2-W_0^2}{2g}+(h''-h_0'') \quad \ldots \ldots (29)$$

Напор может быть положительной или отрицательной величиной. Высота h'' всегда больше h_0'', как об'яснено выше. В заключение заметим, что уравн. (23) показывает, что при совершенной жидкости нужно знать W; p и z только для начальной и конечной точек M_0 и M траектории $M_0 M$ описываемой частицею; вид же траектории безразличен. В случае несовершенной жидкости вся траектория $M_0 M$ играет существенную роль, так как видом ее обусловливается член $(h''-h_0'')$.

§ 16. Установившееся движение газов при вытекании из сосудов. Формулы Навье и С. Венана-Вантцеля. Два закона вытекания газов. Применим к случаю *газов* общую формулу (22) установившегося движения для всяких жидкостей. Положим, что размеры отверстия ω весьма малы сравнительно с размерами сосуда (черт. 56). Газовая струя, по выходе из отверстия, сжимается и получается сжатое сечение Ω. Определим скорость W_1 в точке M_1, взятой в этом сечении. Давление в сжатом сечении обозначим через p_1; атмосферное давление обозначим через P.

В формуле (22) можно принять $W_0=0$ по ее малости; затем член: $-(U-U_0)=g\,(z-z_0)$ представляющий работу веса частицы, масса которой равна единице, весьма мал и потому отбрасывается. Поэтому получим:

$$W_1^2=2\int_{p_1}^{p_0}\frac{dp}{f(p)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (30)$$

Относительно вида функции $\rho=f(p)$ сделаем два предположения. *a*) Пусть газ сжимается по *адиабатному* закону. Представим себе цилиндр, в котором от действия пара движется поршень вправо и влево. Если при движении вправо газ расширяется, то его температура падает, а при движении влево газ сжимается и температура повышается. Так как стенки цилиндра предполагаются непроницаемыми для теплоты (адиабатны по Ренкину), то температура в конце процесса остается

тою же, что и при начале. В этом случае характеристичное уравн. (20) имеет вид:

$$\rho=\rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Следоват.,

$$W_1^2=2\frac{p_0^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho_0}\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p^{\frac{1}{\gamma}}}=2\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left\{1-\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\}$$

Откуда, обозначая $\rho_0\, g=\Delta_0$, получаем окончательно

$$W_1=\sqrt{2g\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\Delta_0}\left\{1-\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\}} \quad \ldots\ldots\ldots (31)$$

Это выражение называется формулой *С. Венана-Вантцеля (Цейнера)*; она получена в 1839 г.

b) Если расширение и сжатие газа происходит по *изотермическому* закону, то температура газа остается постоянной, так как при движении поршня вправо, когда температура падает, подводится в цилиндр тепло извне, а при движении влево, когда температура повышается, тепло отводится в сторону охлаждением цилиндра водою.

Характеристичное уравнение (19) будет следующее:

$$\rho=\frac{\rho_0}{p_0(1+\alpha t)}p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19a)$$

Тогда из уравн. (30) получаем:

$$W_1^2=2\frac{p_0(1+\alpha t)}{\rho_0}\int_{p_1}^{p_0}\frac{dp}{p}=\frac{2p_0(1+\alpha t)}{\rho_0}\, lg\ nat\left(\frac{p_0}{p_1}\right)$$

отсюда находим:

$$W_1=\sqrt{\frac{2g\,p_0(1+\alpha t)}{\Delta_0}\, lg\ nat\left(\frac{p_0}{p_1}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots (32)$$

Это выражение называется формулой *Навье*.

В форм. (31 и 32) давление p_1 в сжатом сечении можно принимать равным атмосферному P, пока $p_0 \leqq 1{,}89\ P$.

Если $p_0>1{,}89\ P$, то скорость надо определять, как показано ниже.

c) Если давление p_1 довольно близко к p_0, то вместо точной формулы (31) можно получить следующее простое приближенное выражение для W_1, пользуясь разложением по биному Ньютона. Положим $p_1=p_0-\alpha$; тогда

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=\left(\frac{p_0-\alpha}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=\left(1-\frac{\alpha}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=1-\frac{(\gamma-1)}{\gamma}\frac{\alpha}{p_0}+\cdots$$

Следоват., ограничиваясь в этом разложении только двумя первыми членами, получим:

$$1-\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{a}{p_0}.$$

Теперь из уравн. (31) находим:

$$W_1=\sqrt{\frac{2g\,a}{\Delta_0}}=\sqrt{2g\left(\frac{p_0-p_1}{\Delta_0}\right)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(33)$$

Это искомое приближенное выражение. Оно тожественно с формулой Торичелли, полученной для несжимаемых жидкостей.

Действительно, полагая $\left(\frac{p_0-p_1}{\Delta_0}\right)=H$, напишем:

$$W=\sqrt{2gH}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(25)$$

Поэтому заключаем, что при малой разности давлений внутри и не сосуда вытекание газа следует тому же закону, что и несжимаемые тяжелые жидкости.

d) **Численный пример.** Определим по найденным формулам скорость вытекания сухого атмосфернаго воздуха при $t=12^0$ C при условии что давление в сосуде $p_0=1{,}2$ атмосферы и что вытекание происходит в атмосферу, следоват., $p_1=P=760$ м.м. Вес куб. метра воздуха при давлении в одну атмосферу, т.-е. при 760 м.м. ртутного столба и при $t^0=0^0$, равен $\Delta=1{,}2932$ килогр.; а при давлении в 1,2 атм. и при $t=12^0$ он равен:

$$\Delta_0=\Delta\cdot\frac{p_0}{p_1}\cdot\frac{1}{(1+\alpha t)}=1{,}2932\cdot1{,}2\cdot\frac{1}{1+0{,}003665.12}=1{,}486 \text{ килогр.}$$

Давление в одну атмосферу $p=10330$ килогр. на квадр. метр; коэффиц. $\gamma=1{,}408$ для атмосферного воздуха; $\frac{\gamma-1}{\gamma}=0{,}2898$ и $\frac{\gamma}{\gamma-1}=3{,}451$.

По форм. С. Венана и Вантцеля (Цейнера):

$$W_1=\sqrt{2\cdot9{,}81\cdot\frac{1{,}408}{0{,}408}\cdot\frac{1{,}2.10330}{1{,}486}\left[1-\left(\frac{1}{1{,}2}\right)^{0{,}2898}\right]}=170{,}5 \text{ метров.}$$

По форм. Навье:

$$W_1=\sqrt{2\cdot9{,}81\cdot\frac{1{,}2.10330}{1{,}486}(1+0{,}003665\cdot12)\ lg\ nat\ (1{,}2)}=176{,}5 \text{ метров.}$$

По приближенной формуле:

$$W_1=\sqrt{2\cdot9{,}81\cdot\frac{0{,}2.10330}{1{,}486}}=165{,}2 \text{ метров.}$$

e) **Два закона вытекания газа из сосудов.** Выведенныя выше формулы (31 и 32) для скорости W_1 газа справедливы только тогда, когда

давление p_0 в сосуде не превосходит известного предела, для воздуха равного $1{,}89\,P$ (P — атмосферное давление). При давлении $p_0 > 1{,}89\,P$ вытекание, как показали опыты, происходит по другому закону, при чем скорость W_2 остается *постоянной*, соответствующей давлению $p_0 = 1{,}89\,P$, хотя бы давление в сосуде и возрастало. Объясним это.

Если по трубе протекает *неупругая жидкость*, то, обозначив поперечные сечения трубы ω_0; $\omega_1 \ldots$, а соответственные скорости W_0; $W_1 \ldots$, получим:

$$\omega_0\ W_0 = \omega_1\ W_1 = \ldots = Q = \text{постоянному}.$$

Это — *равенство объемов* жидкости, протекающих через разные поперечные сечения трубы.

При протекании по трубе *упругой жидкости* получается следующее равенство:

$$\rho_0\ \omega_0\ W_0 = \rho_1\ \omega_1\ W_1 = \ldots\ldots = \text{постоянному} = M.$$

Умножая все члены на g и обозначая $\rho_0 g = \Delta_0$; $\rho_1 g = \Delta_1$ и т. д., имеем:

$$\Delta_0 W_0 = \Delta_1 W_1 = \ldots\ldots = G = \text{постоянному}.$$

Это — *равенство весов* жидкости, протекающих через разныя поперечные сечения трубы, или, что все равно, *равенство масс* жидкости.

Рассмотрим вытекание газа из сосуда при тех же условиях, что и выше, и определим *вес* газа, протекающаго через сжатое сечение Ω газовой струи, пользуясь для скорости W_1 вытекания формулой (31) и для плотности ρ_1 формулой (20).

Тогда

$$\Delta_1 = g\rho_1 = g\rho_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \Delta_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Следоват.,

$$G_1 = g\rho_1(\Omega W_1) = \Delta_1 \Omega W_1 = \Omega \sqrt{2g\,\frac{\gamma}{\gamma-1}\,p_0\Delta_0 \left\{ \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right\}} \ldots\ldots (a)$$

Из этого выражения видно, что вес G_1 зависит от соотношения давлений: p_0 — в сосуде и p_1 — в сжатом сечении; обозначим $x = \frac{p_1}{p_0}$.

Определим, при каком значении x вес вытекающего газа будет *наибольшим;* для этого нужно определить x из равенства:

$$\frac{dG_1}{dx} = 0.$$

Равенство (a) можно переписать в таком виде:

$$G_1 = \Omega \sqrt{2g \frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 \Delta_0} \sqrt{x^{\frac{2}{\gamma}} - x^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}};$$

тогда

$$\frac{dG_1}{dx} = C \left\{ \frac{2}{\gamma} x^{\frac{2}{\gamma}-1} - \frac{\gamma+1}{\gamma} x^{\frac{1}{\gamma}} \right\} = 0$$

Отсюда

$$x = \left(\frac{p_1}{p_0}\right) = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

Для воздуха $\gamma = 1{,}408$ и получается $x = 0{,}53$, т.-е. $p_1 = 0{,}53\ p_0$; для перегретого пара $\gamma = 1{,}30$ и $x = 0{,}58$; следоват., $p_1 = 0{,}58\ p_0$.

Теперь находим значение maxim G:

$$\text{maxim } G = \Omega \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \sqrt{2g \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right) p_0 \Delta_0} \ldots\ldots\ldots\ldots (d)$$

Соответственная скорость равна:

$$W_2 = \sqrt{2g \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right) \frac{p_0}{\Delta_0}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (e)$$

Эта скорость равна для воздуха ***скорости звука*** при давлении $p_1 = 0{,}53 p_0$ и при плотности ρ_1. Для воздуха получается $W_2 = 302$ м. и для перегретого пара $W_2 = 560$ м. При возрастании p_0 величина $\left(\frac{p_0}{\Delta_0}\right)$, а следоват., и величина W_2 скорости вытекания остается ***постоянной***, что и подтверждается опытом. Вес G с возрастанием p_0 увеличивается.

Так как для воздуха $x = \left(\frac{p_1}{p_0}\right) = 0{,}53$, то полагая, что давление p_1 в сжатом сечении равно атмосферному P, находим:

$$p_1 = 0{,}53 p_0 = P;\ \text{откуда}\ p_0 = 1{,}89 P.$$

Итак, получаются ***два закона*** вытекания: a) если в сосуде давление $p_0 \lesseqgtr 1{,}89\,P$, то давление в сжатом сечении $p_1 = P$ и скорость вытекания W_1 следует определять по форм. (31 и 32); b) при $p_0 > 1{,}89\,P$ вытекание происходит по другому закону, при чем скорость W_2 надо определять по форм. (e); она соответствует наибольшему весу вытекающего газа; давление в сжатом сечении $p_1 = 0{,}53 p_0$.

По исследованиям проф. *С. А. Чаплыгина* при $p_0 > 1{,}89\,P$ газовая струя имеет вид пламени светильного газа, выходящего из рожка (черт. 56a). В сжатом сечении давление $p_1 > 0{,}53\,p_0$; в части A давление также больше $0{,}53 p_0$; на контуре abc давление равно $0{,}53 p_0$; в

части C давление меньше $0{,}53p_0$; в атмосфере B получаются звуковые волны. Давление при переходе из A в B резко падает.

§ 17. Прямолинейное и параллельное движение частиц. Независимое (свободное) движение частиц. При рассмотрении движения жидкостей в трубах, реках и каналах предполагается, что частицы движутся по прямым параллельным между собою. Рассмотрим свойства такого рода движения, для чего воспользуемся Эйлеровыми уравнениями (18) и уравн. неразрывности (17). Выберем ос X по направлению движения, составляющему с горизонтом угол α, ось Y горизонтально и ось Z—вверх перпендикулярно к плоскости XY (черт. 57); пусть на жидкость действует только сила тяжести. Для какой-либо частицы имеющей массу равную единице, получаем проекцию единичной силы K:

$$X = g\,\mathrm{Sin}\,\alpha;\quad Y = 0;\quad Z = -g\,\mathrm{Cos}\,\alpha.$$

Проекции скорости $v = w = 0$. Из уравнения (17) получаем $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Тогда Эйлеровы уравнения примут вид:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = g\,\mathrm{Sin}\,\alpha - \frac{\partial u}{\partial t};\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0;\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g\,\mathrm{Cos}\,\alpha\ \ .\ .\ .\ (34)$$

Сравнивая п следние *два* уравнения с уравн. (6) гидростатики, заключаем, что в любом *поперечном сечении mn* (перпендикулярном к направлению движения) ед. давления p распределяются по гидростатическому закону. Поэтому, если в различных точках этого сечения поставить пьезометры a; b; c, то уровни жидкости в них будут лежать в одной горизонтальной плоскости ss, совершенно так, как если бы жидкость находилась в покое. Скорость какой-либо частицы в рассматриваемом движении $u = f(y;z;t)$ и не зависит от x; поэтому жидкость можно представить состоящей из бесконечно тонких цилиндров с производящими параллельными оси X; тогда в каждый момент скорость частиц, заключающихся в каком-либо цилиндре, будет одна и таже, хотя и различная для разных цилиндров.

Если прямолинейное движение частиц есть *установившееся*, то $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, а потому $u = f(y;z)$; следоват., движение вышеупомянутых цилиндров будет равномерным. Предыдущие все *три* уравнения оказываются в этом случае тожественными с уравн. (6) гидростатики; следоват. ед. давления во *всех точках* жидкости распределяются по гидростатическому закону. Это заключение относится к совершенным жидкостям. Если жидкость несовершенная, то как при неустановившемся, так и при установившемся движении закон распределения давлений в каждом

поперечном сечении mn; m_1n_1... — гидростатический. Поэтому в сечении mn пьезометрические уровни лежат в горизонтальной плоскости ss, а в сечении m_1n_1 они лежат в горизонтальной плоскости s_1s_1. Вертикальное расстояние между этими плоскостями равно высоте h, которая называется *потерей напора* (на трение) между сечениями mn и m_1n_1. Если жидкость совершенная, то потеря напора $h=0$ и горизонтальные плоскости ss и s_1s_1 совпадают.

При *независимом* или *свободном* движении частицы перемещаются так, как если бы они двигались под действием сил к ним приложенных (напр., силы тяжести) независимо друг от друга. В этом случае проекции внешней силы K на единицу массы равны соответственным проекциям ускорения частицы, т.-е.

$$X=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{du}{dt};\ Y=\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv}{dt};\ Z=\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{dw}{dt},$$

тогда уравнения (18) гидродинамики примут вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=0;\ \frac{\partial p}{\partial y}=0;\ \frac{\partial p}{\partial z}=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

Следоват. в рассматриваемом случае $p=f(t)$, т.-е. ед. давления во *всех точках* жидкости в любой момент равны между собою. Если независимое движение есть *установившееся*, то $\frac{\partial p}{\partial t}=0$ и тогда $p=C$ во всех точках жидкости, а следоват., и на свободной поверхности. Но на свободной поверхности $p=p_0=$ атмосферному давлению, а потому и внутри движущейся жидкости ед. давление равно p_0. Независимое движение частиц наблюдается, напр., тогда, когда вода вытекает из сосуда через отверстие на воздух; тогда в струе, начиная от сжатого сечения, существует независимое движение частиц и ед. давление в струе равно везде атмосферному. При вытекании через насадки независимое движение частиц проявляется, начиная от выходного отверстия насадки. При водосливах это движение проявляется, начиная от сжатого сечения.

§ 18. Понятие о деформации тел. Деформация неоднородная и однородная.

В теоретической механике рассматриваются сплошные системы материальных точек, расстояния между которыми неизменяются под действием внешних сил. Эти тела суть абсолютно-твердые, в природе не существующие. В математической физике изучаются сплошные системы материальных точек более общаго характера, а именно таких, расстояния между которыми могут изменяться. Это будут изменяемые системы или изменяемые тела; сюда относятся твердые упругие тела и жидкости, т.-е. газы и капельные жидкости. Под действием сил изменяемое

тело движется таким образом, что не только все тело перемещается из одного положения R в другое положение R_1, но при этом точки тела смещаются относительно друг друга. Такое перемещение называется *деформацией*. Тело R_1 есть деформированное тело R; это как бы новое тело, по расположению частиц находящееся в известном соответствии с R. Если в теле при переходе из одного положения в другое нет относительного смещения частиц, то такой переход является простым перемещением, как бы это тело было абсолютно твердым. Если относительные смещения всех точек одинаковы, то деформация называется *обнородной*; если же эти смещения различны для различных точек, то деформация называется *неоднородной*.

Пусть в какой-либо момент наше тело занимает положение R и затем оно приняло положение R_1 (черт. 58). При этом точки P; Q... заняли положение P_1; Q_1..., пройдя пути PP_1; QQ_1... Пусть координаты P и P_1 суть x; y; z и x_1; y_1; z_1; тогда между ними существует такая зависимость

$$x_1 = f_1(x;\ y;\ z);\quad y_1 = f_2(x;\ y;\ z);\quad z_1 = f_3(x;\ y;\ z) \ldots \quad (a)$$

Давая здесь координатам x; y; z значения соответствующие точкам P;Q;S.... в об'еме R получим из уравн. (a) координаты точек P_1;Q_1;S_1;... в об'еме R_1, которые представят положение точек P;Q;S... после деформации. Функции f_1;f_2;f_3 суть однозначные и непрерывные в об'еме R. Из этого весьма важного свойства функций вытекают непосредственно следующие свойства деформируемых тел, которые относятся к материальным линиям, поверхностям и об'емам.

a) Точки, составляющие в теле R кривую $AB = L$ (черт. 59), составят в теле R_1 кривую $A_1B_1 = L_1$; линии эти будут соответствовать друг другу точка в точку. Если L сомкнутая линия, то L_1 — тоже сомкнутая. Следоват., при деформации тела взаимное смещение частиц таково, что частицы следуют друг за другом, не отрываясь, и, так сказать, держатся друг за друга. Прямая линия при какой-либо деформации обращается в кривую, а при однородной деформации—в прямую же.

b) Точки, лежащие в теле R на какой-либо поверхности S, будут лежать в теле R_1 на поверхности S_1, которая представляет деформированную поверхность S. Поверхности S и S_1 соответствуют друг другу точка в точку. Кривая CD, ограничивающая поверхность S, обратится в кривую C_1D_1, ограничивающую поверхность S_1. Плоскость при какой-либо деформации обращается в поверхность, а при однородной деформации остается плоскостью.

e) Если поверхность S замкнутая, то деформированная поверхность S_1 будет также замкнутой. Каждой точке E в об'еме W, ограниченном поверхностью S, будет соответствовать точка E_1 в деформированном об'еме W_1 ограниченном деформированною поверхностью S_1.

Неразрывность или непрерывность массы при движении является основным свойством всех изменяемых систем; оно заключается в том, что при движении тела в нем не образуется вновь никаких разрывов или полостей, не занятых массою тела. Это свойство вытекает из вышеупомянутых свойств функций $f_1; f_2; f_3$.

Проекции перемещения PP_1 обозначим через $l; m; n$. В случае неоднородной деформации эти проекции суть какие-либо функции координат; при однородной деформации они представляют линейные функции координат; тогда получаем для однородной деформации:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x + l;\quad y_1 = y + m;\quad z_1 = z + n \\ l = a_{10} + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z; \\ m = a_{20} + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ n = a_{30} + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{array}\right\} \quad \ldots (b)$$

здесь коэффициенты a суть постоянные величины.

При деформировании тела линейный элемент $PP' = ds$ обращается в $P_1P_1' = ds_1$; при этом он изменяется в длине и в направлении. Единичным удлинением δ элемента ds называется отношение приращения длины $(ds_1 - ds)$ к первоначальной длине ds, т.-е.

$$\delta = \frac{ds_1 - ds}{ds} = \frac{ds_1}{ds} - 1.$$

Эта величина может быть и больше и меньше 0 и может равняться 0, на всегда $ds_1 > 0$. Если через точку P проводить по различным направлениям бесконечно малые дуги PP'; PP''..., то для каждого из этих направлений получим соответственное ед. удлинение δ, при чем δ изменяется с направлением элемента. В точке P проведем касательную T и от точки P по направлению касательной отложим отрезок PQ равный (черт. 59*a*):

$$PQ = \frac{ds}{ds_1} = \frac{1}{1+\delta}.$$

Геометрическое место точек подобных точке Q будет элипсоидъ, который называется *эллипсоидом деформаций* в точке P. Итак, если тело из положения R переходит в R_1, то в любой точке P тела R можно построить эллипсоид, который наглядно представит деформацию испытываемую телом в точке P по разным направлениям. Действительно, имея этот эллипсоид, можем определить ед. удлинение δ в точке P по

любому направлению, напр., по линии PT. Найдя пересечение этой линии с эллипсоидом, получим отрезок PQ и тогда искомое ед. удлинение равно:

$$\delta = \frac{1}{PQ} - 1.$$

Затем из точки P опишем сферу радиусом равным единице. Тогда, если линия PT пересекает сперва шар, а затем эллипсоид, то $PQ > 1$ и $\delta < 0$; следоват., $ds_1 < ds$, т.-е. по выбранному направлению элемент дуги $ds = PP'$ сокращается. Когда какая-либо линия PT' встречает сперва эллипсоид, а зетем шар, то элемент дуги ds' по выбранному направлению вытягивается. Если же линия PT'' встречает эллипсоид в пересечении эллипсоида с шаром, то $\delta = 0$ и никакого изменения элемент дуги не испытывает. Если весь эллипсоид находится внутри шара, то в точке P по всем направлениям проявляется растяжение; когда же весь эллипсоид лежит вне шара, то в этой точке P по всем направлениям происходит сжатие. В общем случае эллипсоид пересекает шар по некоторой кривой C; если точки этой кривой соединит с P, то получим конус, который называется конусом *нейтральных* линий; очевидно, по направлениям производящих конуса ед. удлинение $\delta = 0$. Пусть полуоси эллипсоида суть a; b; c; удлинения по направлению этих осей называются *главными* удлинениями. Так как вообще

$$\delta = \frac{1}{PQ} - 1$$

то, полагая здесь PQ равным a или b или c, найдем главные удлинения:

$$\Delta_1 = \frac{1}{a} - 1; \quad \Delta_2 = \frac{1}{b} - 1; \quad \Delta_3 = \frac{1}{c} - 1.$$

Однородная деформация. При однородной деформации эллипсоиды деформации для всех точек тела одинаковы и одинаковым образом расположены в пространстве. Из самого определения однородной деформации вытекают важные следствия, а именно:

1) Плоскость MN до деформации остается плоскостью M_1N_1 и после деформации; плоская кривая деформируется в плоскую кривую.

2) Прямая AB до деформации остается прямою A_1B_1 и после деформации.

3) Две параллельные плоскости MN и $M'N'$ после деформации остаются тоже параллельными. Отсюда следует, что две параллельные линии после доформации обращаются в две тоже параллельные линии.

4) Линейное удлинение элемента ds равное $\delta = \frac{ds_1}{ds} - 1$ при произвольной деформации зависит от направления, по которому взят этот

элемент, и от положения его. При однородной деформации линейное удлинение зависит только от направления. Таким образом, каждому направлению соответствует определенное линейное удлинение. Два параллельные отрезка AB и $A'B'$ обращаются после деформации в параллельные отрезки A_1B_1 и $A_1'B_1'$; между ними существует такое отношение:

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{A_1'B_1'}{A'B'}=1+\delta.$$

Плоскость деформируется в плоскость, но с различными ед. удлинениями по различным направлениям, на манер резиновой материи.

5) Угловое скошение, т.-е. изменение угла между элементами ds и ds' зависит от направления сторон этого угла, но не от положения вершины угла. Поэтому каждой системе двух направлений AB и CD соответствует определенное угловое скошение при деформации. Параллелограмм обращается также в параллелограмм, но с изменением углов; параллелопипед обращается также в параллелопипед, но с изменением углов.

6) Плоская фигура обращается в такую же плоскую фигуру, которая является ортографической проекцией первой.

7) При однородной деформации в каждой точке P существуют такие *три* взаимно перпендикулярные *прямые линии*, которые после деформации остаются прямыми и взаимно перпендикулярными линиями; эти линии суть оси эллипсоида деформаций.

Однородная деформация есть составная деформация. Как было об'яснено выше, при однородной деформации какая-либо точка P (x; y; z) переходит в точку P_1 (x_1; y_1; z_1), при чем те и другие координаты связаны линейными уравнениями (b). Если в этих уравнениях положить $x=y=z=0$, то найдем $x_1=a_{10}$; $y_1=a_{20}$; $z_1=a_{30}$; следоват. величины a_{10}; a_{20}; a_{30} представляют проекции перемещения OO_1 начала координат взятого в теле R (черт. 60). Дадим всем точкам тела R перемещение OO_1; при этом движение тела R будет происходить точно так же, как твердого тела; тело R примет положение R', а какая-либо точка P перейдет в P'. Дальнейшее перемещение тела R' происходит таким образом, что точка P' переходит в P_1; точка O_1 остается неподвижной, и тело принимает положение R_1. Этот переход P' в P_1 совершается различно в зависимости от характера данной деформации. Здесь следует различать *три* случая. *Первый случай:* P' переходит в P_1 одним вращением тела R' около точки O_1 на манер твердого тела; в этом случае собственно деформации или относительного смещения частиц не существует; тело R' переходит в R_1 вращением около точки O_1.

Второй случай: P' переходит в P_1 только одной деформацией; здесь тело R' переходит в R_1. *Третий случай*: P' переходит в P'' вращением тела R' около неподвижной точки O_1 на манер твердого тела, (следов. тело R' переходит в R'') и затем P'' переходит в P_1 собственно деформацией, (следов. тело R'' переходит в R_1). Первый случай представляет деформацию состоящую из вращения; второй—чистую деформацию; и третий—деформацию состоящую из вращения и чистой деформации.

§ 19. Деформация бесконечно малой части тела. Теорема Лагранжа. Рассмотрим какую-либо деформацию тела (черт. 61), при которой точки P $(x; y; z)$ и Q $(x'; y'; z')$ переходят в положение P_1 $(x_1; y_1; z_1)$ и Q_1 $(x_1'; y_1'; z_1')$. Проекции перемещений этих точек назовем l; m; n и l'; m'; n'. Тогда имеем:

$$x_1 = x + l;\ y_1 = y + m;\ z_1 = z + n;$$
$$x_1' = x' + l';\ y_1' = y' + m';\ z_1' = z' + m'.$$

Предположим теперь, что расстояние взятых точек P и Q бесконечно мало, тогда очевидно:

$$x' = x + dx;\ y' = y + dy;\ z' = z + dz;$$
$$\text{затем}\ l' = l + dl;\ m' = m + dm;\ n' = n + dn.$$

Так как $l = f\ (x; y; z)$, $m = f_1\ (x; y; z)$; $n = f_2\ (x; y; z)$, то

$dl = \frac{\partial l}{\partial x} dx + \frac{\partial l}{\partial y} dy + \frac{\partial l}{\partial z}$; также найдем dm и dn.

Перенесем начало координат в P; тогда координаты Q равны, очевидно, dx; dy; dz; затем:

$$x_1' = x' + l' = dx + (l + dl);\ y_1' = dy + (m + dm);\ z_1' = dz + (n + dn).$$

Заменяя здесь dl; dm и dn вышенайденными выражениями, находим:

$$x_1' = l + \left(1 + \frac{\partial l}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial l}{\partial y} dy + \frac{\partial l}{\partial z} dz;$$

также напишем выражения для y_1' и z_1'. Бесконечно малые координаты точки Q относительно начала P, равные dx; dy; dz, обозначим для удобства рассуждений через x'; y'; z'; тогда предыдущие равенства перепишутся в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= l + \left(1 + \frac{\partial l}{\partial x}\right) x' + \frac{\partial l}{\partial y} y' + \frac{\partial l}{\partial z} z' \\ y_1' &= m + \frac{\partial m}{\partial x} x' + \left(1 + \frac{\partial m}{\partial y}\right) y' + \frac{\partial m}{\partial z} z' \\ z_1' &= n + \frac{\partial n}{\partial x} x' + \frac{\partial n}{\partial y} y' + \left(1 + \frac{\partial n}{\partial z}\right) z' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (c)$$

Эти уравнения суть линейные относительно координат x'; y'; z'; они определяют положение точки Q_1 в деформированном теле R_1 по пере-

мещению l; m; n бесконечно близкой точки P и по первоначальным координатам x'; y'; z' относительно этой же точки. Сравнивая эти уравнения с уравн. (b), видим, что деформация бесконечно малой части тела около точки P есть однородная деформация при любой деформации всего тела. Эта деформация, как было указано выше, есть составная. Первая составная часть ее—поступательное перемещение; проекции этого перемещения суть l; m; n. Чтобы судить о второй и третьей составных частях надо знать значения коэффициентов при x'; y'; z'. В гидродинамике доказывается, что если выполнены следующие условия:

$$\frac{\partial l}{\partial y}=\frac{\partial m}{\partial x};\ \frac{\partial l}{\partial z}=\frac{\partial n}{\partial x};\ \frac{\partial m}{\partial z}=\frac{\partial n}{\partial y}\ \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

то заданная деформация есть чистая деформация. Если эти условия не выполнены, то деформация состоит или из вращения об'ема тела dm около P, или из вращения около этой точки и чистой деформации. Равенства (d) показывают, что проекции l; m; n суть частные производные некоторой функции. Поэтому можно также сказать, что заданная деформация представляет чистую деформацию, если перемещение PP_1 (l; m; n) имеет потенциал; тогда проекции l; m; n суть частные производные некоторой функции и условия (d) выполнены.

Рассмотрим случай, когда перемещение PP_1 *бесконечно мало*, т.-е. проекции l; m; n бесконечны малы. Если проекции скорости V точки P при ее перемещении суть u; v; w, то, очевидно:

$$l=u\ dt;\ m=v\ dt;\ n=w\ dt.$$

$$\text{Тогда: } \frac{\partial l}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}dt;\ \frac{\partial m}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}dt; \text{ и т. д.}$$

Тогда уравн. (d) примут вид:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x};\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x};\qquad \frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial y}\ \ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Эти равенства показывают, что скорость V точки P имеет потенциал, т.-е. ее проекции u; v; w суть частные производные некоторой функции по координатам. Итак, если скорость V имеет потенциал, то условия (e) выполнены и заданная деформация тела около точки P представляет чистую деформацию, т.-е. без вращения частиц. Такое движение частиц называется *невихревым* в отличие от движения с вращением частиц; это последнее движение называется *вихревым* движением.

Разложение однородной деформации бесконечно малого об'ема тела на составные части. Если твердое тело перемещается каким-либо образом, то проекции скорости V любой точки его Q (x'; y'; z') на осях $PX'\,Y'\,Z'$

при бесконечно малом перемещении QQ'', как известно из теоретической механики, равны (черт. 62):

$$\left. \begin{array}{c} V \operatorname{Cos}(VX') = u + qz' - ry'; \quad V \operatorname{Cos}(VY') = v + rx' - pz' \\ V \operatorname{Cos}(VZ') = w + py' - qx' \end{array} \right\} \ldots . (f)$$

Здесь p; q; r суть проекции угловой скорости тела при вращении его на бесконечно малый угол около оси $P\omega$; u; v; w суть проекции скорости точки P при бесконечно малом перемещении PP_1. Умножим эти равенства на dt; тогда первые части равны проекциям перемещения QQ'', именно представят.

$$QQ''. \operatorname{Cos}(QQ'', X'); \; QQ''. \operatorname{Cos}(QQ'', Y') \text{ и } QQ''. \operatorname{Cos}(QQ'', Z');$$

далее члены второй части udt; vdt; wdt представят проекции перемещения $PP_1 = Q'Q''$; наконец, члены второй части:

$$(qz' - ry')\, dt; \quad (rx' - pz')\, dt; \quad (py' - qx')\, dt$$

будут проекциями углового перемещения QQ' при вращении около оси $P\omega$. Итак получаем:

$$\left. \begin{array}{r} QQ''. \operatorname{Cos}(QQ'', X') = (u + qz' - ry')\, dt; \\ QQ''. \operatorname{Cos}(QQ'', Y') = (v + rx' - pz')\, dt; \\ QQ''. \operatorname{Cos}(QQ'', Z') = (w + py' - qx')\, dt. \end{array} \right\} \ldots\ldots . (f')$$

Теперь вновь рассмотрим деформируемое тело. Пусть перемещение PP_1 бесконечно мало; проекции скорости V точки P при ее перемещении суть u; v; w; тогда проекции перемещения равны: $l = udt$; $m = vdt$; $n = wdt$; следоват.:

$$\frac{\partial l}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} dt; \quad \frac{\partial l}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} dt; \quad \frac{\partial l}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} dt \quad \text{и т. д.}$$

Вставляя эти значения в общие уравнения (c), находим:

$$\begin{array}{l} x_1' - x' = \left\{ u + \frac{\partial u}{\partial x} x' + \frac{\partial u}{\partial y} y' + \frac{\partial u}{\partial z} z' \right\} dt \\ y_1' - y' = \left\{ v + \frac{\partial v}{\partial x} x' + \frac{\partial v}{\partial y} y' + \frac{\partial v}{\partial z} z' \right\} dt \qquad \ldots\ldots . (g) \\ z_1' - z' = \left\{ w + \frac{\partial w}{\partial x} x' + \frac{\partial w}{\partial y} y' + \frac{\partial w}{\partial z} z' \right\} dt. \end{array}$$

Прибавим и вычтем из вторых частей этих равенств соответственно следующие выражения:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} y' + \frac{\partial w}{\partial x} z'\right) dt; \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} x' + \frac{\partial w}{\partial y} z'\right); \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} y' + \frac{\partial u}{\partial z} x'\right) dt.$$

Тогда равенства (g) примут такой вид:

$$
(h)\left\{
\begin{aligned}
x_1'-x' &= \Big\{u+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\Big)y'-\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\Big)z'+\frac{\partial u}{\partial x}x'+\\
&\quad+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\Big)y'+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\Big)z'\Big\}\,dt.\\
y_1'-y' &= \Big\{v+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\Big)x'-\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\Big)z'+\frac{\partial v}{\partial y}y'+\\
&\quad+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\Big)x'+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\Big)z'\Big\}\,dt.\\
z_1'-z' &= \Big\{w+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\Big)y'-\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\Big)x'+\frac{\partial w}{\partial z}z'+\\
&\quad+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\Big)x'+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial}\Big)y'\Big\}\,dt.
\end{aligned}\right.
$$

Обозначим:

$$p=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\Big);\quad q=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\Big);\quad r=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\ \ldots\ldots\ (i)$$

Далее положим:

$$
\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1=\frac{\partial u}{\partial x}\,dt;\qquad & \varepsilon_2=\frac{\partial v}{\partial y}\,dt;\qquad \varepsilon_3=\frac{\partial w}{\partial z}\,dt\\
\gamma_1=\Big(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\Big)dt;\quad & \gamma_2=\Big(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\Big)dt;\quad \gamma_3=\Big(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\Big)dt
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (k)
$$

Теперь уравнения (h) можно представить в таком виде:

$$
\left.\begin{aligned}
x_1'-x' &= (u+qz'-ry')\,dt+\varepsilon_1 x'+\tfrac{1}{2}\gamma_3 y'+\tfrac{1}{2}\gamma_2 z'\\
y_1'-y' &= (v+rx'-pz')\,dt+\tfrac{1}{2}\gamma_3 x'+\varepsilon_2 y'+\tfrac{1}{2}\gamma_1 z'\\
z_1'-z' &= (w+py'-qx')\,dt+\tfrac{1}{2}\gamma_2 x'+\tfrac{1}{2}\gamma_1 y'+\varepsilon_3 z'
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (l)
$$

Возьмем затем такую функцию координат:

$$F(x';y';z')=\frac{1}{2}\Big\{\varepsilon_1 x'^2+\varepsilon_2 y'^2+\varepsilon_3 z'^3+\gamma_1 y'z'+\gamma_2 x'z'+\gamma_3 x'y'\Big\}\ \ldots\ (m)$$

Отсюда находим:

$$\frac{\partial F}{\partial x'}=\varepsilon_1 x'+\frac{1}{2}\gamma_3 y'+\frac{1}{2}\gamma_2 z';\quad \frac{\partial F}{\partial y'}=\varepsilon_2 y'+\frac{1}{2}\gamma_1 z'+\frac{1}{2}\gamma_3 x',$$

$$\frac{\partial F}{\partial z'}=\varepsilon_3 z'+\frac{1}{2}\gamma_1 y'+\frac{1}{2}\gamma_2 x'.$$

Принимая во внимание этот результат, а также урав. (f'), перепишем уравн. (l) в такой окончательной форме:

$$
\left.\begin{aligned}
x_1'-x' &= QQ''\operatorname{Cos}(QQ'',X')+\frac{\partial F}{\partial x'}\\
y_1'-y' &= QQ''\operatorname{Cos}(QQ'',Y')+\frac{\partial F}{\partial y'}\\
z_1'-z' &= QQ''\operatorname{Cos}(QQ'',Z')+\frac{\partial F}{\partial z'}.
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (n)
$$

Эти уравнения показывают, что данная деформация состоит из двух частей или деформаций; первая часть представляет, как показано выше, перемещение и вращение, как твердого тела, а вторая часть (как имеющая потенциал) представляет чистую деформацию. Только что об'ясненное разложение деформации было дано *Гельмгольцем* в 1858 г. и представляет весьма большой шаг вперед в развитии гидродинамики. Сложение деформаций или разложение деформаций на составные, подобно изложенному, справедливо только для бесконечно малых деформаций. Если в точке P отложить вектор $P\omega$, проекции которого суть p; q; r, то этот вектор называется *вихрем* в P (tourbillon, Wirbel, Vortex). Если бы рассматриваемая среда R была твердым телом, то перемещение ее можно было бы составить из поступательного, общего всем точкам и равного перемещению какой-либо точки тела P, и из вращательного около некоторой мгновенной оси $P\omega$, проходящей через P. Угловая скорость Ω этого вращательного движения есть вихрь в точке P; очевидно:

$$\Omega^2 = p^2 + q^2 + r^2.$$

Движение, при котором в каждой точке тела R существует вихрь, называется *вихревым*; в обратном случае оно называется невихревым. Если проекции угловой скорости $p = q = r = 0$ т.-е., если

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

то деформация бесконечно малого об'ема dm происходит без вращения. В этом случае скорость V точки P имеет потенциал. Итак, если движение происходит с потенциалом скоростей, то движение—не вихревое, т.-е. без вращения частиц; в противном случае движение называется вихревым.

В пояснение к изложенному добавим еще следующее. В движущейся жидкости около точки M вообразим шар бесконечно малого радиуса и будем следить за жидкостью, заполняющею этот шар; тогда увидим, что в следующий момент шар получит бесконечно малое поступательное перемещение и вращение на бесконечно малый угол. При этом одновременно некоторые радиусы шара удлинятся по своим направлениям, другие укоротятся, и шар преобразится в эллипсоид; некоторые 3 взаимно перпендикулярные плоскости шара обратятся в главные диаметральные сечения эллипсоида.

Этот бесконечно малый угол $d\alpha = \Omega dt$, где

$\Omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$; p; q; r суть проекции вихря.

Если движение жидкости происходит с потенциалом скоростей, то $\Omega = 0$ и $d\alpha = 0$. В этом случае шар получит только поступательное перемещение и затем деформируется в эллипсоид без вращения.

Теорема Лагранжа. Выше было доказано, что если деформация происходит с потенциалом скоростей, то имеет место чистая деформация и следоват. движение безвихревое.

Докажем, что если в момент t движение было безвихревое, то оно останется таковым и в следующий момент $t + dt$. Для момента t проекции скорости суть u; v; w, а для момента $t + dt$ суть: u_1; v_1; w_1; очевидно:

$$u_1 = u + dv; \qquad v_1 = v + dv; \qquad w_1 = w + dw.$$

Так как для первого момента t, согласно условию, движение безвихревое, то скорость имеет потенциал, а потому должно существовать такое равенство (если через F $(x; y; z)$ обозначить потенциальную функцию):

$$udx + vdy + wdz = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = dF.$$

Если эта теорема действительно справедлива, то мы должны иметь такое равенство:

$$u_1 dx + v_1 dy + w_1 dz = d\Phi,$$

где Φ $(x; y; z)$ потенциальная функция. Докажем это. Имеем:

$$u_1 dx + v_1 dy + w_1 dz = (u + du)\, dx + (v + dv)\, dy + (w + dw)\, dz.$$
$$= dF + du \cdot dx + dv \cdot dy + dw \cdot dz.$$

Так как: $dx = u \cdot dt$, то $du \cdot dx = (udu)\, dt$; также $dv \cdot dy = (vdv)\, dt$ и $dw \cdot dz = (wdw)\, dt$, и поэтому:

$$u_1 dx + v_1 dy + w_1 dz = dF +$$
$$+ (udu + vdv + wdw)\, dt = d\left(F + \frac{1}{2} V^2 \cdot dt\right) = d\Phi.$$

Здесь вторая часть равенства есть полный дифференциал, а потому скорость V_1 в момент $t + dt$ имеет потенциал и движение будет безвихревым. Если доказанное справедливо для момента $t + dt$, то оно справедливо и для следующего и т. д. Отсюда следует теорема Лагранжа; если частица бесконечно малого об'ема dm вокруг точки P не имеет вращения в какой-либо момент t, то она никогда не будет иметь вращения, т.-е. безвихревое движение остается всегда безвихревым, и оно не может переходить с течением времени в вихревое; также и обратно: вихревое движение не может переходить в безвихревое. Таким образом получается замечательный вывод, что вихрь, т.-е. вращение бесконечно малой части тела, представляет собою кинемати-

ческий элемент, неразрушимый во все время движения. Этот вывод справедлив для тех случаев, когда на тело R действуют консервативные силы (силы имеющие потенциал или силы давления между частицами, при чем давление есть функция плотности). При действии сил не консервативных (силы трения), вихрь может как зарождаться, так и уничтожаться во время движения.

Примечание. Не следует думать, что при прямолинейном движении частиц жидкости не проявляются вихри. Наоборот, как показано в нижеследующем примере, прямолинейное движение есть вихревое движение.

Пример на однородную деформацию. Определим деформацию, при которой точки среды R движутся параллельно оси X по линейному закону (черт. 63). Пусть уравн. (b) имеют такой вид:

$$x_1 = a_{10} + x + a_{13} z; \qquad y_1 = y; \qquad z_1 = z$$

следоват., проекции перемещения суть:

$$l = x_1 - x = a_{10} + a_{13} z; \quad m = y_1 - y = 0; \quad n = z_1 - z = 0.$$

Если рассматривать точки, лежащие до деформации на линии mm, то после деформации они лежат на линии $m'm'$ (при $a_{13} > 0$) или на линии $m''m''$ (при $a_{13} < 0$). Если жидкость несжимаемая, то вообще движение ее возможно не при всякой заданной деформации. Оказывается, что при рассматриваемой деформации движение несжимаемой жидкости возможно без нарушения непрерывности массы. Эллипсоид деформаций расположен в пространстве так, что плоскость осей a и c параллельна плоскости XZ; ось $b = 1$, т.-е. линии параллельные оси Y не испытывают никакой деформации. Плоскость и прямая линия остаются плоскостью и прямой линией, как вообще при всякой однородной деформации. Шар обращается в эллипсоид. Если представить вертикальную линию mm, составленную до деформации из бесконечно малых одинаковых шаров, то после деформации они обратятся в одинаковые и одинаковым образом расположенные бесконечно малые эллипсоиды, лежащие по линии $m'm'$; наибольшая и наименьшая оси a и c эллипсоида лежат в плоскости параллельной плоскости XZ; полуось b равняется радиусу шара. Линия $m'm'$ и диаметр параллельный оси X суть сопряженные. Для решения вопроса о составных частях данной деформации дадим телу R поступательное перемещение, параллельное оси X, при чем O перейдет в O_1 (a_{10}; 0; 0); переместив тело из R в R', получим:

$$x_1 = x + a_{13} z; \quad y_1 = 0; \quad z_1 = z.$$

Из этих выражений видно, что из R' в R_1 нельзя перейти ни простым вращением на манер твердого тела, ни чистой деформацией.

Итак, эта деформация—составная; она состоит из вращения на угол θ около оси $O_1 Y_1$ паралельной OY по направлению от оси X к Z, при чем тело R' переходит в R'', и из чистой деформации, состоящей в переходе из R'' в R_1. Из только что сказанного видно, что перемещение PP_1 точки P (0; 0; z) состоит (черт. 64): 1) из *поступательного* $PP' = OO_1 = a_{10}$ параллельного оси X; 2) из *вращательного* $P'P'' = z\,\theta$ около оси $O_1\ Y_1$ параллельной $O\ Y$ на угол θ; и 3) из *чистой* деформации $P''P_1$, которая в свою очередь состоит из удлинения $P''P^{III}$ и из укорочения $P''P^{IV}$, вследствие чего точка P'' получает перемещение по равнодействующей $P''P_1$.

§ 20. Циркуляция. Вихревое напряжение. Выше было упомянуто, что учение о вихрях представляет наибольший шаг вперед в развитии гидродинамики за последние 60 лет; начало этому учению было положено *Гельмгольцем*. Впоследствии учение о вихрях было развито трудами Кирхгофа, Релея, Кельвина и др. Кельвин полагал в вихревых движениях найти механическое об'яснение вселенной, которую он принимал наполненной эфиром, т.-е. непрерывной материей, имеющей вихревое движение в некоторых своих частях. Он представлял атомы в виде малых замкнутых вихрей, зародившихся в эфире; атомы различных тел отличаются друг от друга вихревыми движениями того же эфира. Замечательно, что между уравнениями электродинамики и теории вихрей существует аналогия, позволяющая об'яснять одну теорию помощью другой.

В учении о деформациях было показано, что частицы жидкости, лежавшие в момент t_0 на поверхности S_0 или на линии L_0, остаются все время на деформированной поверхности S или на деформированной линии L. Поверхность S и линия L, изменяющие с t свое положение и форму, называются *жидкою поверхностью* или *жидкою линиею*, так как состоят из одних и тех же частиц во все время движения.

Рассмотрим частицы лежащие в момент t на кривой AB; пусть для какой-либо ее точки P скорость равна W (u; v; w); обозначим элемент кривой AB через ds (dx; dy; dz); Очевидно, можно всегда написать:

$$udx + vdy + wdz = W.ds.\ \mathrm{Cos}\ (W, ds).$$

Циркуляцией (ci) по AB называется следующий интеграл, распространенный на всю кривую AB:

$$ci = \int_A^B (udx + vdy + wdz) = \int_A^B W.ds.\ \mathrm{Cos}\ (W.ds) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (a)$$

Это выражение представляет работу фиктивной силы W при действии ее на фиктивную материальную точку, движущуюся по кривой от A до B. Если скорость W имеет потенциал и потенциальная функция есть φ, то получается для циркуляции по AB такое выражение

$$ci = \int_A^B \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right) = \int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (b)$$

Следоват. цтркуляция по AB в этом случае равна разности значений потенциальной функции для конечной и начальной точек этой кривой.

Докажем две теоремы, касающиеся свойств циркуляции по какой-либо замкнутой кривой. Эти теоремы, как и другие, о которых будет упомянуто ниже, справедливы для жидкостей совершенных, в которых плотность ρ есть функция давления p, и на которые действуют силы, имеющие потенциал. Нетрудно показать, что при этих условиях ускорение движения частицы имеет также потенциал. Для доказательства обозначим:

$$U - \int \frac{dp}{\rho} = Q.$$

где U силовая функция. Дифференцированием по x; y и z и имея в виду, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z;$$

получаем:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

При выводе Эйлеровых уравнений гидродинамики было найдено, что:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - I_e = X - \frac{d^2x}{dt^2}; \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{d^2y}{dt^2}; \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Из сравнения этих равенст с предыдущими получаем:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Итак, действительно проекции ускорения равны производным по координатам функции Q, а потому заключаем, что ускорение имеет потенциал.

Теорема первая. Циркуляция вдоль жидкой замкнутой линии L есть величина постоянная при всяком t. При $t = t_0$ замкнутая жидкая линия есть L_0 (черт. 65); координаты a; b; c какой-либо точки Mo на этой линии можно принять функциями некоторого параметра λ, именно:

$$a = \Psi(\lambda); \quad b = \Psi_1(\lambda); \quad c = \Psi_2(\lambda).$$

Изменяя здесь λ от α до β, получим последовательно все точки линии L_0. В момент t жидкая линия примет вид замкнутой линии L и точка M_0 перейдет в $M(x; y; z)$, кординаты которой суть функции не только λ но и t; поэтому

$$x = \theta(\lambda; t); \qquad y = \theta_1(\lambda; t); \qquad z = \theta_2(\lambda; t).$$

При изменении λ от α до β получим все точки линии L. Циркуляция по L равна:

$$ci = \int (u dx + v dy + w dz)$$

Здесь dx; dy; dz суть проекции дуги $ds = MM_1$. Так как при переходе от одной точки M к другой M_1 одной и той же линии L нужно изменять в предыдущем равенстве только λ; то поэтому на dx; dy; dz надо смотреть как на дифференциалы функции θ по λ; поэтому следует писать их через:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda; \qquad \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda; \qquad \frac{\partial z}{\partial \lambda} d\lambda;$$

Тогда найдем:

$$ci = \int_\alpha^\beta \left(u \frac{\partial x}{\partial \lambda} + v \frac{\partial y}{\partial \lambda} + w \frac{\partial z}{\partial \lambda}\right) d\lambda.$$

Докажем, что циркуляции по L_0 и по L равны; для этого достаточно даказать, что

$$\frac{d(ci)}{dt} = 0.$$

Возьмем производную от предыдущего выражения по t, при чем величины

$$u; \; v; \; w; \; \frac{\partial x}{\partial \lambda}; \; \frac{\partial y}{\partial \lambda}; \; \frac{\partial z}{\partial \lambda}$$

нужно рассматривать, как функции от t, пределы α и β суть постоянные величины. Тогда имеем:

$$\frac{d(ci)}{dt} = \int_\alpha^\beta \left\{ \frac{du}{dt} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{dv}{dt} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{dw}{dt} \cdot \frac{\partial z}{\partial \lambda} + u \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right) + v \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right) + w \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right) \right\} d\lambda.$$

Но только что было доказано, что:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dw}{dt}.$$

Затем имеем:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{\partial u}{\partial \lambda}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right) = \frac{\partial v}{\partial \lambda}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right) = \frac{\partial w}{\partial \lambda}.$$

Следовательно будем иметь:

$$\frac{d(ci)}{dt}=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \lambda}+\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \lambda}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \lambda}+u\frac{\partial u}{\partial \lambda}+v\frac{\partial v}{\partial \lambda}+w\frac{\partial w}{\partial \lambda}\right\}d\lambda$$

или окончательно:

$$\frac{d(ci)}{dt}=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{d}{d\lambda}\left\{Q+\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)\right\}d\lambda=\left\{Q+\frac{1}{2}W^2\right\}_{\alpha}^{\beta}$$

Здесь вторая часть равна нулю, потому что линия L замкнутая, и пределы α и β дают одну и ту же точку на L, а для Q и W одну и ту же величину, следоват., получается:

$$\frac{d(ci)}{dt}=0$$

и теорема доказана.

Теорема вторая. Циркуляция вдоль замкнутой жидкой линии равна вихревому напряжению жидкой поверхности ограниченной этою линиею.

Пусть замкнутая жидкая линия L в момент t лежит на жидкой поверхности S (черт. 66). Определим циркуляцию вдоль линии L; она равна:

$$ci=\int_L(udx+vdy+wdz)$$

По известной теореме *Стокса* интегрирование по замкнутому контуру L может быть заменено интегрированием по поверхности S ограниченной этим контуром. Пусть $d\sigma$—элемент поверхности в точке P и N—нормаль в P, составляющая с осями углы α; β; γ; тогда по этой теореме:

$$ci=\int_S\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\operatorname{Cos}\alpha+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\operatorname{Cos}\beta+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\operatorname{Cos}\gamma\right\}d\sigma$$

Вихрь в точке P обозначим через Ω (p; q; r); тогда

$$\Omega\operatorname{Cos}(\Omega N)=\Omega_n=p\operatorname{Cos}\alpha+q\operatorname{Cos}\beta+r\operatorname{Cos}\gamma$$

Значения проекций вихря p; q; r даны уравн. (i) в § 19; имея эти равенства в виду, можем написать:

$$ci=2\int_S\{p\operatorname{Cos}\alpha+q\operatorname{Cos}\beta+r\operatorname{Cos}\gamma\}d\sigma=2\int_S\Omega_n\,d\sigma\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(c)$$

Вторая часть этого равенства называется ***вихревым напряжением*** для поверхности S, ограниченной контуром L. С изменением t жидкая

поверхность S и контур ее L перемещаются и деформируются, но циркуляция по L, а, следоват., и вихревое напряжение поверхности S остаются постоянными.

Докажем, что вихревое напряжение для сомкнутой поверхности равно нулю. Для этого воспользуемся теоремой *Остроградского* (*Грина*), по которой интегрирование по поверхности S можно заменить интегрированием по об'ему V. Если dV—элемент об'ема, то по этой теореме имеем:

$$ci = 2\int\limits_S \left\{p \operatorname{Cos} \alpha + q \operatorname{Cos} \beta + r \operatorname{Cos} \gamma\right\} d\sigma = 2\int\limits_V \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}\right) dV.$$

Непосредственным дифференцированием выражений для проекций вихря (уравн. i в § 19) находим:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (d$$

следоват.

$$ci = 2\int\limits_S \Omega_n \, d\sigma = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (e)$$

Пример. Рассматривая теоретически движение жидкостей в капиллярных трубках, *Кирхоф* нашел на основании уравнений гидродинамики следующее выражение для проекции скорости (черт. 67):

$$u = \frac{p_1 - p_0}{4\mu\, L}\left(R_0{}^2 + \frac{2\mu\, R_0}{k} - R^2\right); \; v = 0; \; w = 0 \;.\;.\;.\;. \quad (f)$$

где R_0 — радиус трубки; L — длина трубки между поперечными сечениями m и n; R — расстояние от центра трубки до рассматриваемой точки; p_1 и p_0 — ед. давления в поперечных сечениях m и n; μ — коеф. внутренняго трения (при трении между частицами жидкости); k — коеф. внешняго трения (при трении между жидкостью и стенками трубы). Из этой формулы видно, что движение происходит по линиям параллельным оси X, и что распределение скоростей $V = u$ по поперечному сечению трубки *параболическое;* ось параболы совпадает с осью X; *maxim.* V соответствует центральной струйке; *minim.* V соответствует струйкам идущим по периферии; средняя скорость V_c соответствует $R = \frac{1}{2}\sqrt{2}\; R_0 = 0{,}707\, R_0$. Нетрудно видеть, что *maxim.* $V = 2\; V_c$ и

$$minim.\; V = \left(\frac{1}{1 + \frac{k\, R_0}{4\mu}}\right) V_c$$

Определим, будет ли рассматриваемое движение вихревым. Вихрь в любой точке жидкости P, лежащей в плоскости OQ (черт. 68), может

быть представлен вектором $P\Omega$ с проекциями p; q; r. Имея в виду, что $R^2 = y^2 + z^2$, найдем для этих проекций следующие выражения:

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0\,;\ q = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) =$$

$$= -\frac{p_1 - p_0}{4\mu L} z\,;\ r = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{p_1 - p_0}{4\mu L} y.$$

Отсюда видно, что вектор $P\Omega$ лежит в поперечном сечении трубки и равен:

$$P\Omega = \sqrt{q^2 + r^2} = \frac{p_1 - p_0}{4\mu L} R.$$

Этот отрезок нужно отложить в точке P по перпендикуляру к плоскости OQ в сторону отрицательной оси Y; вращение вихря происходит так, как показано на чертеже.

Если в плоскости OQ взять жидкую линию L, ограничивающую жидкую площадь S, и определить величину циркуляции для L, то найдем по только что доказанному, что вихри в различных точках площади S нормальны к плоскости OQ, а следоват. параллельны, между собою; тогда можно написать:

$$(ci)_L = 2\int_S \Omega\, d\sigma = \frac{p_1 - p_0}{2\mu L}\int_S R d\sigma = \frac{p_1 - p_0}{2\mu L} S R_1 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (g)$$

где R — расстояние от оси X различных точек площади S и R_1 — расстояние от X центра тяжести площади S.

Если рассматривать какую-либо замкнутую линию L' (черт. 68) на цилиндрической поверхности с производящими параллельными X, то в каждой точке поверхности S' ограниченной этою линиею вихрь касателен к поверхности, а потому $ci = 0$.

§ 21. Вихревые линии, поверхности, нити и трубки. Вихревой линией называется линия, касательная T к которой в точке P совпадает с направлением вектора $P\Omega$ для частицы M, находящейся в P в момент t. *Вихревою поверхностью* называется поверхность, которая в каждой своей точке P имеет касательною вихрь $P\Omega$ для этой точки. На вихревой поверхности можно провести бесчисленное множество вихревых линий; для этого достаточно провести на поверхности такие линии, чтобы касательная в каждой точке их была вихрем для этой точки. Обратно, имея вихревую линию AB, можем построить вихревую поверхность, заключающую эту линию; для этого нужно во всех точках линии построить соответственные им вихри $P\Omega$; $P_1\Omega_1\ldots$ Эти вихри образуют вихревую поверхность. Если линия AB сомкнутая, то вихревая поверхность обращается в *вихревую трубку*

или *вихревой шнур*. Трубка, имеющая бесконечно малое поперечное сечение, называется *вихревою нитью*. Нетрудно узнать, что данная поверхность есть вихревая поверхность. Пусть AB (черт. 69) данная поверхность; $P\Omega$ вихрь в точке P, лежащей на этой поверхности; N — нормаль к поверхности в точке P. Для того, чтобы поверхность AB была вихревою, необходимо и достаточно, чтобы вектор $P\Omega$ был перпендикулярен к N, т.-е. чтобы $\Omega_n = 0$; тогда вектор $P\Omega$ касателен к поверхности. Тоже условие можно выразить еще так. На поверхности AB возьмем замкнутую линию L, ограничивающую поверхность S; тогда циркуляция по L выражается уравн. (c), в котором $d\sigma$ — элемент поверхности вокруг точки P и Ω_n — проекция $P\Omega$ на нормаль в P. Если поверхность AB вихревая, то вектор $P\Omega$ лежит в этой поверхности и $\Omega_n = 0$; тогда циркуляция также равна нулю. Следоват., для того, чтобы поверхность AB была вихревою необходимо и достаточно, чтобы циркуляция по всякой замкнутой линии L на этой поверхности равнялась нулю. Обратное заключение также справедливо. Действительно, если $ci = 0$ для какой угодно замкнутой линии L на поверхности, то, следоват., $\Omega_n = 0$; тогда $P\Omega$ касательна к поверхности и потому эта поверхность вихревая. Пересечение двух вихревых поверхностей AB и A_1B_1 дает линию L, которая есть вихревая. Действительно, если в точке P на линии L провести вектор $P\Omega$, то этот вектор по условию касателен к обеим поверхностям, а следоват., касателен и к линии их пересечения. В предыдущем § было показано, что в капиллярах для какой-либо поверхности S' на цилиндре ab (черт. 68) $ci = 0$; поэтому поверхность S', а следоват., и весь цилиндр представляют вихревые поверхности. Если взять площадь S на плоскости OQ, то при вращении OQ около оси X контур L этой площади опишет замкнутую кольцевую поверхность, которая будет вихревою поверхностью; эта кольцевая поверхность представляет вихревую трубку, заканчивающуюся в самой себе. Подобным же образом найдем, что всякая поверхность вращения, описанная около оси X есть вихревая поверхность.

Докажем теперь две теоремы, выражающие свойство вихревых линий, поверхностей и трубок.

Теорема первая. Частицы, лежавшие в момент t_0 на вихревой линии L_0 или на вихревой поверхности A_0B_0, будут все время лежать на вихревой линии L или на вихревой поверхности AB. Докажем эту теорему сперва для поверхности. Пусть в момент t_0 частицы лежат на вихревой поверхности A_0B_0 (черт. 69a); в момент t эти частицы будут лежать на поверхности AB, которая представит деформированную по-

верхность A_0B_0 и будет вихревою поверхностью. Для доказательства возьмем в A_0B_0 замкнутую линию L_0, которая в момент t обратится в L, лежащую в AB. Циркуляция для L_0 и L одна и та же, согласно первой теореме § 20. Но циркуляция для L_0 равна нулю, ибо L_0 лежит на вихревой поверхности, а только что доказано, что для всякой замкнутой линии на вихревой поверхности циркуляция равна нулю; итак циркуляция для L равна нулю. Так как L и ограничиваемая ею поверхность S взяты совершенно произвольно, то можно сказать, что для всяких L и S циркуляция равна нулю; следоват., поверхность AB—вихревая. Докажем эту теорему для линий. Вихревую линию C_0D_0 в момент t_0 можно рассматривать, как пересечение двух вихревых поверхностей A_0B_0 и $A_0'B_0'$. С изменением t обе поверхности перемещаются и деформируются, оставаясь постоянно вихревыми; линия пересечения их CD будет представлять деформированную линию C_0D_0 и будет очевидно вихревою линиею.

Теорема вторая. Напряжение вихревой трубки есть величина постоянная. Через все точки замкнутой кривой C (черт. 70), проведем вихревые линии для этих точек; тогда получится вихревая трубка; эта будет одна из вихревых поверхностей. *Моментом* или *напряжением* вихревой трубки I называется величина циркуляции по какой-либо замкнутой линии AB или EF, обходящей трубку один раз, или, что одно и тоже, вихревое напряжение соответственного сечения трубки Σ. Следоват.

$$I = ci\ (AB) = 2\int_{\Sigma} \Omega_n\, d\sigma$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности Σ. Заметим, что, если нанести замкнутую кривую L на боковую поверхность трубки, то циркуляция по L равна нулю, так как боковая поверхность есть вихревая поверхность. Докажем, что вихревое напряжение трубки величина постоянная, т.-е. что:

$$I = ci\ (AB) = ci\ (EF).$$

Рассмотрим линии AB и EF и возьмем на них по две бесконечно близких точки a и b; e и f; тогда линии ae и bf будут бесконечно близкими. Рассмотрим сомкнутую линию $aeEFfbBAa$; она лежит на боковой поверхности вихревой трубки, а потому циркуляция по этой линии равна нулю. Циркуляция вдоль этой линии равна сумме циркуляций по отдельным линиям, а потому

$$ci\,(ae) + ci\,(eEFf) + ci\,(fb) + ci\,(bBAa) = 0.$$

Но циркуляции по ae и по fb по величине равны, а по знаку противоположны, так как производятся по одной и той же линии, но в противоположных направлениях. Тогда сумма их равна нулю и получается:

$$ci\,(eEFf) + ci\,(bBAa) = 0.$$

Так как циркуляция есть определенный интеграл, то переменив направление циркуляции, т.-е. пределы интегрирования, переменим и знак циркуляции, следоват.

$$ci\,(eEFf) = -ci\,(bBAa) = ci\,(aABb) = I.$$

Итак напряжение вихревой трубки постоянно. Отсюда следует, что вихревая трубка не может оборваться внутри жидкости; внутри жидкости трубка может существовать только в виде кольца. С течением времени жидкая вихревая трубка или кольцо изменяет свое положение и деформируется, но всегда остается жидкой вихревой трубкой или кольцом с постоянным напряжением. Примером таких вихревых колец могут служить кольца, образующиеся из табачного дыма и движущиеся в воздухе по направлению перпендикулярному к плоскости кольца.

Пример. При движении жидкости в капиллярах замкнутая линия L, лежащая в плоскости OQ (черт. 68), даст при вращении этой плоскости около оси X кольцевую поверхность, которая и есть вихревая трубка. Напряжение этой трубки согласно уравн. (g) в § 20 равно:

$$I = (ci)_L = 2\int_S \Omega d\sigma = \frac{p_1 - p_0}{2\mu\, L}\, SR_1$$

Вихревая нить есть вихревая трубка с бесконечно малым поперечным сечением $d\sigma$; напряжение вихревой нити равно:

$$I = 2\,\Omega_n d\sigma = 2\,\Omega d\sigma$$

потому что вихрь Ω перпендикулярен к площадке $d\sigma$.

Так как напряжение I постоянно вдоль всей нити и при всяком t, то из этого равенства заключаем, что произведение поперечного сечения вихревой нити на вихрь Ω есть величина постоянная. Для случая капилляров имеем:

$$I = 2\,\Omega d\sigma = \frac{p_1 - p_0}{2\mu\, L}\, R d\sigma.$$

Опыты над движением вихревых колец. Вихревые кольца можно образовать из газа или из жидкости.

а) Рассмотрим *газовые* кольца. Опыты над движением таких колец можно производить следующим образом. Из картона, тонкой жести

или из дерева делают ящик; в одной из боковых сторон его устраивают круглое отверстие около 25 м.м. в диаметре. В ящике зажигают ладон, табак и т. п. вещества, дающие в изобилии дым, при чем отверстие должно быть закрыто. Можно также поставить в ящик два сосуда: один с соляной кислотой, а другой с нашатырным спиртом; тогда в ящике образуется туман из частичек нашатыря. Если открыть отверстие и легко ударить в противоположную стенку, то из отверстия быстро вылетает бесформенная масса дыму, которая тотчас же формируется в вихревое кольцо; плоскость его параллельна плоскости отверстия. Это кольцо быстро движется, равномерно перемещаясь перпендикулярно к плоскости отверстия. Воздух во внутреннем отверстии кольца также перемещается, но гораздо медленнее. Кольцо движется на расстояние до 10 метров, вполне сохраняясь. *Болл* изучал движение колец диаметром 250 м.м. в длинном коридоре. Если отверстие квадратное, шестиугольное и пр., то получаются также круглые кольца, но нужно брать кортон тоньше и удары должны быть слабее. Круглая форма колец только одна устойчива. По теории кольцо должно перемещаться перпендикулярно к своей плоскости, не изменяя своих размеров, и со скоростью весьма большою сравнительно со скоростью частиц, находящихся в середине отверстия кольца, что и подтверждается на опыте.

Весьма интересно движение двух колец исследованное теоретически *Гельмгольцем и I. I. Томсоном.*

1⁰) Если оба кольца имеют общую ось перпендикулярную к плоскости кольца и вихри их одинакового направления, то кольца перемещаются по одному направлению. Переднее кольцо замедляет движение и его отверстие расширяется; второе ускоряет свое движение и отверстие суживается. При небольшой разнице в скоростях второе кольцо догоняет переднее и проходит через его отверстие. Когда второе кольцо окажется передним, то описанное явление повторяется в том же порядке. Таким образом одно кольцо попеременно догоняет и проходит через другое.

2⁰) Если оба кольца имеют общую ось, а вихри их противоположного направления, то кольца идут навстречу друг к другу. Меньшее из них по размерам замедляет движение, расширяется и проходит через большее, которое при этом также расширяется, но движение его или замедляется, если оно не очень большое, или же ускоряется в обратном случае. Затем кольца расходятся в разные стороны.

3⁰) Если те же кольца имеют вначале одинаковые размеры, то движения их будут симметричны относительно средней плоскости *P* па-

раллельной плоскости колец. Частицы в этой плоскости остаются в покое. По мере приближения к P кольцо увеличивается в размерах и замедляется в движении, не достигая P.

4°) Если кольцо движется нормально к стене, то на расстоянии около 100 м. м. от стены кольцо сразу расширяется, достигая в диаметре от 1 до 1,5 метра и затем рассеивается.

б) Вихревые кольца в *жидкости* можно получать, если выпускать из бюретки капли диаметром 4—5 м. м. с высоты 20—30 м. м. над поверхностью жидкости в сосуде. Жидкость в сосуде должна быть совершенно спокойна. Опытом установлено, что такие кольца образуются только при условии, чтобы обе жидкости диффундировали друг через друга. Всего лучше для этой цели употреблять азотно-кислое серебро для капель, а для жидкости в сосуде—воду немного подкисленную. Чистый алкоголь дает также хорошие кольца в бензине, но при малейшей примеси воды кольца не получаются. Картина образования колец из падающих капель хорошо видна из черт. (71). Кольца в жидкости можно получить еще иначе, а именно, выпуская под водой очень малые количества жидкости через тонкую трубку помощью резинового шарика. На черт. (72) показано, как из отверстия трубки выходит капля (1 и 2), как она отделяется от трубки и как мало-помалу образуется кольцо (3 и 4) и, наконец, как жидкость кольца закручивается (5). Кольцо поднимается кверху и сильно расширяется.

Из опытов *Томсона* с дымными вихревыми кольцами видно, что при приближении к ним ножа они уклоняются в сторону. На основании этих результатов возникла гипотеза о невозможности разрезать вихревое кольцо, что однако до последнего времени не было обосновано теоретически.

Профессор *Н. Е. Жуковский* доказал это положение для прямолинейных нитей. Он нашел теоретически, что вблизи острия треугольного ножа AOB (черт. 73) вихревая нить может двигаться по трем траекториям: ab; a_1b_1; a_2b_2, идущим ассимптотически к прямым AO; OB; OC и OD; траектория $a_2\ b_2$, проходя около острия, удаляется от него. Если нож имеет вид линии OA (черт. 74), то предыдущая картина сохраняется вполне и здесь. Итак можно сказать, что если приближать острие ножа к прямолинейной нити, то она будет уклоняться от него и следоват. разрезать нить ножем невозможно.

Атмосфера вихревой трубки. Это явление было рассмотрено в общем случае *Кельвином* в 1867 г. Он нашел, что каждая вихревая нить в своем движении в безграничной жидкости сопровождается некоторою частью жидкости, образующего атмосферу трубки. Частицы этой жид-

кости описывают замкнутые траектории около нити; движение это невихревое. Если нить A_1 движется параллельно некоторой неподвижной плоскости MN (черт. 75), то атмосфера нити представится жидкостью, имеющею вид полуцилиндра abc, внутри которого частицы движутся по замкнутым траекториям; точки a и c—критические, т.-е. с нулевою скоростью. Вне атмосферы линии тока суть линии efg, огибающие атмосферу. При *двух* нитях равного напряжения, но с противоположным вращением получается атмосфера в виде цилиндра $abcd$ (черт. 75), состоящего из двух частей, симметрично расположенных относительно плоскости симметрии MN, которая перпендикулярна к A_1A_2. Каждая часть представляет атмосферу соответственной нити подобно сказанному выше об одной нити. Если скорость перемещения нитей равна v, то составляющая скорости параллельная MN для частиц внутри атмосферы больше v, а для частиц вне атмосферы меньше v.

Прямолинейная цилиндрическая вихревая трубка конечных размеров. Для нас особенно интересно рассмотреть движение вихревых трубок конечных размеров. Каждую такую трубку можно рассматривать, как состоящую из вихревых нитей и можно доказать, что при движении трубок центр их тяжести G $(x_0;\ y_0)$ остается *неподвижным*.

В виде примера рассмотрим случай движения одной трубки в неограниченной жидкости. Пусть поперечное сечение трубки S есть круг радиуса R_0 (черт. 76). Во всех точках площади вихрь r постоянен; вне трубки $r=0$, так как по предположению жидкость движется с потенциалом скоростей. Мы будем считать доказанным, что центр тяжести вихря G неподвижен. Затем скорость W в какой-либо точке P, лежащей внутри или вне трубки будет перпендикулярна к PG на основании симметрии в массе жидкости; очевидно $W=f\ (x;\ y)$, т.-е. не зависит от t; следоват., движение жидкости установившееся. Определим W для случая, когда P *вне* трубки. Для этого рассмотрим циркуляцию по окружности CP:

$$ci = \int\limits_{PC}(udx + vdy) = \int\limits_{PC} W.ds.\operatorname{Cos}(W;ds) = 2\pi R.W.$$

С другой стороны известно, что

$$ci = 2\int\limits_{S} r.d\sigma = 2r.\pi R_0^2$$

где S—поперечное сечение трубки; следоват.,

$$W = r.\frac{R_0^2}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Когда P — *внутри* трубки, то

$$ci = \int_{P_1C_1} (udx + vdy) = 2\pi R_1 . W_1$$

и затем

$$ci = 2\int_s rd\sigma = 2r\cdot\pi R_1^2,$$

где s — поперечное сечение части трубки, соответствующей радиусу R_1; следоват.

$$W_1 = r.\ R_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Из уравнений (a и b) видно, что жидкость внутри трубки вращается с постоянною угловою скоростью $\omega_1 = r$. Вне трубки жидкость вращается с переменной угловой скоростью

$$\omega = r.\left(\frac{R_0}{R}\right)^2$$

При $R = \infty$ скорости W и ω равны нулю, как и должно быть, так как во всех задачах гидродинамики неограниченная масса жидкости принимается покоющейся в бесконечности.

О движении вихревых нитей. Для движения вихревых нитей *Гельмгольц* и *Кирхоф* нашли 4 теоремы, устанавливающие законы этого движения. Здесь мы ограничимся передачей некоторых сведений о движении вихрей, не вдаваясь ни в подробности, ни в доказательства.

Если вихревые нити движутся в неограниченной массе жидкости, где нет вихревых движений, и где, следоват., скорости имеют потенциал, то величина и направление скорости в каждой точке может быть определена по следующему правилу. Нужно представить себе на месте каждой вихревой нити проводник, по которому идет электрический ток силою пропорциональной вихревому напряжению нити, а на месте точки жидкости—магнитный полюс с напряжением $= 1$; определим величину и направление силы действующей со стороны тока на этот полюс; тогда эта сила по величине и направлению представит скорость в данной точке жидкости.

Рассмотрим движение *двух параллельных прямолинейных нитей* среди неограниченной массы жидкости. Из подробного анализа этого движения оказывается, что эти нити будут описывать концентрические окружности, при чем расстояние между ними будет постоянно. Если вращение частиц в нитях происходит в *одну* сторону (черт. 77), то центр описываемых окружностей находится между нитями и делит расстояние между ними в отношении обратно пропорциональном напряжению нитей. Направление движения нитей по окружностям происхо-

дит в ту же сторону, как и в нитях. Если же вращение частиц в нитях *противоположное* (черт. 78), то центр описываемых окружностей находится на линии соединяющей нити и со стороны нити с большим напряжением. Когда же нити имеют вращение противоположное с равным напряжением, то нити будут двигаться с одинаковою скоростью равномерно по прямым перпендикулярным к их кратчайшему расстоянию (черт. 79). Жидкость вне нитей будет находиться также в движении. Напр., в последнем случае точки жидкости, находящиеся на линии соединяющей нити будут двигаться параллельно нитям; частица, находящаяся посередине между нитями имеет скорость в 4 раза большую скорости нитей. На черт. 80 показано движение *трех* параллельных нитей равного напряжения, из которых две с левым вращением и одна с правым. Начальное положение нитей обозначено 1_0; 2_0; 3_0. На черт. 81 изображены траектории движения *четырех* параллельных нитей равного напряжения; из них две нити—с правым вращением и две нити—с левым вращением. Начальное положение нитей обозначено 1_0; 2_0; 3_0; 4_0. Во всех этих случаях вид траекторий для нитей зависит от начального положения нитей.

В несовершенной жидкости всегда образуются вихревые нити. Как показано выше, движение вязкой жидкости в капиллярах происходит так, что частицы движутся по линиям параллельным продольной оси капилляра; скорости их увеличиваются от периферии к центру по параболическому закону. Все частицы, лежавшие в момент t в каком-либо поперечном сечении (черт. 67), будут лежать в следующий момент на поверхности параболоида вращения, а еще в следующий момент на новом параболоиде.

Такое уменьшение скорости от центра к переферии происходит от внутреннего трения между частицами и от трения жидкости о стенки трубы (внешнее трение).

Можно принять, как гипотезу, что при движении жидкости в трубке к стенкам ее прилипает весьма тонкий слой жидкости; по этому неподвижному слою скользят слои жидкости со скоростями постепенно увеличивающимися от стенки к средине трубки.

В месте соприкасания движущейся жидкости с покоющейся образуется пласт жидкости, состоящий из нескольких слоев, имеющих различные скорости; слой, прилегающий непосредственно к прилипшей жидкости имеет скорость весьма малую, близкую к нулю; следующий слой имеет скорость несколько большую и т. д. Если рассматривать частицы, лежавшие в момент t на линии перпендикулярной к длине слоя, то в следующие моменты эти частицы будут лежать в плоских

сечениях наклонных к длине слоя (черт. 82), как бы вращающихся около осей перпендикулярных к плоскости чертежа. Весь пласт представляется состоящим из вихревых нитей одинакового вращения. Такой пласт при бесконечно малой толщине называется вихревою поверхностью. Поэтому при встрече потока со стенкою образуется вследствие трения на границе между текущей жидкостью и стоячей две вихревые поверхности (черт. 83); одна из нитей левого вращения, другая—из нитей правого вращения. Так как вихревые нити стремятся вращаться друг около друга, то вихревые поверхности оказываются неустойчивыми и легко принимают вид спиралей и тогда образуется вихревая трубка, которая отделяется в покоющуюся жидкость; вслед за этой трубкой образуются новые трубки и т. д. (черт. 84).

Если струя вытекает из сосуда через отверстие в покоющуюся жидкость (черт. 85), то вследствие тех же причин на границе струи и покоющейся жидкости образуются вихревые поверхности, а затем вихревые нити и трубки, которые скользят по струе и отделяются в покоющуюся жидкость. Совершенно такое же явление наблюдается при движении жидкости в трубах, каналах и реках; у стенок их постоянно образуются вихревые нити и трубки. Кинетическая энергия всех вихревых трубок, находящихся в идеальной жидкости, остается постоянной; если же жидкость вязкая, то энергия трубок непрерывно убывает пропорционально коэффициенту внутреннего трения.

ГИДРАВЛИКА.

ВВЕДЕНИЕ.

§ 22. Общие гипотезы гидравлики. При изложении гидравлики будем предполагать жидкость несовершенною, несжимаемою, подверженною действию только сил тяжести и находящеюся (в большинстве случаев) в установившемся движении. Опытные данные будут приводиться исключительно для воды, так как в приложениях приходится иметь дело преимущественно с водою, и так как эти данные определены для воды в гораздо большем числе, чем для других жидкостей.

В гидравлике следует отличать двоякого рода гипотезы: *общие* и *частные*. Общие гипотезы служат основанием для всех выводов гидравлики; частные же вводятся при рассмотрении только некоторых случаев движения. Существуют две общие гипотезы: *неразрывность массы* жидкости и *параллелизм слоев*. *Первая* гипотеза известна нам из гидродинамики (§ 13), откуда она заимствована, и где даны уравнения, выражающие это свойство аналитически. Но и в гидродинамике эта гипотеза является не самостоятельной, а есть лишь частный случай общего свойства движения всяких сплошных деформируемых систем: твердых упругих, жидких и газообразных тел. Перемещения частиц этих систем предполагаются лишь такие, которые суть непрерывные функции координат этих частиц. Из этого основного положения вытекают все свойства движения сплошных систем, в том числе и неразрывность массы. *Вторая* гипотеза заключается в следующем. Пусть жидкость движется в сосуде AB (черт. 86) с продольною осью C_0C и с поперечными сечениями $mn = \omega$; $m'n' = \omega'$..... По этой гипотезе движение представляется таким, что во всех точках каждого поперечного сечения сосуда скорости предполагаются *равными* и *нормальными* к сечению. Если скорости для сечений ω; ω'.... равны v; v'...., то за время dt частицы лежащие в этих сечениях пройдут пути vdt; $v'dt$... и будут лежать в сечениях m_1n_1 и $m_1'n_1'$ параллельных mn

и $m'n'$. Взамен ушедших частиц через сечения mn; $m'n'$...... войдут новые частицы и заполнят об'емы mnm_1n_1 и $m'n'm_1'n_1'$. На основании этой гипотезы напишем:

$$(mnm_1n_1) = \omega . vdt; \qquad (m'n'm_1'n_1') = \omega' . v'dt.$$

На основании первой гипотезы имеем:

$$\omega . vdt = \omega' . v'dt = ...; \text{ откуда: } \omega v = \omega' v' = ... = Q \ . \ . \ . \qquad (36)$$

Количество Q называется *расходом* и представляет об'ем жидкости, проходящий через любое поперечное сечение сосуда в единицу времени, напр., в секунду.

Итак, обе гипотезы, рассматриваемые вместе, выражают, что, во-первых, частицы, лежавшие в момент t в каком-либо поперечном сечении mn, будут лежать в следующий момент в смежном сечении m_1n_1 параллельном mn (отсюда название гипотезы—*параллелизм слоев*), и что, во-вторых, расходы через все поперечные сечения равны между собою.

Гипотеза параллелизма слоев совершенно не согласуется с действительностью. В самом деле, скорости нормальны к поперечным сечениям только в одном случае, когда сосуд имеет вид цилиндра с прямою осью; во всех остальных случаях скорости для различных точек сечения не будут нормальны к сечению. Затем для различных точек сечения скорости не равны между собою, даже и в случае цилиндра с прямою осью, вследствие трения частиц о стенки сосуда и вследствие трения частиц между собою. По этой причине частицы, лежавшие в сечении mn в момент t, будут лежать в следующий момент на некоторой поверхности.

Несмотря на такое противоречие между гипотезой и наблюдением, параллелизм слоев, введенный в гидравлику еще Д. Бернулли, удерживается в ней и по настоящее время, потому что: 1) он значительно упрощает выводы и 2) не вносит сколько-нибудь заметных неточностей в окончательные результаты выводов. Это последнее обстоятельство происходит оттого, что несогласие между гипотезой и действительностью касается собственно распределения скоростей в каком-либо поперечном сечении, а это распределение рассматривается в гидравлике только в немногих случаях. Обыкновенно же в гидравлике теория и опыт определяют для данного сечения сосуда среднюю скорость V и расход Q. Различие, получаемое между теоретической и опытной величиной для V и Q, исправляется особыми коэффициентами: скорости φ и расхода μ.

Из гипотезы о параллелизме слоев вытекают два следствия: а) при движении жидкости трение проявляется только внешнее, т.-е. по стен-

кам сосуда; внутреннее трение (между частицами) по этой гипотезе не существует, так как нет относительного перемещения частиц; б) так как скорости, будучи перпендикулярны к поперечному сечению, параллельны между собою, то согласно изложенному в § 17, ед. давления в различных точках этого сечения изменяются по гидростатическому закону, а потому сумма давлений на все сечение равна $p\omega$, где p—ед. давление в центре тяжести сечения.

Если определить количество движения и живую силу жидкости, проходящей через поперечное сечение в ед. времени, то получаются различные результаты, смотря потому, будем ли считать согласно второй гипотезе скорость постоянной во всех точках сечения или же будем принимать ее, согласно опыту, переменной по этому сечению. *Базен* путем опыта нашел, что количество движения и живая сила при скорости *переменной* в поперечном сечении больше, чем при скорости *постоянной*, первое на 3%, а вторая на 9%. Этот результат нужно имет в виду особенно при вычислении живой силы потоков с целью утилизации их, напр., для гидравлических двигателей (тюрбин).

Действительная живая сила потоков будет *больше* определенной по средней скорости.

Что касается *частных* гипотез, то об них будет упомянуто при рассмотрении отдельных случаев движения. Здесь же ограничимся указанием на некоторые из них.

a) При вытекании жидкости из сосуда через отверстие в тонкой стенке струя по выходе из отверстия постепенно сжимается и в довольно близком расстоянии от отверстия сечение ее становится наименьшим (сжатое сечение). Частная гипотеза в этом случае заключается в предположении, что частицы жидкости, как в самом сжатом сечении, так и пройдя его, движутся независимо друг от друга; свойства такого движения указаны в § 17. Таже гипотеза делается в случае вытекания жидкости через насадки, через водосливы и т. п.

b) При вытекании из сосудов через отверстия, насадки, водосливы, трубы и т. п., в случае переменного горизонта воды в сосудах движение частиц не есть установившееся. Обыкновенно при рассмотрении этого движения принимается частная гипотеза, что скорость вытекания в каждый момент равна скорости установившагося движения при том горизонте жидкости, который наблюдается в этот момент.

Подробное рассмотрение движения жидкости при переменном горизонте (см. § 31) приводит к заключению, что вообще эта гипотеза близка к истине, но в частных случаях она может оказаться неверной.

c) При установившемся движении жидкости в трубах, каналах и реках все гидравлические сопротивления согласно второй общей гипотезе предполагаются происходящими только от трения частиц жидкости о стенки. Это трение определено опытами для случая равномерного движения. Частная гипотеза предполагает, что найденное выражение для трения будет справедливо и при неравномерном движении.

Пульсация жидкости. Только что было упомянуто, что в гидравлике рассматривается преимущественно установившееся движение, при котором во всякой точке пространства, занятого жидкостью, ни скорость W, ни давление p, ни плотность ρ не изменяются со временем. В действительности при таком движении всяких масс жидкости, как малых так и больших, величины W; p; ρ изменяются по времени, хотя в очень узких пределах. Это изменение можно наблюдать по пьезометру, т.-е. по очень тонкой трубке вставленной вертикально в жидкость. Горизонт жидкости в пьезометре при установившемся движении должен занимать вполне определенное положение, соответствующее скорости W и давлению p для частицы жидкости находящейся непосредственно внизу пьезометра. В действительности этот горизонт постоянно колеблется, хотя амплитуда колебания и время колебания довольно малы и постоянно меняются.

Это явление колебания горизонта указывает, что W и p не постоянны; оно называется *пульсацией* и проявляется при движении всяких масс жидкости; в реке вблизи берега пульсация больше, чем в середине реки; она заметно увеличивается с увеличением шероховатости ложа реки.

§ 23. Теорема Борда. Рассмотрим установившееся движение *несовершенной* жидкости по трубе AB (черт. 87), поперечное сечение которой сразу увеличивается, так что диаметр части B чувствительно больше, чем части A. Для общности предположим, что в месте соединения частей A и B поставлена дифрагма с отверстием. Струя по выходе из этого отверстия сжимается и в довольно близком расстоянии от отверстия имеет сжатое сечение ab; затем струя быстро расширяется; в сечении cd она заполняет всю трубу B; движение в cd происходит по линиям перпендикулярным к сечению; в сечении ab движение происходит также по линиям перпендикулярным к сечению. При проходе жидкости между сечениями ab и cd проявляются особые гидравлические сопротивления, которые определяются по теореме Борда. Если скорость частиц в сечении ab равна V_0, а в сечении cd равна V; угол между этими скоростями равен α; то по этой теореме высота гидравлических сопротивлений на единицу веса расхода Q про-

текающей жидкости $(h'' - h_0'')$ равна высоте потерянной скорости W, т.-е.

$$(h'' - h_0'') = \frac{W^2}{2g} = \frac{V_0^2 + V^2 - 2\,V_0\,V\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

при $\alpha = 0$:

$$(h'' - h_0'') = \frac{(V_0 - V)^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Теорема Борда доказывается на основании одной общей теоремы теоретической механики, заключающейся в следующем. Пусть какая-либо система материальных частиц движется под действием внешних сил P и пусть m и v суть масса и скорость какой-либо частицы входящей в систему. Тогда mv есть количество движения для этой частицы; спроектируем это количество на произвольную ось l; тогда

$$mv\,\mathrm{Cos}\,(vl)$$

представит проекцию количества движения этой частицы на ось l. Взяв сумму таких величин для всех частиц, получим для какого-либо момента t:

$$\Sigma mv\,\mathrm{Cos}\,(vl)$$

Для следующего момента $(t + dt)$ найдем:

$$\Sigma mv\,\mathrm{Cos}\,(vl) + d\,\Sigma mv\,\mathrm{Cos}\,(vl)$$

Следоват. за время dt получилось приращение проекций количества движения равное:

$$d\,\Sigma mv\,\mathrm{Cos}\,(vl)$$

Найдем сумму проекций всех внешних сил P на ту же ось l; она равна

$$\Sigma P\,\mathrm{Cos}\,(Pl)$$

Если эту сумму умножить на dt, то получим элементарный импульс внешних сил, спроектированный на ось l, т.-е. получим:

$$dt\,\Sigma P\,\mathrm{Cos}\,(Pl).$$

По общей теореме теоретической механики должно существовать равенство между найденным выше приращением количества движения и элементарным импульсом; следов. будем иметь:

$$d\,\Sigma mv\,\mathrm{Cos}\,(vl) = dt\,\Sigma P\,\mathrm{Cos}\,(Pl) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

Этим равенством воспользуемся для вывода теоремы Борда. Возвращаясь к черт. 87, видим, что струя ограничена некоторою поверхностью bf, ae; между стенками трубы B и этою поверхностью струи получается кольцевидная полость CD, заполненная жидкостью, кото-

рая находится в движении настолько медленном, что жидкость около диафрагмы gk и около струи ab можно считать находящеюся в покое, а потому горизонты жидкости в пьезометрах, поставленных в любой точке k' этой части жидкости, будут лежать в одной горизонтальной плоскости rr'. В полость CD будут отделяться частицы от струи и в то же время другие частицы будут увлекаться струей из полости. В сжатом сечении ab скорость V_0, одинаковая для всех ее точек, нормальна к ab, а потому, согласно сказанному в § 17 относительно прямолинейного и параллельного движения, ед. давления в точках сечения ab распределяются по гидростатическому закону. На границах сечения ab с полостью ед. давление в каждой точке, принадлежащей одновременно этому сечению и полости, одно и тоже.

По этому горизонты в пьезометрах, поставленных в любых точках сжатого сечения, будут лежать в той же плоскости rr'.

Ед. давления в сечении cd распределяются также по гидростатическому закону, и горизонты в пьезометрах поставленных в любых точках этого сечения лежат в одной и той же горизонтальной плоскости qq'. Эта плоскость лежит выше плоскости rr' на высоту H.

Рассмотрим линию тока mn и напишем для нее уравнение Д. Бернулли для несовершенных жидкостей (уравн. 29). Пусть z_0; p_0; V_0 будут ордината, ед. давление и скорость для точки m; z; p; V—такие же величины для точки n. Тогда получаем:

$$\frac{V^2-V_0^2}{2g}+\left(h''-h_0''\right)_{mn}=\left(z_0+\frac{p_0}{\Delta}\right)-\left(z+\frac{p}{\Delta}\right)=-H \;\ldots\ldots\; (40)$$

Здесь член $(h''-h_0'')_{mn}$ есть искомая высота гидравлических сопротивлений, происходящих при очень быстром расширении струи; она определится, как только будет известна величина H. Найдем высоту H помощью вышеуказанной теоремы. С этою целью определим для момента t количество движения для всех частиц, как составляющих струю между сечениями ab и cd, так и наполняющих полость CD. За промежуток времени dt некоторые из этих частиц переместятся, другие же останутся на своих местах. Именно частицы сечений ab и cd переместятся в смежные сечения $a_1\ b_1$ и $c_1\ d_1$; расстояния между ними: $aa_1=V_0dt$ и $cc_1=Vdt$. Таким образом частицы, составлявшие в момент t об'ем $abcd$ займут в момент $(t+dt)$ об'ем $a_1b_1c_1d_1$. Что касается частиц в полости CD, то частицы около сечения ab и диафрагмы gk останутся в покое, а прочие будут медленно перемещаться.

В момент t струя состоит из об'емов: элементарного aba_1b_1 и конечного $a_1b_1\ cd$.

В момент $(t+dt)$ она будет состоять из конечного об'ема a_1b_1cd и элементарного cdc_1d_1; обозначим эти об'емы цифрами I, II и III. Возьмем проекцию количеств движения на ось l выбранную параллельно направлению V. Проекцию количества движения на эту ось частиц в каком-либо об'еме обозначим так:

$$\Sigma mv \operatorname{Cos} (vl)$$

где m и v масса и скорость одной из частиц об'ема. Тогда для момента t найдем для частиц в струе $abcd$ и для частиц в полости CD:

$$\Big[\Sigma mv \operatorname{Cos} (vl)\Big]_t = \Big[\Sigma mv \operatorname{Cos} (vl)\Big]_I + \Big[\Sigma mv \operatorname{Cos} (vl)\Big]_{II} + \Big[\Sigma mv \operatorname{Cos} (vl)\Big]_{CD}$$

Для момента $(t+dt)$ получим для струи $a_1b_1c_1d_1$ и для полости CD:

$$\Big[\Sigma mv \operatorname{Cos} (vl)\Big]_{t+dt} = \Big[\Sigma mv \operatorname{Cos} (vl)\Big]_{II} + \Big[\Sigma mv \operatorname{Cos} (vl)\Big]_{III} + \Big[\Sigma mv \operatorname{Cos} (vl)\Big]_{CD.}$$

Искомое приращение количества движения за время dt получим, если вычтем первое равенство из второго. При этом необходимо заметить, что так как рассматриваемое движение есть установившееся, то в любой точке пространства занятого жидкостью во всякий момент времени ни плотность ρ ни скорость v не изменяются. Поэтому проекция количества движения $mv \operatorname{Cos} (vl)$ для элемента массы в любой точке пространства остается все время без изменения; следовательно проекция количества движения в об'еме II и в полости CD остается также без изменения. Вычитанием предыдущих равенств находим:

$$d\Big[\Sigma mv \operatorname{Cos} (vl)\Big] = \Big[\Sigma mv \operatorname{Cos} (vl)\Big]_{III} - \Big[\Sigma mv \operatorname{Cos} (vl)\Big]_{I.}$$

Об'ем (I) $= ab \,.\, aa' = \Omega_0 \,.\, V_0 \,.\, dt$; масса этого об'ема равна

$$\frac{\Delta}{g}\, \Omega_0 V_0 dt.$$

Тогда

$$\Big[\Sigma mv \operatorname{Cos} (vl)\Big]_I = \frac{\Delta}{g}\, \Omega_0 V_0 dt. \;\; V_0 \operatorname{Cos} \alpha.$$

Также найдем:

$$\Big[\Sigma mv \operatorname{Cos} (vl)\Big]_{III} = \frac{\Delta}{g}\, \Omega V dt. \;\; V.$$

При этих вычислениях принято, что все частицы об'ема I имеют одну и ту же скорость V_0, а частицы об'ема III — скорость V; угол α

есть угол между направлениями этих скоростей. Итак окончательно находим:

$$d\left[\Sigma mv \operatorname{Cos}(vl)\right]=\frac{\Delta}{g}\,dt\left\{\Omega V^2-\Omega_0 V_0{}^2 \operatorname{Cos}\alpha\right\} \quad . \; . \; . \; (41).$$

Теперь займемся определением внешних сил, действующих на частицы струи $abcd$ и полости CD. Отбросим струю, лежащую влево от сечения ab, а также струю, лежащую вправо от сечения cd; также отбросим трубу и диафрагму (черт. 88). Взамен отброшенных частей приложим соответственные силы. Эти силы и вес жидкости образуют *четыре* следующих группы.

1) Нормальные давления в сечении cd; 2) нормальные давления в сечении ab, по поверхности струи a_2abb_2 и по диафрагме gk; 3) давление по цилиндрической части трубы $cgk\bar{a}$; они состоят из нормальных давлений, а на некотором протяжении cc_2d_2d, кроме нормальных также из касательных сил (силы трения); последними пренебрегаем вследствие малого протяжения этой части трубы; 4) вес жидкости G.

1) Давления *первой* группы изменяются по гидростатическому закону; если в центре тяжести сечения cd ед. давление равно p_c, то сумма давлений равна $p_c\Omega$, а сумма их проекций на ось l равна: $-p_c\Omega$.

2) Давление *второй* группы изменяются также по гидростатическому закону. Площадь диафрагмы, поверхности струи a_2abb_2 и сечение ab разобьем на элементы, на которых построим элементарные цилиндры qq' с основаниями $d\omega$ и $d\Omega$ и с производящими параллельными оси трубы. Таким образом вся масса жидкости разобьется на безконечно большое число элементарных цилиндров. Давление на основание $d\omega$ равно $p'd\omega$, где $p'=\Delta . rq$; проекция этого давления на ось l равна:

$$p'd\omega . \operatorname{Cos}(p'l)=p'd\Omega$$

где $d\Omega$—элемент сечения cd и в тоже время поперечное сечение рассматриваемого элементарного цилиндра. Тогда сумма проекций всех давлений второй группы равна:

$$\int_\omega p'd\omega \operatorname{Cos}(p'l)=\int_\Omega p'd\Omega.$$

Проведем через r горизонтальную плоскость rr''; тогда высота $r''q''$ представляет высоту $\frac{p''}{\Delta}$, где p'' — ед. давление для площадки $d\Omega$, если предположить на время, что вся масса жидкости между gk и cd находится в покое. Из чертежа видно:

$$\frac{p''}{\Delta}=\frac{p'}{\Delta}+\eta_1=\frac{p'}{\Delta}+\lambda \operatorname{Cos}\beta; \text{ тогда } p'=p''-\Delta\lambda \operatorname{Cos}\beta.$$

Следовательно $p' d\Omega = p'' d\Omega - \Delta\lambda \operatorname{Cos} \beta . \, d\Omega$.

Отсюда выводим:

$$\int_{\Omega} p' d\Omega = \int_{\Omega} p'' d\Omega - \Delta \operatorname{Cos} \beta \int_{\Omega} \lambda d\Omega.$$

Первый член второй части представляет сумму гидростатических давлений по сечению cd а потому равен $p''_c \Omega$, где p''_c — ед. давление в центре тяжести этого сечения. Затем

$$\int_{\Omega} \lambda d\Omega = \text{об'ему } (gkdc)$$

и

$$\Delta \operatorname{Cos} \beta \int_{\Omega} \lambda d\Omega = G \operatorname{Cos} \beta$$

где G вес жидкости в об'еме $gkdc$. Итак для второй группы:

$$\int_{\omega} p' d\omega \operatorname{Cos} (p'l) = p''_c \Omega - G \operatorname{Cos} \beta.$$

3) Сумма проекций на ось l давлений *третьей* группы равна нулю, так как давления перпендикулярны к оси l, а силами трения пренебрегаем.

4) Наконец проекция веса на ту же ось равна $G \operatorname{Cos} \beta$.

Так как пьезометр в центре тяжести сечения cd в случае равновесия жидкости имеет горизонт в плоскости $rr'r''$, а в случае движения — в плоскости qq' (черт. 87 и 88), то очевидно:

$$\frac{p_c}{\Delta} - \frac{p''_c}{\Delta} = Cq - Ci = H.$$

Поэтому, если сложим найденные проекции всех давлений, то получим:

$$\Sigma P \operatorname{Cos} (Pl) = (p''_c - p_c) \Omega = - \Delta H \Omega \quad . \; . \; . \; . \; . \; (41a).$$

Соединяя уравнения (41) и (41a), представим уравн. (39) в такой ферме:

$$\frac{\Delta}{g} dt \left(\Omega V^2 - \Omega_0 V_0^2 \operatorname{Cos} \alpha \right) = - \Delta H \Omega \, dt.$$

Так как: $\Omega V = \Omega_0 V_0 = Q$, то имеем:

$$\frac{1}{g} V \left(V - V_0 \operatorname{Cos} \alpha \right) = - H \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (41b).$$

Подставим этот результат в уравн. (40) и тогда найдем окончательно:

$$\left(h'' - h_0'' \right)_{mn} = \frac{1}{2g} \left(V_0^2 + V^2 - 2 V_0 V \operatorname{Cos} \alpha \right) \quad . \; . \; . \; . \; (37).$$

Если при точке n (черт. 87) построить V и V_0 по величине и направлению, и замыкающий отрезок обозначить через W, то W представит потерянную скорость и тогда

$$\left(h'' - h''_0\right)_{mn} = \frac{W^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (37).$$

Таким образом приходим к весьма важному в гидравлике выводу: при внезапном увеличении диаметра трубы между *сжатым* сечением ab струи и *расширенным* cd проявляются гидравлические сопротивления, высота которых на ед. веса расхода Q равна высоте потерянной скорости. Работа гидравл. сопротивлений на вес расхода Q имеющего массу $M = \frac{\Delta}{g}\, Q$, равна:

$$\Delta\, Q \cdot \frac{W^2}{2g} = \frac{1}{2} M W^2.$$

Если сечения ab и cd параллельны, то $\alpha = 0$ и $W = V_0 - V$; тогда

$$\left(h'' - h_0''\right)_{mn} = \frac{(V_0 - V)^2}{2g} = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\Omega_0} - \frac{1}{\Omega}\right)^2 \quad \ldots\ldots (38).$$

Здесь Ω_0 — сжатое сочинение ab; если O—площадь отверстия и α—коеф. сжатия струи, то $\Omega_0 = \alpha O$. Рассмотренный случай гидравлических сопротивлений давно уже стал предметом изучения, но лишь в 1766 г, французский ученый *Борда (Borda)* первый дал верное выражение для гидравл. сопротивлений, почему положение, заключающееся в полученном выводе, называется *началом* или *принципом Борда.* Это начало вместе с теоремой Д. Бернулли составляют основу гидравлики.

В рассматриваемом случае гидравл. сопротивления происходят вследствие взаимодействия струи и жидкости, находящейся в полости CD. Это взаимодействие проявляется по поверхности $bfae$ (она называется *поверхностью раздела)* и выражается в том, что между струей и покоющейся жидкостью происходит трение по поверхности раздела; вследствие этого образуются вихревые трубки, которые частью направляются вдоль по струе, частью распространяются в покоющуюся жидкость, как это показано на черт. 85. Вследствие трения в этой жидкости вихревые трубки мало-помалу теряют свою живую силу. Поэтому для того, чтобы могли проявиться гидравлические сопротивления необходимо *существование поверхности раздела* жидкости, т.-е. *существование полости* CD, занятой жидкостью, находящейся частью *в покое*, частью в состоянии близком к покою. Эту полость можно назвать *полостью рониженного давления*, так как очень часто давления в ней меньше, чем в трубе A и в трубе B (в сечении cd). Представим

себе, что труба B имеет очертание струи, начиная от выхода ее из отверстия в диафрагме до сечения cd, а далее имеет прежнюю цилиндрическую форму. В этом случае полость CD, а, следовательно, и поверхность раздела не существуют, а потому не будут проявляться особые гидравлические сопротивления. Если предположить, что жидкость *совершенная*, то вследствие отсутствия в ней трения не будет причины для образоваиня вихревых трубок и для потери их живой силы в покоющейся жидкости. Поэтому в совершенной жидкости в этом случае не будут проявляться гидравлические сопротивления, как они не проявляются и в других случаях движения такой жидкости.

Потеря живой силы на гидравл. сопротивления в случае внезапного увеличения сечения трубы аналогична потере живой силы при ударе твердых тел, определяемой по теореме Карно, почему этот случай потери называется также *потерей на удар.*

Применение теоремы Борда к частным случаям. Рассмотрим некоторые частные случаи, в которых гидравлич. сопротивления определяются по теореме Борда.

1) Пусть трубы A и B (черт. 89) имеют общую продольную ось, и пусть соединение их не имеет диафрагмы. Здесь сжатого сечения нет, и сечение струи ab переходит в cd постепенным расширением. Высота гидравл. сопротивлений выражается форм. (38). Для большей ясности построим согласно § 15 *кривые давлений* и *скоростей*. Для этого вообразим в различных точках продольной оси труб пьезометры I . . . VI; соединяя горизонты воды в них, получаем кривую давлений ef. Если от точки e отложить вверх $eg = \frac{V_0^2}{2g}$ и провести горизонтальную плоскость MN, то получим плоскость напора. От этой плоскости вниз отложим $e'g'$; $e''g''$ . . . . равные высотам скоростей в поперечных сечениях струи, то, соединяя точки e' e'' . . . , найдем кривую скоростей. Вертикальное расстояние $e''k''$ между обеими кривыми представит высоту гидравл. сопротивлений на ед. веса на пути от сечения ab до рассматриваемого сечения $a'b'$. Следоват. отрезок ff', соответствующий сечению cd, равен высоте $(h'' - h''_0)$ определяемой по форм. (38). Если бы труба B имела форму расширяющейся струи $abcd$, то особых гидравл. сопротивлений не было бы; скорости увеличатся, а давления уменьшатся; поэтому обе кривые — скоростей и давлений — понизятся, первая больше, а вторая меньше.

2) Трубы A и B имеют общую ось; струя выходит через отверстие в диафрагме (черт. 90); если O — площадь отверстия в диафрагме, то

сжатое сечение ab равно $\Omega_0 = \alpha O$, где α коэффициент сжатия, меньший единицы. Расход $Q = \alpha O \, . \, V_0 = \Omega V$ и, следовательно:

$$\left(h'' - h''_0\right)_{c_0c} = \left(\frac{V_0 - V}{2g}\right)^2 = \frac{Q^2}{2g}\left\{\frac{1}{\alpha O} - \frac{1}{\Omega}\right\}^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (42).$$

Расположив на трубах A и B пьезометры I...VII, получим кривую давлений, а затем, так же как и в предыдущем случае, построим кривую скоростей. Какое-либо вертикальное расстояние $e''k''$ между обеими кривыми представит высоту гидравлич. сопротивлений на пути C_0E, считая от сжатого сечения.

3) В трубе поставлена диафрагма с отверстием O (черт. 91); сжатое сечение ab равно αO; скорость в нем V_0, а в трубе — V.

Для высоты гидравлич. сопротивлений получается предыдущая формула (42). Построение кривых давлений и скоростей делается так же как и в двух первых случаях и ясно видно из чертежа. Этот случай интересен тем, что высота гидравлических сопротивлений между сечениями ab и cd равна разности горизонтов воды в пьезометрах I и VI, а потому может быть определена непосредственно путем опыта.

4) Пусть вода из широкой трубы A (черт. 92) переходит в узкую B. Струя, войдя в эту трубу, сжимается и образует в ab сжатое сечение, затем быстро расширяется и в cd заполняет всю трубу. Вокруг сжатой струи получается полость CD низкого давления. В этом случае между сечениями ab и cd проявляются гидравлич. сопротивления, как и в предыдущих случаях. Хотя здесь нет внезапного уширения трубы, но все обстоятельства, обусловливающие гидравлические сопротивления, здесь налицо: сжатие и быстрое расширение струи и полость CD. Если Ω поперечное сечение трубы B, то сжатое сечение $ab = \alpha\Omega$; тогда

$$Q = \Omega V = \alpha\Omega \, . \, V_0; \text{ следов. } \left(h'' - h''_0\right)_{c_0c'} = \frac{(V_0 - V)^2}{2g} = \frac{Q^2}{2g\,\Omega^2}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \, . \; . \; (43).$$

Построение кривых давлений и скоростей производится так же, как и в предыдущих случаях.

Опытная проверка закона Борда. В гидравлической лаборатории Московского института инженеров путей сообщения автором этого сочинения неоднократно производились опыты по проверке закона Борда, при чем применялось расположение прибора по чертежу 90; 91 и 92.

а) При расположении прибора по чертежу 90 были определены следующие величины. Диаметры труб A и B равнялись: $d_1 = 105{,}6$ м. м. и $d = 171{,}4$ м. м.; диаметр диафрагмы $d_0 = 38{,}0$ м. м. Площади этих сечений равны: 8766; 23073 и 1134 м. м. ^{2}

Расстояния пьезометров от плоскости отверстия были следующие: II — 45; III — 80; VII — 920 м. м. Берем данные для одного из весьма многих опытов. Разность ξ пьезометров II и VII $= 696{,}3$ м. м.; разность ξ_1 пьезометров II и III $= 744{,}0$ м. м. Расход $Q = 0{,}002851$ к. м.; скорость в трубе $A: V_1 = 0{,}325$ м. и в трубе $B: V = 0{,}124$ м.

Для определения скорости V_0 в сжатом сечении струи имеем по чертежу (90):

$$\frac{V_0^2}{2g} = \xi_1 + \frac{V_1^2}{2g}; \text{ следов., } V_0 = \sqrt{2g\xi_1 + V_1^2} = 3{,}834 \text{ м.}$$

По найденным V_0 и V определяем высоту гидравл. сопротивлений по форм. Борда (38):

$$h_t = \left(h'' - h''_0\right) = \frac{(V_0 - V)^2}{2g} = 702 \text{ м. м.}$$

Чтобы найти значение этой величины h_p по данным опыта, имеем по чертежу:

$$h_p + \frac{V^2}{2g} = \xi + \frac{V_1^2}{2g}; \text{ следов., } h_p = \xi + \frac{V_1^2 - V^2}{2g} = 701 \text{ м. м.}$$

Отсюда видно, что величины h_t и h_p хорошо согласуются между собою.

Сделаем еще проверку опытным путем другой величины, выведенной выше теоретически, именно высоты H определяемой по форм. (41 b); она представляет разность пьезометров III и VII. При $\alpha = 0$ получается:

$$H_t = \frac{V}{g}\left(V_0 - V\right) = 46{,}7 \text{ м. м.}$$

Непосредственным измерением высот в III и VII пьезометрах получаем:

$$H_p = 47{,}7 \text{ м. м.}$$

Эти результаты получились весьма близкими.

По известной скорости V_0 в сжатом сечении и по данному сечению O диафрагмы находим коеф. сжатия α струи по выходе ее из отверстия; именно получаем по данным опыта:

$$Q = \alpha O \,.\, V_0; \text{ тогда } \alpha = \frac{Q}{V_0 O} = 0{,}656.$$

b) При расположении прибора по чертежу 91 были определены следующие величины: диаметр трубы $d = 105{,}6$ м. м.; диаметр диафрагмы $d_0 = 40{,}1$ м. м.; поперечные сечения их: 8766 и 1263 м. м². Пьезометры были поставлены на следующих расстояниях от плоскости отверстия: II—40; III—45 и VI—900 м. м.

Разность горизонтов в пьезометрах II и III: $\xi = 608,4$ м. м.: разность в пьезометрах II и VI: $\xi_1 = 726,0$ м. м. Расход в трубе $Q = 0.002863$ к. м., скорость в трубе $V = 0,327$ м.

Для определения скорости V_0 в сжатом сечении имеем по чертежу (91):

$$\frac{V_0^2}{2g} = \xi_1 + \frac{V^2}{2g}\text{; отсюда } V_0 = \sqrt{2g\xi_1 + V^2} = 3,788 \text{ м.}$$

По этим данным имеем по форм. Борда:

$$h_t = \left(h'' - h''_0\right) = \frac{(V_0 - V)^2}{2g} = 610,8 \text{ м. м.}$$

По непосредственному измерению разность уровней II и VI пьезометров получилась: $h_p = 608,4$ м. м.

Проверим опытом величину H, которая по форм. (41 b) выражается так:

$$H_t = \frac{V}{g}\left(V_0 - V\right) = 115,4 \text{ м. м.}$$

По непосредственному измерению высот пьезометров III и VI оказалось:

$$H_p = \xi_1 - \xi = 115,6 \text{ м. м.}$$

Следовательно проверка опытным путем значений h_t и H_t дает очень хорошие результаты. По известной скорости V_0 в сжатом сечении струи и по данному сечению O диафрагмы определяем коэффициент сжатия α струи; именно имеем:

$$\alpha O . V_0 = Q\text{; отсюда } \alpha = \frac{Q}{O V_0} = 0,598.$$

c) В дополнение к только что изложенному приводим результаты следующих семи опытов по проверке закона Борда, произведенных автором этого сочинения на приборе, расположенном по чертежу 90 и 91, при вышеуказанных размерах труб и диафрагм. (См. табл. стр. 108).

Из рассмотрения этой таблицы видно, что высоты гидравлических сопротивлений h_t и h_p, определенные по формуле Борда и опытным путем, хорошо согласуются между собою.

Также хорошо согласуются и высоты H_t и H_p, представляющие разность уровней пьезометров в сжатом и расширенном сечениях и определенные теоретически и путем опыта.

Итак, можно сказать, что закон Борда вполне подтверждается опытом.

	Располож. по черт. 90.			Располож. по чертежу 91.			
	1 оп.	2 оп.	3 оп.	4 оп.	5 оп.	6 оп.	7 оп.
Расход Q куб. м.	0,002994	0,002845	0,002823	0,002794	0,002851	0,002914	0,002845
Скорость V в широкой трубе. . .	0,130	0,123	0,122	0,319	0,325	0,332	0,324
Скорость V_1 в узкой трубе.	0,342	0,324	0,322	—	—	—	—
Скорость V_0 в сжатом сечении. . .	4,123	3,963	3,920	3,655	3,732	3,801	3,743
Разность ξ пьезометров II и VII . .	810,5	743,0	730,0	564,8	591,7	616,2	593,5
Разность ξ_1 пьезометров II и III. . .	860,3	795,1	788,1	675,7	704,5	730,5	708,6
Высота гидр. сопр. h_t по формул. . .	813	751	735	567	592	613	595
Высота гидр. сопр. h_p по опыту . .	816	748	735	565	592	616	593
Разность H_t по формуле (41 b). . .	53	48	48	109	113	118	113
Разность H_p пьезометров III и VII .	50	52	48	111	113	114	115
Коеф. сжатия α струи.	0,640	0,633	0,635	0,606	0,605	0,607	0,602

Глава I. Вытекание жидкости через отверстие в тонкой стенке.

§ 24. Вытекание жидкости на воздух через боковое отверстие в сосуде. Рассмотрим, как определяется скорость V и расход Q при вытекании жидкости на воздух через боковое отверстие в сосуде при *постоянном* горизонте. Струя по выходе из отверстия $ab = \omega$ (черт. 93), сжимается и в расстоянии k (при круглом отверстии приблизительно $k = \frac{1}{2} D$, где D—диаметр отверстия) от плоскости отверстия, получается сжатое сечение $cd = \Omega$. В некоторых случаях это сечение будет наименьшим из сечений струи, в других же случаях оно не будет наименшим. Вообще же оно характеризуется тем, что струя в сечении cd и затем далее состоит из частиц, движущихся независимо друг от друга; поэтому, на основании изложенного в § 17, как в сжатом сечении, так и далее в струе ед. давления равны атмосферному p_0. Таким образом во всех случаях сжатое сечение струи характеризуется тем, что оно делит струю на две части: в первой части, ближайшей к отверстию, ед. давления неравны атмосферному и изменяются от одной частицы к другой по какому-то закону, пока нам неизвестному; в другой части струи давления во всех точках равны атмосферному. Кроме того, сжатое сечение характеризуется еще тем, что в нем направления скоростей нормальны к сечению; в сечениях как перед сжатым, так и позади его скорости вообще не нормальны к сечению.

Зависимость между сечениями ω и Ω выражается равенством $\Omega = \alpha\omega$, где α — *коэффициент сжатия* струи; для круглых отверстий приблизительно $\alpha = 0{,}64$.

Определение скорости. Рассмотрим линию тока M_0M между свободною поверхностью M_0N_0 и сечением cd. Пусть для точки M_0 будут V_0; p_0; z_0; — скорость, ед. давление и ордината, а для точки M — те же величины V_p; p; z. Уравнение Д. Бернулли для несовершенных жидкостей напишется для этой линии тока в следующем виде:

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g} + \left(h'' - h''_0\right)_{M_0M} = \left(z_0 + \frac{p_0}{\Delta}\right) - \left(z + \frac{p_0}{\Delta}\right) = z_0 - z = MN = H.$$

Высота H есть *напор* для точки M. Высоту гидравлических сопротивлений по линии M_0M можно выразить через высоту скорости V_p следующим образом:

$$\left(h'' - h''_0\right)_{M_0M} = \zeta \frac{V_p^2}{2g} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

где ζ называется *коэффициентом сопротивления*. В последующем изложении мы будем очень часто представлять высоту гидравлических сопротивлений под этим видом. Тогда из предыдущего равенства получаем:

$$V_p = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \sqrt{2g\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)}.$$

Если рассматривать при тех же условиях жидкость совершенную, то в предыдущих выражениях надо положить $\zeta = 0$; тогда V_p обратится в V_t и затем получится:

$$V_t = \sqrt{2g\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)}.$$

Следовательно, V_p можно выразить через V_t таким образом:

$$V_p = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} V_t.$$

Но в § 15 было показано, что $V_p = \varphi V_t$, где φ — *коэф. скорости*. Тогда окончательно имеем:

$$V_p = \varphi \sqrt{2g\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

где $\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}}$ или $\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45).$

В среднем $\varphi = 0{,}97 - 0{,}99$; следоват., $\zeta = 0{,}02 - 0{,}06$.

Из выражения (44) видим, что наибольшее значение V_p соответствует точке c, а наименьшее—точке d, и что зависимость между V_p и H *параболическая*. Построим эту параболу. Линию cd продолжаем до пересечения в O с горизонтальной линией, проведенной в расстоянии $\frac{V_0^2}{2g}$ от свободной поверхности. В точке O проводим оси X и Y; тогда V_p есть ордината MR параболы OP, имеющей вершину в O; ось параболы есть OX и параметр ея равен: $2p = 2g\varphi^2 \operatorname{Sin} \psi$.

По чертежу имеем:

$$MN' = H + \frac{V_0^2}{2g} = OM. \operatorname{Sin} \Psi,$$

а из выражения (44) находим:

$$H + \frac{V_0^2}{2g} = \frac{1}{\varphi^2} \frac{V_p^2}{2g}.$$

Следовательно,

$$V_p^2 = 2g\,\varphi^2 \operatorname{Sin} \Psi . OM$$

или обозначая:

$$V_p = y \text{ и } OM = x$$

имеем:

$$y^2 = 2px.$$

Итак,

$$MR = V_p\,;\ 2p = 2\,[illegible]\,\varphi^2\,\mathrm{Sin}\,\Psi.$$

Найдем *упрощенное* выражение для V_p вместо точного (44). Пусть CM расстояние точки M от центра тяжести сжатого сечения равно r_1 а расстояние центра тяжести этого сечения от свободной поверхности CD равно H_0; тогда

$$H = H_0 + r_1\,\mathrm{Sin}\,\Psi$$

где r_1 положительно для точек лежащих ниже C и отрицательно для точек выше C. Положим для сокращения:

$$H_0 + \frac{V_0^2}{2g} = h_0$$

тогда из выражения (44) получается:

$$V_p = \varphi\sqrt{2g\left(H_0 + \frac{V_0^2}{2g} + r_1\,\mathrm{Sin}\,\Psi\right)} = \varphi\sqrt{2gh_0}\left\{1 + \left(\frac{\mathrm{Sin}\,\Psi}{h_0}\right)r_1\right\}^{1/2} \ . \ . \ (b).$$

Так как

$$\left(\frac{r_1}{h_0}\right)\mathrm{Sin}\,\Psi \angle 1$$

то всегда можно радикал в этом выражении разложить в ряд по биному Ньютона, и тогда получится:

$$V_p = \varphi\sqrt{2gh_0}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\Psi}{h_0}\right)r_1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\Psi}{h_0}\right)^2 r_1^2 + \ldots\ldots\right].$$

Наибольшее значение r_1 обозначим через r_{10}; тогда, если величина:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Sin}\,\Psi}{h_0}\,r_{10}$$

очень мала сравнительно с единицей, то можем пренебречь в разложении всеми членами кроме первого; в таком случае для скорости в точке M найдем *приближенное* выражение:

$$V_p = \varphi\sqrt{2gh_0} = \varphi\sqrt{2g\left(H_0 + \frac{V_0^2}{2g}\right)} \ . \ . \ . \ . \ . \ (46).$$

Эта скорость соответствует точке, для которой $r_1 = 0$, т.-е. скорости в центре тяжести C сжатого сечения. Итак, скорости во всех точках сечения можно принять равными между собою, если предыдущее условие выполнено.

Выражению (44) можно придать другой вид, если исключить начальную скорость V_0. Пусть Ω_0 и V_0 суть: сечение свободной поверхности и скорость частиц в нем лежащих, которую принимаем

одинаковой во всех точках поверхности; тогда в силу равенства расходов получается:

$$Q = \Omega_0 V_0 = \Omega V_p = \alpha\omega V_p; \text{ следов. } \frac{V_0^2}{2g} = \left(\frac{\alpha\omega}{\Omega_0}\right)^2 \frac{V_p^2}{2g}.$$

Если затем выражение (44) возвысить в квадрат, то, называя произведение: $\alpha\varphi = \mu$ *коэффициентом расхода*, находим:

$$V_p = \varphi \sqrt{\frac{2g\ H_0}{1-\left(\frac{\mu\omega}{\Omega_0}\right)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (47).$$

Если при этом величина $\left(\frac{\mu\omega}{\Omega_0}\right)^2$ мала сравнительно с единицей, то получается простейшая формула, очень часто применяемая в приложениях:

$$V_p = \varphi \sqrt{2gH_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48).$$

Если во всех полученных формулах положить $\varphi = 1$, то найдем значение для V_t; выражение (48) обратится в известную формулу *Торичелли*:

$$V_t = \sqrt{2gH_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49).$$

Определение расхода Q. В сжатом сечении около точки M возьмем элементарную площадку

$$d\Omega = d(\alpha\,\omega) = \alpha d\omega.$$

Тогда расход для этой площадки (элементарный расход) выразим так, приняв во внимание формулу *(b)*:

$$dQ = V_p d\Omega = V_p . \alpha d\omega = \alpha\varphi . V_t . d\omega = \mu d\omega \sqrt{2g\left(H_0 + \frac{V_0^2}{2g} + \eta \operatorname{Sin} \Psi\right)}$$

или, вводя сюда обозначение h_0, находим:

$$dQ = \mu d\omega \sqrt{2gh_0} \left\{1 + \frac{\operatorname{Sin}\Psi}{h_0} \eta\right\}^{1/2}$$

Для определения всего расхода Q нужно интегрировать вторую часть этого равенства по $d\omega$, т.-е. по всей площади *отверстия*. Проще всего это сделать, если разложить радикал по биному Ньютона совершенно так, как это было сделано выше при определении приближенного выражения для скорости, и затем проинтегрировать отдельно каждый член разложения; тогда получаем:

$$dQ = \mu\sqrt{2gh_0}\left\{d\omega + \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{Sin}\Psi}{h_0}\right)\eta d\omega - \frac{1}{8}\left(\frac{\operatorname{Sin}\Psi}{h_0}\right)^2 \eta^2 d\omega + \ldots\ldots\right\}$$

Следовательно,

$$Q=\mu\sqrt{2gh_0}\left\{\omega+\frac{1}{2}\frac{\text{Sin}\,\Psi}{h_0}\int_\omega \eta_1 d\omega-\frac{1}{8}\left(\frac{\text{Sin}\,\Psi}{h_0}\right)^2\int_\omega \eta_1^2 d\omega+\ldots\ldots\right\} \quad . \quad . \quad (c).$$

Здесь

$$\int_\omega \eta_1 d\omega=0$$

так как этот интеграл представляет момент площади ω относительно линии проходящей через центр тяжести; затем

$$\int_\omega \eta_1^2 d\omega=\text{I}$$

где I момент инерции площади ω относительно горизонтальной линии, проходящей через центр тяжести этой площади.

Как эта величина так и прочие, а именно

$$\int_\omega \eta_1^3 d\omega\,;\int_\omega \eta_1^4 d\omega\ldots.$$

вычисляются по известной площади отверстия.

Тогда равенство *(c)* перепишется так:

$$Q=\mu\omega\sqrt{2gh_0}\left\{1-\frac{1}{8}\left(\frac{\text{Sin}\,\Psi}{h_0}\right)^2\frac{I}{\omega}+\frac{1}{16}\left(\frac{\text{Sin}\,\Psi}{h_0}\right)^3\frac{1}{\omega}\int_\omega \eta_1^3 d\omega+\ldots\ldots\right\} . \, . (d).$$

Это выражение расхода справедливо для отверстий *любой* формы.

Если можно пренебречь всеми членами в скобках кроме первого по их малости, то для Q получаем такое простое выражение:

$$Q=\mu\omega\sqrt{2gh_0}=\mu\omega\sqrt{2g\left(H_0+\frac{V_0^2}{2g}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (50).$$

Его можно получить прямо, если для V_p принять формулу (46), т.-е. если считать, что скорости во всех точках сжатого сечения равны между собою. Действительно имеем:

$$Q=\Omega\,.\,V_p=\alpha\omega\,.\,\varphi\sqrt{2gh_0}=\mu\omega\sqrt{2gh_0}.$$

Если для V_p воспользоваться выражением (47), то найдем:

$$Q=\Omega\,.\,V_p=\alpha\omega\,.\,\varphi\sqrt{\frac{2gH_0}{1-\left(\frac{\mu\omega}{\Omega_0}\right)^2}}=\mu\omega\sqrt{\frac{2gH_0}{1-\left(\frac{\mu\omega}{\Omega_0}\right)^2}}\ldots.(51).$$

Если в выражении (50) можно пренебречь высотой $\frac{V_0^2}{2g}$ сравнительно с H_0 или если в выражении (51) членом $\left(\frac{\mu\omega}{\Omega_0}\right)^2$ можно пренебречь

сравнительно с 1, то в обоих случаях получим простейшее и наиболее часто употребляемое выражение для расхода Q через отверстие ω при напоре H_0, а именно:

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH_0} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (52).$$

Коэффициент расхода $\mu = \alpha . \varphi$: он приблизительно равен $0{,}64 . 0{,}97 = 0{,}62$, полагая $\alpha = 0{,}64$ и $\varphi = 0{,}97$.

Для *прямоугольного отверстия* высотою a и шириною b (черт. 94) можно получить весьма простую и точную формулу для Q. Площадь отверстия разоб'ем на элементарные площадки горизонтальными линиями в расстоянии $d\eta$ друг от друга; тогда

$$d\omega = b . d\eta.$$

Для скорости выбираем выражение (44), в котором согласно чертежа (94) имеем:

$H = y + k \operatorname{Cos} \Psi$; затем обозначим: $H + \frac{V_0^2}{2g} = y + k \operatorname{Cos} \Psi + \frac{V_0^2}{2g} = Y$; тогда

$$V_p = \varphi\sqrt{2gY}.$$

Элементарный расход равен:

$$dQ = d\Omega . V_p = \alpha d\omega . \varphi\sqrt{2gY} = \mu b . d\eta\sqrt{2gY}.$$

Так как по чертежу: $y = y_0 + \eta \operatorname{Sin} \Psi$, то $dy = \operatorname{Sin} \Psi . d\eta = dY$ и получаем:

$$dQ = \frac{\mu b . dY}{\operatorname{Sin} \Psi}\sqrt{2gY}.$$

Следовательно,

$$Q = \frac{\mu b\sqrt{2g}}{\operatorname{Sin} \Psi}\int_{Y_1}^{Y_2}\sqrt{Y}\, dY = \frac{2}{3}\frac{\mu b\sqrt{2g}}{\operatorname{Sin} \Psi}\left[Y_2^{3/2} - Y_1^{3/2}\right] \;.\;.\;. \quad (53).$$

здесь $Y_1 = y_1 + k \operatorname{Cos} \Psi + \frac{V_0^2}{2g}$; $Y_2 = y_2 + k \operatorname{Cos} \Psi + \frac{V_0^2}{2g}$.

Величины y_1 и y_2 представляют вертикальные расстояния точек b и a от свободной поверхности; k — расстояние сжатого сечения от плоскости отверстия.

Если стенка вертикальна, то угол — Ψ прямой и получим:

$$Q = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\left\{\left(Y_2 + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(Y_1 + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right\} \;.\;.\;.\;. \quad (54).$$

В тех случаях, когда скоростью V_0 и членом $k \operatorname{Cos} \Psi$ по их малости можно пренебречь, то из выражения (53) получаем:

$$Q = \frac{2}{3}\frac{\mu b\sqrt{2g}}{\operatorname{Sin} \Psi}\left\{y_2^{3/2} - y_1^{3/2}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (55).$$

Умножив в этом выражении числителя и знаменателя на $(y_2 - y_1)$ и замечая, что

$$\frac{b(y_2 - y_1)}{\operatorname{Sin} \Psi} = \omega,$$

находим окончательно:

$$Q = \frac{2}{3} \mu \omega \sqrt{2g} \left\{ \frac{y_2^{3/2} - y_1^{3/2}}{y_2 - y_1} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots (56).$$

Если расстояние y_1 ребра b, постепенно уменьшаясь, дойдет до $y_1 = 0$, то получается случай *водослива* (черт. 95); для него из выражения (54) находим:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left\{ \left(y_2 + \frac{V_0^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(\frac{V_0^2}{2g} \right)^{3/2} \right\} \ldots \ldots (57).$$

Эта формула *Рейсбаха* для водосливов, имеющих начальную скорость V_0, которая часто называется скоростью подхода. При $V_0 =$ очень малой величине имеем:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g}\, y_2^{3/2} \ldots \ldots \ldots (58).$$

Эта формула *Дюбюа* для водосливов, имеющих очень малую скорость подхода V_0; здесь b—длина водослива и y_2—*напор* водослива. О водосливах, в виду особенной важности их в технике, будет ниже сказано подробнее.

Вытекание жидкости через затопленное отверстие. Пусть жидкость вытекает из сосуда через затопленное отверстие в *покоющуюся* жидкость. Как и при вытекании на воздух струя по выходе из отверстия ab (черт. 96) постепенно сжимается и в близком расстоянии от ab имеет сжатое сечение; далее струя постепенно расширяется, скорость ее частиц уменьшается и, наконец, делается равною нулю. Сжатое сечение характеризуется здесь тем, что оно наименьшее, и что в нем скорости перпендикулярны к сечению, а потому на основании § 17 ед. давления в сечении изменяются по гидростатическому закону; в точках на периметре сжатого сечения они равны ед. давлениям окружающей покоющейся жидкости. Рассмотрим линию тока M_0M; пусть V_0; z_0; p_0 суть для частицы M_0—скорость, ордината и ед. давление; V; z; p—те же элементы для частицы M.

Уравнение Д. Бернулли для этой линии тока имеет вид:

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g} + \left(h'' - h''_0\right)_{M_0M} = \left(z_0 + \frac{p_0}{\Delta}\right) - \left(z + \frac{p}{\Delta}\right).$$

Если z_0' есть ордината поверхности воды в нижнем сосуде, то из только что сказанного относительно сжатого сечения находим по закону Паскаля:

$$\left(z + \frac{p}{\Delta}\right) = \left(z_0' + \frac{p_0}{\Delta}\right).$$

Разность горизонтов воды в сосудах равна $(z_0 - z_0') = H$; выразим высоту гидравлических сопротивлений на пути M_0M так же как и при вытекании на воздух:

$$\left(h'' - h_0''\right)_{M_0M} = \zeta \frac{V_p^2}{2g}.$$

Тогда из предыдущего уравнения получаем:

$$V_p = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \sqrt{2g\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)}.$$

Так же как и выше найдем, что

$$\frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} = \varphi; \text{ следоват., } V_p = \varphi \sqrt{2g\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)} \quad . \; . \; . \; (59).$$

Это выражение показывает, что скорость во всех точках сжатого сечения одинакова; она зависит от разности горизонтов в сосудах и не зависит от глубины погружения самого отверстия.

Для расхода получается такое выражение:

$$Q = \Omega\, V_p = \alpha\omega\,.\, V_p = \mu\omega \sqrt{2g\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; (60).$$

Если Ω_0 свободная поверхность в верхнем сосуде и V_0 скорость, одинаковая во всех точках этой поверхности, то равенство расходов дает:

$$Q = \Omega_0\, V_0 = \Omega\, V_p = \alpha\omega\, V_p; \text{ откуда } V_0 = \frac{\alpha\omega\, V_p}{\Omega_0}.$$

Помощью этого равенства исключим V_0 из формулы (59), тогда получим:

$$V_p = \varphi \sqrt{\frac{2gH}{1 - \left(\frac{\mu\omega}{\Omega_0}\right)^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (61).$$

Если высота $\frac{V_0^2}{2g}$ очень мала сравнительно с H или если дробь

$$\left(\frac{\mu\omega}{\Omega_0}\right)^2$$

очень мала сравнительно с 1, то получается

$$V_p = \varphi \sqrt{2gH} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (62).$$

Для затопленных отверстий значения коэффициентов α и φ остаются теми же, что и для незатопленных отверстий; поэтому коэффициенты μ и ζ, как определяемые по α и φ, одинаковы для тех и других отверстий (подробнее см. § 25).

§ 25. О коэффициентах скорости, сопротивления, сжатия и расхода. Опыты для определения коэффициентов φ; ζ; α и μ а также опыты относящиеся к другим отделам гидравлики, производятся двояким образом: в малом виде—в гидравлических лабораториях, и в большом виде—при особой, всякий раз, организованной обстановке. К последней категории опытов относятся;

1) Старинные (в 1732 г.) опыты *Купле* над движением воды в трубах Версальского водопровода; 2) опыты произведенные в 1827 — 1829 г. г. в Меце *Понсле* и *Лебро* и затем в 1829 — 1834 г. г. одним *Лебро* над вытеканием воды через отверстия и водосливы (свыше 2000 опытов); 3) опыты *Дарси* в Париже в 1849 — 1851 г. г. над движением воды в трубах (около 200 опытов); 4) опыты *Дарси* совместно с *Базеном* над движением воды в каналах; 5) опыты *Базена* над движением воды в каналах и через водосливы; 6) опыты *Кастеля* в Тулузе над водосливами (до 500 опытов).

Многие американские гидравлики производили многочисленные опыты также в особой обстановке, как, напр., *Френсис* над водосливами; *Фтили* и *Стирнс* также над водосливами; *Г. Смитз* над водосливами и с трубами, и многие другие. Из русских работ сюда следует отнести: 1) опыты инженера *И. Августовского* по определению коэф. расхода для шлюзов на Мариинской системе; 2) опыты проф. *Н. Е. Жуковского* по исследованию явлений гидравлического удара в трубах; 3) опыты проф. *Г. К. Мерчинга* над движением воды в трубах большого диаметра, а также над движением керосина и воды в трубах небольшого диаметра.

Что касается лабораторий, то смотря по цели, для которой они устраиваются, они могут быть разделены на следующие группы: 1) *гидравлические лаборатории* — служащие для производства опытов над вытеканием жидкостей из сосудов через отверстия, насадки, водосливы; над движением воды в трубах, лотках и т. п.; 2) *гидротехнические лаборатории*—для изучения явлений при движении воды в речных руслах как свободных так и с различного рода сооружениями, как то: мостовыми устоями и быками, запрудами всякого рода и т. п.; 3) *гидрометрические лаборатории* — для определения коэффициентов вертушек, служащих для определения скоростей в реках; 4) *опытные бассейны* — для изучения сопротивлений, испытываемых судами при движении их в воде при различных скоростях и при разных очерта-

ниях судна; 5) *гидромодульные лаборатории*—для определения различных данных, служащих для целей орошения.

Первая по времени гидравлическая лаборатория была устроена еще в 1764 г. вблизи города Турина профессором *Мичелотти;* в ней были произведены многочисленные опыты по гидравлике. Из лабораторных работ особенно известны многочисленные и разнообразные опыты немецкого гидравлика *Вейсбаха,* оказавшего своими трудами неоценимые услуги гидравлике и построившего особый прибор для производства гидравлических опытов. Заслуживают также особенного внимания лабораторные опыты: французского физика *Пуазейля,* открывшаго закон движения жидкостей в капиллярах, по которому гидравлические сопротивления оказываются пропорциональными первой степени от скорости; английского ученого *О. Рейнольдса,* установившего два закона движения воды в трубах независимо от их диаметра, а именно, что при малых скоростях гидравл. сопротивления пропорциональны первой степени скорости, а при больших — второй степени; русского профессора *Н. П. Петрова*—определившего коэф. внутренняго и внешняго трения для различного рода вязских жидкостей, а именно: для масл, получаемых из бакинской нефти (керосин, нефтяные остатки, соларное масло) а также для масл оливкового, сурепного и спермацетового.

Но гидравлические лаборатории, даже отлично обставленные, не могут располагать на столько обширными помещениями и средствами, чтобы получать опытные данные для больших масс воды. Для опытов в большом масштабе и, следов., для больших масс воды необходимо пользоваться обстановкой и условиями, которые нередко могут встречаться при постройке и эксплоатации железных дорог и водных путей сообщения, а так же при постройке водопроводов, водостоков, гидроэлектрических станций, при установке гидравлических машин (тюрбин, насосов и т. п.) и т. д.

В подобных случаях опыты можно вести, если не всегда при разнообразных условиях, то во всяком случае в большом виде. Такая постановка опытов заслуживает особого внимания со стороны инженеров и вообще строителей и, по нашему мнению, только таким путем можно получить опытные данные для движения больших масс воды. Американские инженеры довольно часто производят гидравлические опыты, пользуясь для этого обстановкой, представляющейся на работах.

Описание гидравлического аппарата Московкого института инженеров путей сообщения. Для производства гидравлических опытов прежде употреблялся часто прибор Вейсбаха. Так как он имеет довольно малые размеры и позволяет производить опыты с небольшим напором и с отвер-

стиями или насадками небольших диаметров, то для гидравлической лаборатории названного Института по указаниям автора этой книги был построен особый аппарат, в котором избегнуты многие неудобства прибора Вейсбаха, и который дает возможность иметь довольно значительные напоры и испытывать отверстия и насадки не очень малых размеров.

Этот аппарат состоит из железного котла A (черт. 97 a) диаметром 1 м. и высотою 2 м. с плоскими днищами. Верхнее днище имеет кран в 2 дюйма; открыв его, соединяем котел с атмосферой. Котел поддерживается 2-мя железными станинами B коробчатого поперечного сечения, укрепленными болтами в фундаментной доске a. Котел можно перемещать по вертикальному направлению на 2-х вертикальных винтах b, укрепленных вверху и внизу в станинах B; котел можно также вращать около горизонтальной оси c. Для вертикального перемещения котла нужно посредством рукоятки d вращать коническую шестерню e, сцепляющуюся с коническим колесом f, насаженным на винте b. Вследствие вращения винта перемещается по винту гайка g надетая *на глухо* на ось c, которая скреплена с котлом помощью особой втулки c' (черт. 97b). Коническое колесо f и шестерня e имеются только на одном винте; другой же винт получает вращение от первого помощью горизонтального вала, помещенного внизу над фундаментной доской; на концах этого вала укреплены конические колеса, сцепляющиеся с коническими колесами, насаженными на нижние концы обоих винтов.

Для вращения котла около горизонтальной оси c служит червячная передача (черт. 97 b). Гайка g имеет два прилива h, в которых вращается бесконечный винт i, сцепляющийся с зубчатым колесом k, которое надето *наглухо* на ось c. Внизу винта i помещается обойма для рычага l с храповиком m и собачкой n надетой на ось p. Вращая рычаг, заставляем вращаться винт i, колесо k и ось c; вместе с осью c вращается и самый котел. Червячная передача находится только на одном винте, именно на том, на котором закреплено коническое колесо f.

В нижней половине котла A находится патрубок C длиною и диаметром 0,5-м; в плоском днище патрубка укреплена медная арматура, состоящая из двух колец (черт. 97 c), наружного mm и внутреннего pp; последнее ввинчивается в первое. Кольцо mm скреплено винтами qq с днищем. В кольцо mm вкладывается пластинка nn, имеющая в середине отверстие требуемого вида и размеров (круглое, прямоугольное, треугольное) или насадки (цилиндрическая, коническая). Пластинка nn плотно нажимается на кольцо mm ввинчиванием кольца pp. Для более плотного прилегания пластинки под ее края прокладывается тонкое резиновое кольцо.

Отверстие в пластинке *nn* (или насадка) закрывается извнутри патрубка *C* толстой, большого диаметра, резиновой пробкой *r*, насаженной на конце рычага *s*. Горизонтальная ось этого рычага помещена в особой чугунной коробке *t*, привинченной внизу патрубка. На этой оси снаружи коробки надето зубчатое колесо, сцепляющееся с зубчатой шестерней, которая приводится во вращение рукояткой, как показано на чертеже. Действуя рукояткой, можем преодолеть давление воды на пробку извнутри патрубка и открыть отверстие (или насадку); при этом рычаг *s* с пробкой улягутся в коробке *t* и не будут препятствовать свободному протоку воды из котла в патрубок и далее к отверстию. Котел наполняется водою из особых высоко расположенных железных баков, установленных на железных балках, заделанных в стены здания. В гидравлической лаборатории упомянутого института имеется 4 бака общею вместимостью около 1200 ведер. Из этих баков помощью железных труб диаметром 4 дюйма и помощью резинового рукава тоже в 4 дюйма (с проволочной прокладкой) вода подводится к трубе D'', а оттуда в конус D' и, наконец, в патрубок D диаметром 0,5 м. Такое постепенное увеличение диаметров сделано с тою целью, чтобы вода вступала в котел с возможно малою скоростью. Для наблюдения за горизонтом воды в котле сбоку его поставлена водомерная трубка с деревянной рейкой разделенной на м.м. Для точного измерения вертикальных расстояний применяются катетометры. При больших напорах вместо плоских днищ в котле лучше делать сферические днища, как в паровых котлах.

Приводим некоторыя сведения касающиеся определения четырех коэффициентов: скорости φ; сопротивления ζ; сжатия α и расхода μ.

Определение коэф. скорости φ при вытекании воды на воздух производится по наблюдениям над струей. Опишем способ употребляемый для этой цели в гидравлической лаборатории Московского института инженеров путей сообщения. Как уже упомянуто выше, в этой лаборатории для опытов имеется особый аппарат в виде подвижного железного котла *A* (черт. 97 *a*) диаметром 1 м. и высотою 2 м.; с одной стороны котла имеется горизонтальный патрубок *C* диаметром и длиною по 0,5 м. В вертикальном днище патрубка укрепляется бронзовая арматура (черт. 97 *c*), в которой зажимаются пластинки с отверстиями различной формы (круглые, прямоугольные, треугольные), а также насадки (цилиндрические и конические). Котел помощью двух винтов *bb* и гайки *g*, насаженной наглухо на ось *e*, может перемещаться по вертикальному направлению, а при помощи червячной передачи (черт. 97 *b*) может вращаться около горизонтальной оси *c*.

Оба винта *bb* упираются вверху и внизу в железные станины *BB*, укрепленные на фундаментной доске *a*.

Для производства опытов по определению *коэф. скорости* φ нужно котел A повернуть около горизонтальной оси c на некоторый угол Ψ. Струя по выходе из отверстия ab (черт. 97d) сжимается и в cd получается сжатое сечение. Далее на некотором протяжении струя увеличивается в поперечном сечении и имеет вид параболы. Действительно частицы жидкости движутся, начиная от сжатого сечения cd, независимо друг от друга, как материальные точки, находящиеся под действием силы тяжести и имеющие начальную скорость V_p; а известно из теоретической механики, что каждая из таких точек опишет параболу; напр., частица в центре тяжести сжатого сечения опишет параболу OCA с вершиною в C и с вертикальною осью. Уравнение этой параболы, отнесенное к осям XY, дается теоретическою механикою и имеет следующий вид:

$$y = x tg\,\Psi - \frac{gx^2}{2V_p^2 \operatorname{Cos}^2\Psi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

где Ψ — угол, составленный начальною скоростью V_p с горизонтом; он определяется каким-либо способом. Построим для этой параболы *годограф скоростей*. Если в произвольной точке O_1 (черт. 97e) отложить по величине и направлению отрезок $O_1a_1 = V_p$ и в точке a провести вертикальную прямую, то можем теперь определить графически скорость V_1 в любой точке b параболы. Для этого нужно в точке b провести касательную к параболе, а в O_1 провести линию ей параллельную; тогда $O_1b_1 = V_1$. Из чертежа видно, что скорость, начиная от сжатого сечения, уменьшается и в вершине параболы будет наименьшей, а затем будет все увеличиваться. В сжатом сечении скорость V_p наибольшая. Так как вследствие равенства расходов имеем:

$$\Omega \,.\, V_p = \omega_1 V_1 = \omega_2 V_2 \ldots = Q,$$

то изменение поперечного сечения струи будет обратным изменению скоростей; следоват., сжатое сечение будет наименьшим, а сечение в вершине параболы — наибольшим. Предположим для упрощения, что начальная скорость V_0 близка к нулю; тогда для V_p можно взять формулу (48) в § 24:

$$V_p = \varphi \sqrt{2gH_0},$$

где H_0 — вертикальное расстояние точки O до свободной поверхности т.-е. напор. При $y = 0$ получается $x_1 = OA$; следоват.:

$$x_1 tg\,\Psi = \frac{gx_1^2}{2V_p^2 \operatorname{Cos}^2\Psi}, \text{ откуда } V_p = \sqrt{\frac{gx_1}{\operatorname{Sin} 2\Psi}} \ldots\ldots (b).$$

Сравнивая оба выражения для V_p, находим искомую формулу (первую) для коэффициента скорости φ:

$$\varphi = \sqrt{\frac{x_1}{2H_0 \operatorname{Sin} \Psi}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (c).$$

В этом случае необходимо измерить *три* величины: хорду x_1, напор H_0 и угол Ψ. Так как не всегда удобно производить измерение хорды x_1, то найдем *второе* выражение для φ. Очевидно, вершине C соответствует $x = \frac{1}{2} x_1$; тогда стрелка y_1 равна:

$$y_1 = \frac{1}{2} x_1 \, tg\Psi - \frac{g x_1^2}{2 V_p^2 \operatorname{Cos}^2 \Psi}.$$

Но из предыдущего уравнения имеем:

$$\frac{g x_1^2}{8 V_p^2 \operatorname{Cos}^2 \Psi} = \frac{1}{4} x_1 tg\Psi, \text{ а потому } y_1 = \frac{1}{4} x_1 tg\Psi.$$

Подставляя этот результат в уравн. (b), находим искомое выражение:

$$\varphi = \sqrt{\frac{y_1}{H_0 \operatorname{Sin}^2 \Psi}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (d).$$

Здесь требуется измерить *три* величины: стрелку y_1, напор H_0 и угол Ψ. В виду того, что иногда неудобно измерять стрелку, найдем еще *третье* выражение для φ. Уравнение параболы относительно осей $X_1 Y_1$ следующее:

$$y^2 = 2px; \text{ для точки } A: \left(\frac{x_1}{2}\right) = 2py_1 = \frac{y^2}{x} y_1; \text{ но } y_1 = \frac{1}{4} x_1 tg\Psi,$$

а потому $x_1 = \frac{y^2}{x} tg\Psi$. Тогда выражение ($b$) дает:

$$\varphi = \frac{y}{2 \operatorname{Cos}\Psi} \sqrt{\frac{1}{H_0 x}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (e).$$

Здесь надо измерить 4 величины: H_0; Ψ; x; y, где x есть стрелка CE и y — полухорда EG. Наконец можно получить еще одно (четвертое) выражение для φ. Из чертежа видно, что

$CF = \xi = H_0 - y_1$; но из формулы (d): $y_1 = \varphi^2 H_0 \operatorname{Sin}^2 \Psi$; тогда выводим:

$$\varphi = \frac{1}{\operatorname{Sin}\Psi} \sqrt{1 - \frac{\xi}{H_0}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (f).$$

Следоват., надо измерить 3 величины: H_0; Ψ; ξ. Из выражения:

$$\xi = H_0 - y_1 = H_0 (1 - \varphi^2 \operatorname{Sin}^2 \Psi)$$

видно, что при $\Psi = \frac{\pi}{2}$, т.-е. когда скорость V_p направлена вертикально вверх, получается *minim.* ξ, а именно:

$$\xi = H_0 (1 - \varphi^2).$$

При среднем значении для $\varphi = 0,97$ имеем $\xi = 0,06\, H_0$. Для совершенной жидкости $\varphi = 1$ и тогда $\xi = 0$.

Если установить прибор так, чтобы продольная ось его была вертикальной, то плоскость сжатого сечения *cd* будет также вертикальной, а струя будет иметь вид параболы *OA*, уравнение которой получим из формулы (*a*), положив в ней $\Psi = 0$ и направив ось *Y* вертикально вниз:

$$y = \frac{gx^2}{2V_p^2}; \text{ откуда } V_p = \sqrt{\frac{gx^2}{2y}} = \varphi \sqrt{2gH_0}.$$

Следоват.,

$$\varphi = \frac{1}{2} x \sqrt{\frac{1}{H_0 y}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (g).$$

В этом случае надо измерить 3 величины: H_0 и координаты x и y какой-либо точки *M*. Из полученных формул для φ нужно применять ту, которая дает наименьшую ошибку и в которую входят величины наиболее удобно измеряемые в зависимости от устройства гидравлического аппарата, применяемого для этих опытов.

Коэф. скорости φ изменяется от 0,95 до 0,99; в среднем он равен 0,97.

Приводим в виде примера результаты *семи* опытов, произведенных автором этой книги в гидравлической лаборатории Московского Института инженеров п. с. под вытеканием струи из круглого отверстия $d = 20,05$ м.м. под напором $H_0 = 0,595$ м. при угле Ψ наклона гидравлического аппарата, при чем $\cos \Psi = 0,8688$. Вертикальный диаметр струи в вершине параболы $= 17,1$ м.м. Для определения коэф. φ применялась форм. (*e*), в которой абсцисса x (стрелка) $= 104,6$ м.м.; ордината y (полухорда) $= 423,6$ м.м. Для определения коэф. μ применялась форм. (*k*), см. ниже. Средние значения коэффициентов получены следующие:

$$\varphi = 0,977; \qquad \mu = 0,613; \qquad \alpha = \frac{\mu}{\varphi} = 0,628.$$

Коэф. сопротивления ζ определится по известному φ из формулы:

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1.$$

Он изменяется от 0,02 до 0,11; в среднем он равен 0,06. Величиною ζ определяется высота гидравлических сопротивлений на ед. веса вытекающей жидкости; именно находим:

$$(h'' - h_0'')_{M_0M} = \zeta \frac{V_p^2}{2g} = \zeta \cdot \varphi^2 H_0 = (1 - \varphi^2) H_0 = 0,06\, H_0 \ldots\ldots (h).$$

Следоват., на побеждение гидравлических сопротивлений затрачивается около 6% напора. Коэф. ζ имеет еще другое значение. На вес всего расхода равный ΔQ работа гидравлических сопротивлений T_r равна

$$T_r = \Delta Q \cdot \zeta \frac{V_p^2}{2g}.$$

С другой стороны, живая сила расхода Q равна:

$$\frac{1}{2} M V_p^2 = \frac{\Delta Q}{2g} V_p^2; \text{ поэтому: } \frac{T_r}{\frac{1}{2} M V_p^2} = \zeta \ldots\ldots\ldots\ldots (i).$$

Итак, коэф. ζ представляет отношение работы гидравлич. сопротивлений на вес расхода Q к живой силе расхода. Отсюда следует, что если какая-либо машина приводится в действие живой силой воды, вытекающей через отверстие в тонкой стенке, то 6% всей живой силы расходуется на работу гидравлических сопротивлений при вытекании воды через отверстие и только остальные 94% живой силы могут быть переданы гидравлической машине (водяному колесу).

Коэф. расхода μ определяется опытом проще, чем коэф. φ и α. Положим, что в течении опыта, продолжавшагося t секунд, вытек из сосуда при постоянном горизонте воды об'ем W куб. метров; поперечное сечение отверстия равно ω квадр. метр.; угол $\Psi = 90°$; напор над центром тяжести сжатого сечения или, что приблизительно то же самое, над центром тяжести отверстия равен H_0. Если скоростью V_0 на свободной поверхности можно пренебречь по ее малости, то имеем:

$$Q = \frac{W}{t} = \mu\omega\sqrt{2gH_0}; \text{ откуда: } \mu = \frac{Q}{\omega\sqrt{2gH_0}} \ldots\ldots\ldots\ldots (k).$$

Когда вытекание происходит через затопленное отверстие, то в этой формуле напор H_0 представляет разность горизонтов в обоих сосудах. Коэф. расхода изменяется в пределах от 0,59 до 0,66, в зависимости от размеров и вида отверстия, а также от напора; в среднем $\mu = 0{,}62$.

Коэф. сжатия струи α может быть определен двояким путем: по способу непосредственного измерения различных поперечных сечений струи или опытным определением коэффициентов φ и μ; в последнем случае из равенства $\alpha\varphi = \mu$ сейчас же находим:

$$\alpha = \frac{\mu}{\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (k).$$

Для непосредственного измерения сечений струи в гидравлической лаборатории Московского Института инженеров путей сообщения применяется особый прибор *контрактометр*, конструкция которого, принадлежащая *С. С. Аничкову*, мастеру гидравлической лаборатории Московского Института инженеров п. с., заключается в общих чертах

в следующем. Выше было дано описание аппарата для производства гидравлических опытов и было указано, что отверстие, через которое вытекает струя, помещается в дне патрубка C (черт. 97a). Это отверстие делается в круглой металлической пластинке, которая закрепляется в особой арматуре (черт. 97c); эта последняя наглухо прикреплена к дну патрубка. К дну патрубка прибор подвешивается на двух крючках a, ввинченных в дно. Самый прибор устроен следующим образом (черт. 98). К двум железным полосам b, навешиваемым на крючки a, прикреплено 4 винтами бронзовое кольцо c с 4 стержнями d, имеющими прямоугольную винтовую резьбу. По этим стержням, как по винту, ходит гайка e; действуя рукой на выступы гайки f, вращаем гайку. Поверх гайки надето свободно кольцо g (черт. 98a), которое при вращении гайки перемещается поступательно, скользя по стержням d, как по направляющим. На кольце g укреплены 4 обоймы i; две — по горизонтальному диаметру и две — по вертикальному. В этих обоймах движутся линейки k помощью кремальерок l; на линейках нанесены деления в м.м.; помощью нониусов можно отсчитывать 0,1 м.м. На внутренних концах линеек установлены длинные измерительные штифты m; свободные концы их изогнуты, заострены и образуют ножи, как это показано на чертеже.

Самое измерение производится следующим образом. Навесив прибор на крючки, перемещаем гайку e так, чтобы плоскость ножей отстояла в требуемом расстоянии от плоскости отверстия, через которое вытекает струя. Затем выдвигаем кремальерками обе горизонтальные линейки k с измерительными штифтами, чтобы ножи этих штифтов только соприкасались с поверхностью струи, и делаем по нониусам отсчеты. Таким образом находим величину горизонтального диаметра струи. Выдвигая затем вертикальные линейки и устанавливая штифты до соприкосновения их ножей со струей, находим величину вертикального диаметра струи. Если толщина струи по горизонтальному и вертикальному направлению равна d_1 и d_2, то, принимая сечение струи эллиптическим, получим площадь сечения равной $\frac{1}{4}\pi d_1 d_2$. Ставя гайку e в различных расстояниях от плоскости отверстия и определяя в каждом положении площадь сечения, найдем, что одно из этих сечений будет наименьшим; это и есть сжатое сечение. Для круглого отверстия как средние значения можно принять: разстояние сжатого сечения от плоскости отверстия $l = 0{,}5d$; $d_1 = d_2 = 0{,}8d$; тогда площадь сжатого сечения $\Omega = \frac{1}{4}\pi d_1 d_2 = \frac{1}{4}\pi(0{,}8d)^2$; площадь отверстия $\omega = \frac{1}{4}\pi d^2$; коэф. сжатия $\alpha = \frac{\Omega}{\omega} = (0{,}8)^2 = 0{,}64$.

В виде примера приводим результаты опытов, произведенных в гидравлической лаборатории Московского Института инженеров п. с. над сжатием струи при вытекании из *круглого* отверстия $d = 35{,}4$ м.м. под напором $H_0 = 1$ до 1,03 м. Измерения диаметров производились в 3 сечениях, отстоявших от плоскости отверстия на расстояниях $\lambda = 12$; 17,5; 22 м.м.

	Вертикальный диаметр d_1.			Горизонтальный диаметр d_2.		
	$\lambda = 12$.	$\lambda = 17{,}5$.	$\lambda = 22$.	$\lambda = 12$.	$\lambda = 17{,}5$.	$\lambda = 22$.
Первый опыт. . .	28,6	27,1	27,2	29,0	27,8	28,5
Второй „ . .	28,4	27,7	27,9	29,3	28,4	28,5
Третий „ . .	27,6	27,9	27,7	29,3	26,4	28,0

Отсюда видно, что сжатое сечение лежит в расстоянии $\lambda = 17{,}5$ м.м. Сжатое сечение по первому опыту равно $\frac{\pi}{4} \cdot 27{,}1 \cdot 27{,}8 = 591{,}7$ м.м.²; по второму $= \frac{\pi}{4} \cdot 27{,}7 \cdot 28{,}4 = 617{,}9$ м.м.² и по третьему $= \frac{\pi}{4} \cdot 27{,}9 \cdot 26{,}4 =$ $= 578{,}5$ м.м.². В среднем сжатое сечение $\Omega = 596$ м.м.². Тогда коэф. сжатия:

$$\alpha = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{596}{984{,}2} = 0{,}606.$$

Опыты по определению коэффициентов α и μ были произведены в большом масштабе французскими учеными *Понсле* и *Лебро*. Непосредственными измерениями поперечного сечения струи в разных местах они доказали, что струя деформируется весьма сильно. Так, напр., струя, выходя под напором $H_0 = 1{,}55$ м. из прямоугольного отверстия высотою 60 сант. и шириною 2 сант., имеет в расстояниях от плоскости отверстия равных 10; 30; 70 и 110 сант. соответственные нормальные сечения равные $61 \cdot 1{,}25$; $60{,}7 \cdot 1{,}3$; $46 \cdot 1{,}4$; $38{,}15 \cdot 1{,}6$ с.; при этом в верхней и нижней частях сечений струя имеет уширения, увеличивающиеся по мере удаления от отверстия (черт. 99). Площади этих сечений струи равны 120; 78,3; 76,52; 83,66 и 86,41 квадр. сант. Следовательно, коэффициент сжатия равен:

$$\alpha = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{76{,}52}{120} = 0{,}638.$$

Затем непосредственным опытом те же ученые нашли, что коэф. расхода μ для этого отверстия и при том же напоре равен 0,625. Из

черт. 99 (a; b; c; d; e) хорошо видно, как сильно деформируется струя по выходе из прямоугольного удлиненного по вертикали сечения. Только при круглых отверстиях струя мало деформируется; при всех же прочих формах отверстий она деформируется очень сильно. Причины этого явления недостаточно выяснены; одной из причин надо считать неравномерное распределение скоростей по сечению отверстия, а также действие капиларных сил.

Выводы из опытов, произведенных разными гидравликами. Для практики особенно важное значение имеет коэф. расхода μ; в то же время определение его не сопряжено с какими-либо затруднениями. По этому изменение μ в зависимости от различных обстоятельств, как-то: формы и размеров отверстий; величины напора; вытекания на воздух или в воду и т. п., изучено полнее, чем изменение коэф. α и φ от тех же обстоятельств. Произведенные опыты относятся к круглым и прямоугольным отверстиям. Американский гидравлик *Г. Смитз* свел результаты всех известных опытов в общие таблицы I и II. В таблице I приведены значения коэф. μ для *квадратных* отверстий, а в таблице II — для *круглых* отверстий; напоры H_0 изменялись в пределах 0,091 м. до 30,480 м., а размеры отверстий от 0,6 сант. до 30,5 сант. Из этих таблиц видно, что наибольший коэф. $\mu = 0{,}660$ для квадратных отверстий и $\mu = 0{,}655$ для круглых отверстий и соответствуют напору $H_0 = 0{,}183$ м.м.; размер отверстия равен 0,6 сантим. Наименьший коэф. $\mu = 0{,}598$ для круглых отверстий и $\mu = 0{,}592$ для квадратных; эти значения соответствуют напору $H_0 = 30{,}48$ м. и для отверстий как малых, так и больших.

Если по оси X откладывать напоры H_0, а по оси Y соответственные значения μ для какого-либо отверстия, взятые из таблицы Смитза, и полученные точки соединить, то получится *кривая коэффициентов расхода* μ для этого отверстия. Из рассмотрения этих кривых можно вывести следующия заключения.

a) Для круглых и квадратных отверстий получаются кривые *трех* типов (черт. 100). В типе (I) коэф. μ с увеличением H_0 убывает, подходя ассимптотически к горизонтальной линии AB; в типе (II) коэф. μ постоянен при $H_0 < OC$ и затем убывает с увеличением H_0, подходя к AB; в типе (III) коеф. μ при $H_0 < OD$ увеличивается, а затем уменьшается, подходя к той же линии AB. Первый тип получается для отверстий при стороне a квадрата или при диаметре d не большем 6 сантим. Второй тип имеет место при $a = d = 6$ сантим. Третий тип соответствует отверстиям, для которых a или d больше 6 сантим.

Таблица I Г. Смитза

коэффициентов расхода μ для квадратных отверстий в тонкой вертикальной стенке при вытекании на воздух.

Напор H_0 над центром отверстия.		Сторона квадрата в сантиметрах и футах.												
		0,6	0,9	1,2	1,5	2,1	3,0	3,7	4,6	6,1	12,2	18,3	24,4	30,5 см.
Фут.	Метр.	0,02	0,03	0,04	0,05	0,07	0,10	0,12	0,15	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00 ф.
0,3	0,091	—	—	—	0,642	0,632	0,624	0,617	0,612	—	—	—	—	—
0,4	0,122	—	—	0,643	637	628	621	616	611	—	—	—	—	—
0,5	0,152	—	0,648	639	633	625	619	614	610	0,605	0,601	0,597	—	—
0,6	0,183	0,660	645	636	630	623	617	613	610	605	601	598	0,596	—
0,7	0,213	656	642	633	628	621	616	612	609	605	602	599	598	0,596
0,8	0,244	652	639	631	625	620	615	611	608	605	602	600	598	597
0,9	0,274	650	637	629	623	619	614	610	608	605	603	601	599	598
1,0	0,305	648	636	628	622	618	613	610	608	605	603	601	600	599
1,2	0,366	644	633	625	620	616	611	609	607	605	604	602	601	600
1,4	0,427	642	630	623	618	614	610	608	606	605	604	602	601	601
1,6	0,488	640	628	621	617	613	609	607	606	605	605	603	602	601
1,8	0,549	638	627	620	616	612	609	607	606	605	605	603	602	602
2,0	0,610	637	626	619	615	612	608	606	606	605	605	604	602	602
2,5	0,762	634	624	617	613	610	607	606	606	605	605	604	603	602
3,0	0,914	632	622	616	612	609	607	606	606	605	605	604	603	603
3,5	1,067	630	621	615	611	609	607	606	605	605	605	604	603	602
4	1,219	628	619	614	610	608	606	606	605	605	605	603	603	602
5	1,524	626	617	613	610	607	606	605	605	604	604	603	602	602
6	1,829	623	616	612	609	607	605	605	605	604	604	603	602	602
7	2,134	621	615	611	608	607	605	605	604	604	604	603	602	602
8	2,438	619	613	610	608	606	605	604	604	604	603	603	602	602
9	2,743	618	612	609	607	606	604	604	604	603	603	602	602	601
10	3,048	616	611	608	606	605	604	604	603	603	603	602	602	601
20	6,096	606	605	604	603	602	602	602	602	602	601	601	601	600
50	15,240	602	601	601	601	601	600	600	600	600	600	599	599	599
100	30,479	599	598	598	598	598	598	598	598	598	598	598	598	598

Таблица II Г. Смитза

коэффициентов расхода μ для круглых отверстий в тонкой вертикальной стенке при вытекании на воздух.

Напор H_0 над центром отверстия.		Диаметр отверстия в сантиметрах и футах.												
		0,6	0,9	1,2	1,5	2,1	3,0	3,7	4,6	6,1	12,2	18,3	24,4	30,5 см.
Фут.	Метр.	0,02	0,03	0,04	0,05	0,07	0,10	0,12	0,15	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00 ф.
0,3	0,091	—	—	—	0,637	0,628	0,621	0,613	0,608	—	—	—	—	—
0,4	0,122	—	—	0,637	631	624	618	612	606	—	—	—	—	—
0,5	0,152	—	0,643	633	627	621	615	610	605	0,600	0,596	0,592	—	—
0,6	0,183	0,655	640	630	624	618	613	609	605	601	596	593	0,590	—
0,7	0,213	651	637	628	622	616	611	607	604	601	597	594	591	0,590
0,8	0,244	648	634	626	620	615	610	606	603	601	597	594	592	591
0,9	0,274	646	632	624	618	613	609	605	603	601	598	595	593	591
1,0	0,305	644	631	623	617	612	608	605	603	600	598	595	593	591
1,2	0,366	641	628	620	615	610	606	604	602	600	598	596	594	592
1,4	0,427	638	625	618	613	609	605	603	601	600	599	596	594	593
1,6	0,488	636	624	617	612	608	605	602	601	600	599	597	595	594
1,8	0,549	634	622	615	611	607	604	602	601	599	599	597	595	595
2,0	0,610	632	621	614	610	607	604	601	600	599	599	597	596	595
2,5	0,762	629	619	612	608	605	603	601	600	599	599	598	597	596
3,0	0,914	627	617	611	606	604	603	601	600	599	599	598	597	597
3,5	1,067	625	616	610	606	604	602	601	600	599	599	598	597	596
4	1,219	623	614	609	605	603	602	600	599	599	598	597	597	596
5	1,524	621	613	608	605	603	601	599	599	598	598	597	596	596
6	1,829	618	611	607	604	602	600	599	599	598	598	597	596	596
7	2,134	616	609	606	603	601	600	599	599	598	598	597	596	596
8	2,438	614	608	605	603	601	600	599	598	598	597	596	596	596
9	2,743	613	607	604	602	600	599	599	598	597	597	596	596	595
10	3,048	611	606	603	601	599	598	598	597	597	597	596	596	595
20	6,096	601	600	599	598	597	596	596	596	596	596	596	595	594
50	15,240	596	596	595	595	594	594	594	594	594	594	594	593	593
100	30,479	593	593	592	592	592	592	592	592	592	592	592	592	592

Очевидно что при значительных напорах коэф. μ одинаков и равен OA для отверстий одного вида независимо от размеров.

Для квадратных отверстий $OA = 0{,}598$, а для круглых $OA = 0{,}592$. Абсцисса OD, соответствующая горизонтальной касательной к кривой (III) типа, равна приблизительно 1,2 метра. Абсцисса $OC = 0{,}5$ м. для круглых отверстий и $OC = 1{,}2$ м. для квадратных.

b) *Наибольшее* μ соответствует наименьшему напору и наименьшему отверстию (тип I) и равно 0,66. *Наименьшее* μ получается также при наименьшем напоре, но при наибольшем отверстии (тип III) и равно 0,596 для квадратных отверстий и 0,590—для круглых.

Помещаем здесь еще следующие выводы из опытов.

c) Если рассматривать прямоугольные отверстия с одной и той же высотой, то при одном и том же H_0 коэф. μ тем больше, чем шире отверстие. Если же рассматривать такие же отверстия с одной и той же шириной, то чем высота отверстия больше, тем меньше μ. Следоват., наибольшее μ получается для узкой горизонтальной щели и наименьшее μ для узкой вертикальной щели.

d) Коэф. μ для *затопленных* отверстий по одним авторам меньше, а по другим—больше, чем для вытекания на воздух. По опытам, произведенным в гидравлической лаборатории Московского Института инженеров путей сообщения автором этой книги, получается, что *оба* коэффициенты *равны* между собою, как это видно из следующей таблицы (III).

Таблица III

Коэф. расхода μ при вытекании на *воздух* и коэф. расхода μ' при вытекании через *затопленное* отверстие по опытам, произведенными в 19^{06}_{16} г. г. профес. *Ф. Е. Максименко* в гидравлической лаборатории Московского Института инженеров путей сообщения.

(Меры в м. м.).

Отверстие / коэф. расхода	кругл. отв. $d = 20$	кругл. отв. $d = 35{,}4$	кругл. отв. $d = 40{,}1$	кругл. отв. $d = 45$	кругл. отв. $d = 50{,}1$	квадр. отв. 20.20.	треугол. отв. 50.50 25	конич. расход. насадка 25.50.126.
коэф. μ на воздух. .	0,602	0,587	0,591	0,602	0,597	0,611	0,629	0,204
коэф. μ' в воду. . .	0,603	0,585	0,592	0,600	0,598	0,609	0,602	0,204

В виду этого в дальнейшем будем считать оба коэффициента равными между собою; поэтому закон изменения коэф. μ, указанный в предыдущих пунктах для вытекания на воздух, будем принимать справедливым также для затопленных отверстий.

Эмпирические формулы для коэф. расхода μ. Таких формул для значений μ для круглых отверстий известно в технической литературе *три*, а именно: Грасгофа, Унвинна и Труппа.

Формула *Грасгофа* имеет вид:

$$\mu = 0{,}60 + \frac{0{,}06}{0{,}5 + 0{,}552\sqrt{H_0}} - 0{,}213\, d \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (l)$$

Формула *Унвинна* имеет вид:

$$\mu = 0{,}6075 + \frac{0{,}0098}{\sqrt{H_0}} - 0{,}0444\, d \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (m)$$

Формула *Труппа* имеет вид:

$$= 0{,}591\, \frac{H_0^{\frac{2-n}{2n}}}{d^q} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (n)$$

где: $n = 1{,}97 - 0{,}08\, lg\, d$ и $q = 0{,}02$. Во всех трех формулах меры выражены в *футах*. Формула Труппа, основанная на 216 опытах с 37 круглыми отверстиями, всего лучше согласуется с опытными данными, именно при $d < 0{,}42$ фут. (12,8 см.) изменение μ с напором H_0 происходит по кривой типа (I); при $d = 0{,}42$ фут. по кривой типа (II); и при $d > 0{,}42$ фут.—по кривой типа (III). Расход Q через круглое отверстие диаметра d при напоре H_0 выражается по формуле Труппа следующей формулой (для мер в футах):

$$Q = 3{,}715\, d^m \sqrt[n]{H_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (p$$

где $m = 1{,}97$, а n — имеет вышеприведенное значение.

§ 26. Вытекание жидкости из отверстий при неполном и при несовершенном сжатии струи, а также через щитовые отверстия.

Если при прямоугольном отверстии поместить пластинку *ae* (черт. 101) выступающую во внутрь сосуда, то сжатие струи происходит сверху и с двух боков; снизу же сжатия нет. Струя, по выходе из отверстия, уменьшается в поперечном сечении и в *cd* получается сжатое сечение Ω_1. В этом случае сжатое сечение получаетси больше, чем в случае, когда пластинки нет. Это явление называется *неполным* сжатием струи и было изучено впервые *Бидоном*. Скорость V_p в каждой точке сечения

cd остается той же, как и в случае полного сжатия струи, так как она зависит только от напора H_0 и начальной скорости V_0; следоват.,

$$V_p = \varphi V_t \quad \text{и} \quad Q_1 = \Omega_1 V = \varphi \Omega_1 V_t.$$

где для V_t надо взять одно из выражений, приведенных в § 24. Но $\Omega_1 = \alpha_1 \omega$; где α_1—коэф. сжатия струи при неполном сжатии; поэтому

$$Q_1 = \varphi \alpha_1 \omega V_t = \mu_1 \omega V_t$$

здесь—$\mu_1 = \varphi \alpha_1$ есть коэф. расхода при неполном сжатии. Так как коэф. α_1 больше коэф. α при полном сжатии, то $\mu_1 > \mu$ и потому $Q_1 > Q$, где Q и μ соответствуют полному сжатию.

Подобные пластинки можно поместить не только внизу, но или сбоку, или с 2 боков, или сверху и сбоку. Зависимость между μ_1 и μ по опытам *Бидона* и *Вейсбаха* выражается следующей формулой:

$$\frac{\mu_1}{\mu} = 1 + c\frac{n}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (64)$$

где p — периметр отверстия; n — периметр той части отверстия, на которой имеется пластинка, т.-е. нет сжатия, и c — коэффициент, равный от 0,13 до 0,15 для прямоугольных отверстий; с увеличением напора он уменьшается. *Грасгоф* различает влияние боковых (вертикальных) пластинок от влияния нижней (горизонтальной) пластинки и дает такую формулу:

$$\frac{\mu_1}{\mu} = 1 + c\frac{s}{p} + c_1\frac{a}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

Здесь s — длина одной или двух вертикальных сторон отверстия, смотря потому, будет ли уничтожено сжатие с одной или с двух сторон; a — ширина сечения; p — периметр отверстия; $c = 0{,}12$; $c_1 = 0{,}16$. Следов., член $c\left(\frac{s}{p}\right)$ представляет увеличение коэф. расхода от вертикальных пластинок, а член $c_1\left(\frac{a}{p}\right)$ — от горизонтальной пластинки. Так как $c_1 > c$, то уничтожение сжатия снизу влияет на увеличение μ_1 больше, чем уничтожение сжатия с боков, что и понятно, так как уничтожением сжатия снизу увеличивается нижняя часть поперечного сечения струи, для которой V_p в каждой точке больше, чем для остальной части сечения.

Несовершенное сжатие было изучено впервые *Вейсбахом*, который заметил, что пластинки, поставленные не только у самого края отверстия, но и в некотором расстоянии от края, увеличивают сжатое сечение $cd = \Omega_2 = \alpha_2 \omega$, а, следов., и расход. Всего яснее несовершенное сжатие проявляется в том случае, когда отверстие ab (черт. 102) по-

мещено не в стенке сосуда, а в дне патрубка A с поперечным сечением O. Так как V_p имеет здесь ту же величину, как и при совершенном сжатии, то расход при несовершенном сжатии равен:

$$Q_2 = \Omega_2 V_p = \alpha_2 \omega . \varphi V_t = \mu_2 \omega V_t$$

где α_2 — коэфф. сжатия при несовершенном сжатии и $\mu_2 = \alpha_2 \varphi$ — коэфф. расхода при несовершенном сжатии. Так как $\alpha_2 > \alpha$, то $\mu_2 > \mu$, где α и μ — коэффициенты, соответствующие полному сжатию. Зависимость между этими двумя коэффициентами *Вейсбах* выразил так:

$$\frac{\mu_2}{\mu} = 1 + a(b^n - 1) = \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

здесь $n = \left(\frac{\omega}{O}\right)$; a и b постоянные коэффициенты равные:

для круглых отверстий: $a = 0{,}04564$; $b = 14{,}821$;

„ прямоугольных отверстий $a = 0{,}076$; $b) = 9{,}0$.

Оказывается, что μ_2 увеличивается на 1%, т.-е. $\lambda = 1{,}01$, уже тогда, когда диаметр патрубка A равен $d_1 = 3{,}72\ d$, где d диаметр отверстия. Если же отверстие прямоугольное $a_1 \times w_1$, то увеличение μ_2 значительно больше. Напр., если $d_1 = 2d$, то $\mu_2 = 1{,}045\ \mu$; при $d_1 = 1{,}5\ d$ получается $\mu_2 = 1{,}11\ \mu$. Несовершенное сжатие получается также тогда, когда отверстие ω помещено в поперечной стенке прямоугольного канала. В этом случае коэфф. μ_2 выражается следующей формулой *Вейсбаха*:

$$\frac{\mu_2}{\mu} = 1 + a\left(\frac{\omega}{O}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

где попрежнему μ — коэф. расхода при полном сжатии; O — поперечное сечение канала и $a = 0{,}641$; при этом отношение $\left(\frac{\omega}{O}\right)$ не должно значительно превышать 0,5. При $\left(\frac{\omega}{O}\right) = 0{,}5$, получается $\frac{\mu_2}{\mu} = 1{,}16$, т.-е расход на 16% больше, чем при полном сжатии.

Влияние несовершенного сжатия надо принимать во внимание в особенности при производстве гидравлических опытов.

Вытекание воды через щитовые отверстия. Щитовым отверстием называется отверстие в поперечной стенке канала, закрываемое щитом; такие отверстия — обыкновенно прямоугольные — устраиваются в водопроводных и оросительных каналах, в водоспусках плотин и т. п. Щитовые отверстия могут быть незатопленные и затопленные (черт. 102а.) Скорость $V_p = \varphi V_t$ во всех этих случаях принимается одинаковой во

всех точках сжатого сечения и определяется по форм. (50 и 60) в § 24. Тогда расход через щитовое отверстие равен:

$$Q_3 = \mu_3 \omega V_1 = \mu_3 \omega \sqrt{2g\left(H_0 + \frac{V_0^2}{2g}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (68)$$

Здесь H_0 — представляет: для незатопленных отверстий — напор над центром отверстия, а для затопленных — разность горизонтов в канале выше и ниже щита (считая вверх по течению и вниз по течению); V_0 — скорость подхода воды т.-е. средняя скорость в живом сечении канала выше щитового отверстия (считая вверх по течению); ω — площадь отверстия; μ_3 — коэфф. расхода для щитовых отверстий. Для определения μ_3 были произведены опыты *Лебро; Буало; Вейсбахом; Борнеманом* и др. Из этих опытов видно, что μ_3 зависит от напора; высоты w отверстия; от обделки отверстия; от расположения отверстия в стенке и т. п. В виду этого можно дать для μ_3 только приблизительное значение, именно $\mu_3 = 0{,}60$, если прямоугольное отверстие лежит своим нижним ребром значительно выше дна канала, и $\mu_3 = 0{,}65$, если это ребро лежит наравне с дном канала или очень близко к нему. Если можно непосредственным измерением найти скорость V_0, то расход Q определим сейчас же из форм. (68). В противном случае можно $\left(\frac{V_0^2}{2g}\right)$ исключить из этого выражения помощью равенства $Q = \Omega_0 V_0$, где Ω_0 — живое сечение канала выше щитового отверстия; тогда:

$$\frac{V_0^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q_3}{\Omega_0}\right)^2$$

Подставляя это значение под радикал в формуле (68) и возвышая обе части равенства в квадрат, находим:

$$Q_3 = \mu_3 \omega \sqrt{\frac{2g H_0}{1 - \left(\frac{\mu_3 \omega}{\Omega_0}\right)^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (69)$$

Если $\left(\frac{V_0^2}{2g}\right)$ мало сравнительно с H_0 или, что то же самое, если $\left(\frac{\mu_3 \omega}{\Omega_0}\right)^2$ мало сравнительно с 1, то, пренебрегая этими величинами, находим:

$$Q_3 = \mu_3 \omega \sqrt{2g H_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (70)$$

Глава II. Вытекание жидкости через насадки.

§ 27. Вытекание через цилиндрическую насадку на воздух. Затопленные цилиндрические насадки. Насадками называются короткие трубки форм: цилиндрической, конической и призматической. Вытекание через насадки отличается по существу от вышерассмотренного вытекания через отверстия в тонкой стенке, а потому иногда называется вытеканием через отверстия в *толстой стенке*.

Рассмотрим случай цилиндрической насадки, когда стенка наклонена к горизонту под углом ϕ (черт. 103). Струя, войдя в отверстие mn, сжимается и в ab получается сжатое сечение. Далее струя быстро расширяется и заполняет все поперечное сечение насадки cd. Струя около сжатого сечения окружена кольцеобразной полостью, которая наполнена водою частью покоющейся, частью движущейся очень медленно. Очевидно здесь условия в точности соответствуют случаю рассмотренному в § 23, когда между сечениями ab и cd проявляются гидравлические сопротивления, определяемые по теореме Борда. Длина насадки должна быть не менее (3,5 — 4) D, где D — диаметр насадки.

Определение скорости. Рассмотрим сперва линию тока $M_0 M_1$, а затем линию $M_0 M_1 M$; пусть z_0 p_0 U_0; z_1 p_1 U_1; z p U_p—обозначают ординату, ед. давление и скорость в точках M_0; M_1 и M. Докажем, что в сечении ab скорость V_1 одинакова во всех точках, и что в выходном сечении rs скорость V_p изменяется по пораболическому закону, как и в случае тонкой стенки. Гидравл. сопротивления для линии $M_0 M_1$ выразим также, как и для тонкой стенки, через $\zeta \frac{V_1^2}{2g}$; тогда получаем:

$$\frac{V_1^2 - V_0^2}{2g} + \zeta \frac{V_1^2}{2g} = \left(z_0 + \frac{p_0}{\Delta}\right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\Delta}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (a)$$

В сечении ab скорости параллельны между собою, а потому ед. давления в ab распределяются по гидростатическому закону. В покоющейся жидкости, находящейся в кольцеобразной полости, ед. давления изменяются по тому же закону. Поэтому, если взять какую-либо точку N в покоющейся жидкости и обозначить через p_2 и z_2 ед. давление и ординату для N, то

$$z_1 + \frac{p_1}{\Delta} = z_2 + \frac{p_2}{\Delta}$$

Тогда из предыдущего выражения можно определить V_1 и получается:

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \sqrt{2g\left(z_0 - z_2 + \frac{V_0^2}{2g}\right)}$$

Отсюда видно, что V_1 не зависит от z_1 и есть постоянная величина для всех точек сжатого сечения ab. Тогда расход для этого сечения равен:

$$Q = \Omega V_1 = \alpha_1 \omega V_1$$

где Ω — сжатое сечение; ω — поперечное сечение насадки и α_1—коэфф. *внутреннюю* сжатия струи, по величине равный коэф. α при вытекании через отверстие в тонкой стенке.

Теперь рассмотрим линию тока $M_0 M$; для нее имеем:

$$\frac{V_p - V_0^2}{2g} + (h'' - h_0'')_{M_0 M} = \left(z_0 + \frac{p_0}{\Delta}\right) - \left(z + \frac{p}{\Delta}\right) = H \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b)$$

Ед. давления p во всех точках выходного сечения равны p_0, так как в нем и затем далее в струе существует независимое движение частиц. Затем $(z_0 - z) = MS = H$ = напору. Гидравлические сопротивления состоят из следующих *трех* частей:

1) Сопротивление по линии $M_0 M_1$ равное

$$\zeta \frac{V_1^2}{2g}.$$

2) Сопротивление между сечениями ab и cd определяемое по формуле Борда; скорости в сечении cd можно приблизительно считать теми же, что и в rs; поэтому это сопротивление равно

$$\frac{(V_1 - V_p)^2}{2g}.$$

3) Сопротивление между cd и rs есть сопротивление при движении жидкости в трубе; оно может быть представлено под таким видом:

$$\lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V_p^2}{2g}$$

де L — расстояние между cd и rs; D — диаметр насадки, и λ — опытный коэффициент, равный в среднем $\lambda = 0{,}024$ (для велких мер). Следоват.

$$(h'' - h_0'')_{M_0 M} = \zeta \frac{V_1^2}{2g} + \frac{(V_1 - V_p)^2}{2g} + \lambda \frac{L}{D} \cdot \frac{V_p^2}{2g}.$$

При вычислении этих сопротивлений сделаем предположение, что скорости во всех точках сечений cd и rs равны V_p; тогда $Q=\omega V_p$; но выше было найдено, что $Q=\alpha_1 \omega V_1$; следоват. $V_1=\frac{1}{\alpha} V_p$; тогда предыдущее выражение примет вид:

$$(h''-h_0'')_{M_0 M}=\left\{\frac{\zeta}{\alpha_1^2}+\left(\frac{1}{\alpha_1}-1\right)^2+\lambda\frac{L}{D}\right\}\frac{V_p^2}{2g}=\zeta_1\frac{V_p^2}{2g}$$

где ζ_1 называется *коэффициентом сопротивления для насадки.* Внося это выражение в уравн. (b), определим из него V_p:

$$V_p=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\zeta}{\alpha_1^2}+\left(\frac{1}{\alpha_1}-1\right)^2+\lambda\frac{L}{D}}}\sqrt{2g\left(H+\frac{V_0^2}{2g}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta_1}}\sqrt{2g\left(H+\frac{V_0^2}{2g}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (72)$$

Если жидкость совершенная, то гидравлических сопротивлений нет и

$$(h''-h_0'')_{M_0 M}=0;\ \text{следов.,}\ \zeta_1=0;\ \text{тогда}\ V_t=\sqrt{2g\left(H+\frac{V_0^2}{2g}\right)}$$

Так как вообще: $V_p=\varphi V_t$, то, очевидно, в этом случае

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta_1}}\quad \text{и}\quad V_p=\varphi\sqrt{2g\left(H+\frac{V_0^2}{2g}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (73)$$

Струя по выходе из сечения rs не сжимается, а потому коэфф. сжатия (наружного) струи равен 1; следов., коэфф. расхода $\mu=\varphi$. Итак,

$$\mu=\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta_1}}\qquad \text{и}\qquad \zeta_1=\frac{1}{\mu^2}-1 \quad \ldots\ldots \quad (74)$$

Как средние значения можно принять; $\mu=\varphi=0{,}82$ и $\zeta_1=0{,}5$.

Гидравлические сопротивления для цилиндрической насадки можно очевидно представить так (уравн. 71):

$$(h''-h_0'')_{M_0 M}=\zeta_1\frac{V_p^2}{2g}=\left(\frac{1}{\mu^2}-1\right)\frac{V_p^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (75)$$

Уравн. (73) показывает, что зависимость между V_p и H параболическая. Если от свободной поверхности M_0S отложить вверх $\frac{V_0^2}{2g}$ и провести горизонтальную линию OT, а линию rs продолжить до пересечения с OT, то искомая парабола есть OR; она имеет вершину O и ось OX. Действительно

$$MS'=H+\frac{V_0^2}{2g}=OM.\operatorname{Sin}\Psi.$$

Подставляя это значение в уравн. (73) и возвышая в квадрат., получаем:

$$V_p^2 = \varphi^2 \cdot 2g . \operatorname{Sin} \Psi . OM.$$

или, полагая $V_p = y$ и $OM = x$, находим; $y^2 = 2px$. Теперь мы видим, что

$$y = V_p = MR \quad \text{и} \quad 2p = \varphi^2 . \ 2g . \operatorname{Sin} \Psi.$$

Этот результат тожествен с полученным для отверстий. Очевидно, что наименьшая скорость соответствует точке s, а наибольшая—точке r.

Упрощенное выражение для скорости. Если обозначить через r_1 расстояние M до центра отверстия C и расстояние CF обозначить через H_0, тогда имеем:

$$H = H_0 + r_1 \operatorname{Sin} \Psi$$

где r_1 положительно для точек между C и r и отрицательно для точек между C и s. Затем обозначим

$$H_0 + \frac{V_0^2}{2g} = h_0 ;$$

тогда, разлагая радикал в выражении (73) по биному Ньютона, имеем:

$$V_p = \varphi \sqrt{2 g h_0} \left\{ 1 + \frac{\operatorname{Sin} \Psi}{h_0} r_1 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$\varphi \sqrt{2 g h_0} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{Sin} \Psi}{h_0} r_1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\operatorname{Sin} \Psi}{h_0} \right)^2 r_1^2 + \cdots \right\} \ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

Наибольшее значение r_1 равно $r_0 = \frac{1}{2} D$; если величина

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{Sin} \Psi}{h_0} \right) \frac{D}{2}$$

очень мала сравнительно с 1, то можно принять скорость одинаковой во всех точках отверстия rs и равной

$$V_p = \varphi \sqrt{2 g h_0} = \varphi \sqrt{2 g \left(H_0 + \frac{V_0^2}{2g} \right)} \ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

что соответствует точке, для которой $r_1 = 0$, т.-е. скорости в центре отверстия.

Из выражения (77) можно исключить $\frac{V_0^2}{2g}$. Если Ω_0 — свободная поверхность сосуда, и V_0 — скорость во всех точках этой поверхности, то равенство расходов дает: $Q = \Omega_0 V_0 = \omega V_p$; следоват.,

$$\frac{V_0^2}{2g} = \left(\frac{\omega}{\Omega_0} \right)^2 \frac{V_p^2}{2g}$$

Подставляя это выражение в уравн. (77), получаем окончательно:

$$V_p = \varphi \sqrt{\frac{2g\ H_0}{1-\left(\frac{\varphi\ \omega}{\Omega_0}\right)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

Если высота $\left(\frac{V_0^2}{2g}\right)$ мала сравнительно с H_0 или что то же самое, величина $\left(\frac{\varphi\ \omega}{\Omega_0}\right)^2$ мала сравнительно с 1, то из уравн. (77) и (78) получаем наиболее простое и чаще других употребляемое выражение:

$$V_p = \varphi\ \sqrt{2g\ H_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

По виду выражения (77; 78; 79) тожественны с полученными для случая вытекания через отверстия; различие существует только в численном значении коэфф. φ.

Определение расхода. Сечение rs разобьем горизонтальными линиями на элементарные площадки; тогда площадке $d\omega$ около точки M соответствует элементарный расход $dQ = V_p . d\omega$; следоват., весь расход

$$Q = \int_\omega V_p\, d\omega$$

Вместо V_p подставим сюда выражение (76); произведя интегрирование, получаем:

$$Q = \varphi\ \sqrt{2g\ h_0}\left\{\omega + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{Sin}\Psi}{h_0}\int_\omega \eta_1\, d\omega - \frac{1}{8}\left(\frac{\operatorname{Sin}\Psi}{h_0}\right)^2\int_\omega \eta_1^2\, d\omega + \cdots\cdots\right\}$$

здесь находим так же, как при вытекании через отверстие (§ 24):

$$\int_\omega \eta_1\, d\omega = 0;\quad \int_\omega \eta_1^2\, d\omega = I = \frac{\pi D^4}{64};\quad \int_\omega \eta_1^3\, d\omega = 0;\quad \int_\omega \eta_1^4\, d\omega = \frac{1}{512}\pi D^6 \text{ и т. д.}$$

Тогда получается:

$$Q = \varphi\omega\ \sqrt{2g\ h_0}\left\{1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\operatorname{Sin}\Psi}{h_0}\right)^2\frac{I}{\omega} - \frac{5}{128}\left(\frac{\operatorname{Sin}\Psi}{h_0}\right)^4\frac{1}{\omega}\int_\omega \eta_1^4\, d\omega + \cdots\cdots\right\}$$

$$Q = \varphi\omega\ \sqrt{2g\ h_0}\left\{1 - \frac{1}{128}\left(\frac{\operatorname{Sin}\Psi}{h_0}\right)^2 D^2 - \frac{5}{16384}\left(\frac{\operatorname{Sin}\Psi}{h_0}\right)^4 D^4 + \cdots\cdots\right\}$$

Если в этом разложении второй член в скобках очень мал сравнительно с 1, то для Q можно принять такое упрощенное выражение:

$$Q = \varphi\omega\ \sqrt{2g\ h_0} = \varphi\omega\sqrt{2g\left(H_0 + \frac{V_0^2}{2g}\right)} = \varphi\omega\sqrt{\frac{2g\ H_0}{1-\left(\frac{\varphi\omega}{\Omega_0}\right)^2}} \quad (80)$$

Эти выражения можно получить непосредственно, если воспользоваться для V_p выражениями (77) или (78), когда скорости принимаются одинаковыми во всех точках выходного отверстия.

Определение давления в сжатом сечении насадки. Определим ед. давление p_1 в сжатом сечении ab, для чего рассмотрим линию тока M_1M, полагая, что эта линия совпадает с продольною осью насадки; тогда имеем:

$$\frac{V_p^2 - V_1^2}{2g} + (h'' - h_0'')_{M_1 M} = \left(z_1 + \frac{p_1}{\Delta}\right) - \left(z + \frac{p_0}{\Delta}\right) = \frac{p_1 - p_0}{\Delta} + \xi$$

Здесь $(z_1 - z) = M_1K = \xi$, при чем ξ положительно, когда насадка обращена выходным отверстием вниз, как на чертеже, и ξ отрицательно, когда тоже отверстие обращено кверху. Высота гидравлич. сопротивлений на линии M_1M согласно вышеизложенному равна

$$(h'' - h_0'')_{M_1 M} = \frac{(V_1 - V_p)^2}{2g} + \lambda \frac{L}{D} \frac{V_p^2}{2g} = \left\{ \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \lambda \frac{L}{D} \right\} \frac{V_p^2}{2g}$$

Затем для V_p берем упрощенное выражение (77); тогда предыдущее уравнение дает окончательно:

$$\frac{p_1 - p_0}{\Delta} = 2\mu^2 h_0 \left\{ 1 - \frac{1}{\alpha_1} + \lambda \frac{L}{2D} \right\} - \xi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (81)$$

Если ось насадки горизонтальна, то $\xi = 0$. Коэфф. внутренняго сжатия $\alpha_1 < 1$ и $\left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right) < 0$, а потому при короткой насадке, т.-е. при небольшом $\left(\frac{L}{D}\right)$, вторая часть выражения (81) отрицательна и $p_1 < p_0$; следоват., ед. давление в сечении ab и в окружающей полости *меньше* атмосферного. Вследствие этого цилиндрические насадки обладают свойством *всасывания*. Всасывание тем сильнее, т.-е. p_1 тем меньше, чем больше напор h_0. Если принять в среднем коэфф. внутренняго сжатия $\alpha_1 = 0{,}64$; коэфф. расхода насадки $\mu = 0{,}82$ и считать, что $\left(\frac{L}{D}\right)$ не очень велико, (напр., не более 5), то для насадок с горизонтальною осью получается из равен. (81):

$$\frac{p_1 - p_0}{\Delta} = -0{,}75\, h_0.$$

т.-е. давление p_1 меньше атмосферного на высоту $^3/_4\ h_0$, что и подтверждается опытом. С увеличением длины L насадки давление p_1 увеличивается, а степень всасывания уменьшается. Если принять $\lambda = 0{,}024$, то при $\xi = 0$ получается, что при $\left(\frac{L}{D}\right) = 50$ давление p_1 равно атмосферному p_0 и всасывание прекращается. При $\left(\frac{L}{D}\right) > 50$ давление $p_1 > p_0$. Когда ось насадки не горизонтальна, то насадке с опущенным вниз

отверстием соответствует большее всасывание, а с поднятым кверху — меньшее всасывание, чем при горизонтальной оси, как это прямо видно из уравн. (80). Указанное свойство насадок легко обнаружить опытом. Для этого в полость уменьшенного давления через стенку насадки вставляется тонкая металлическая трубочка C (черт. 104), соединенная резиновой трубкой с водяным манометром A, состоящим из стеклянной трубки в виде буквы **И.** Из резиновой трубки и из манометра воздух всасывается струею в насадку и затем уносится вместе с водою из насадки; это всасывание продолжается до того момента, когда ед. давление воздуха в этих трубках будет соответствовать ед. давлению воды в полости, что происходит весьма быстро. Вследствие разряжения воздуха в манометре вода в левой трубке поднимется, а в правой—понизится. Разность k этих горизонтов указывает, что давление p_1 в полости насадки меньше атмосферного p_0 на высоту водяного столба k, т.-е. $\frac{p_0 - p_1}{\Delta} = k$. Если полость соединить резиновой трубкой с вертикальной стеклянной трубкой B, нижний конец которой опущен в воду, то по той же причине вода в B поднимется на ту же высоту k. Если сосуд A поднять выше, укоротив трубку B, то водяной столб заполнит всю трубку, и вода из сосуда будет всасываться в насадку, как в насосе. Если кроме трубки B поставить еще несколько подобных трубок между B и выходным отверстием rs, то вода и в них поднимется; но чем ближе трубка к выходному отверстию, тем меньше высота столба поднятой жидкости; в самом выходном отверстии эта высота равна нулю, т.-е. в этом сечении ед. давление равно атмосферному, как это и было принято при определении V_p. Всасывание цилиндрическими насадками было впервые изучено итальянским гидравликом *Вентури*.

Для опытов в гидравлической лаборатории Московского Института применялась цилиндрическая насадка $d = 60$ м. м. длиною 210 м. м. В одном из опытов при напоре $H_0 = 0,75$ м. и при $\xi = 0$ получился коэфф. расхода $\mu = 0,819$.

Для определения всасывающего действия насадки были соединены с ней три тонкие металлические трубки в расстояниях от входного отверстия насадки равных 30; 90; 150 м. м.

Высота поднятия воды в этих трубках равнялась 0,585; 0,062; 0 метр.

Следоват., отношения этих высот к напору равны: 0,78; 0,09; 0.

Зная отношение 0,78, пренебрегая членом $\lambda \left(\frac{L}{2D}\right)$ и полагая $V_0 = 0$, т.-е. принимая $h_0 = H_0$, определим из равен. (81) коэфф. внутренняго сжатия струи α_1; именно $\alpha_1 = 0,633$.

Всасывание возможно только при условии, чтобы сжатое сечение ab, где происходит всасывание, было *меньше* выходного rs; чем меньше отношение этих сечений т.-е. $\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)$, тем сильнее всасывание. Если цилиндрическую насадку взять с округленным входным отверстием (черт. 104 *a*), то сжатия струи при входе в насадку не будет, а потому не будет и всасывания. Для таких насадок коэф. μ на 10% больше, чем для насадки без округления. Если насадке придать внутри очертание сжатой струи (черт. 104 *b*), то сопротивления от быстрого расширения струи не будет, так как полость, окружающая струю, будет отсутствовать; по этому в выражении для

$$\mu = \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_1}} \text{ член равный } \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2$$

исчезнет и коэф. μ для такой насадки значительно возрастет; поэтому возрастет также и всасывание. Если, напр., положить: $\xi = 0$; $\mu = 0{,}91$; $\frac{ab}{rs} = 0{,}64$ и $\left(\frac{L}{D}\right)$ считать не очень большим (не больше 5), то найдем:

$$\frac{p_1 - p_0}{\Delta} = -1{,}2\ h_0$$

т.-е. всасывание увеличивается на 60% сравнительно с предыдущим примером.

Затопленные цилиндрические насадки. Положим, что в боковой наклонной стенке сосуда имеется цилиндрическая насадка, через которую вода вытекает в резервуар P (черт. 105) с покоющеюся жидкостью; разность H_0 горизонтов воды в сосуде и в резервуаре остается постоянной, так как горизонты в них не изменяются. Здесь в насадке получается также сжатое сечение струи ab и вокруг него кольцевидная полость с покоющеюся жидкостью. В сжатом сечении скорости V_1 равны между собою, в чем можно убедиться способом изложенным выше. Также равны между собою скорости V_p в выходном отверстии.

Действительно, рассматривая линию тока $M_0 M$ и обозначая сопротивление на этом пути через $\zeta_1 \frac{V_p^2}{2g}$, где ζ_1 — *коэф. сопротивления насадки*, получим:

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g} + \zeta_1 \frac{V_p^2}{2g} = \left(z_0 + \frac{p_0}{\Delta}\right) - \left(z + \frac{p}{\Delta}\right).$$

Но ед. давление в rs также как и во всех точках резервуара P изменяется по гидростатическому закону, а потому:

$$\left(z+\frac{p}{\Delta}\right)=\left(z_0'+\frac{p_0}{\Delta}\right) \text{ и если обозначить: } (z_0-z_0')=H_0$$

то найдем из предыдущего равенства:

$$V_p=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta_1}}\sqrt{2g\left(H_0+\frac{V_0^2}{2g}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82).$$

Отсюда видно, что V_p одинаково во всех точках сечения rs. Если α_1 — коэф. внутреннего сжатия струи, то равенство расходов дает:

$$Q=\alpha_1\omega V_1=\omega V_p \text{ и следоват. } V_1=\frac{1}{\alpha_1}V_p.$$

Для определения коэф. сопротивления насадки ζ_1 будем иметь, также как и выше, что гидравлические сопротивления на пути M_0M состоят из *трех* частей:

1) по пути M_0M_1 равное $\zeta\frac{V_1^2}{2g}$;

2) по пути M_1M_2 между сечениями ab и cd равное $\frac{(V_1-V_p)^2}{2g}$; и

3) по пути M_2M между сечениями cd и rs равное $\lambda\cdot\frac{L}{D}\cdot\frac{V_p^2}{2g}$, где λ — имеет то же значение, что и выше. Следоват.

$$(h''-h_0'')_{M_0M}=\zeta_1\frac{V_p^2}{2g}=\zeta\frac{V_1^2}{2g}+\frac{(V_1-V_p)^2}{2g}+\lambda\frac{L}{D}\frac{V_p^2}{2g}.$$

Заменяя здесь V_1 через V_p, находим то же самое выражение, что и при вытекании на воздух:

$$\zeta_1=\frac{\zeta}{\alpha_1^2}+\left(\frac{1}{\alpha_1}-1\right)^2+\lambda\frac{L}{D} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83).$$

Также как и раньше, получим, что:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\zeta_1}}=\varphi=\mu; \text{ следоват. } \zeta_1=\frac{1}{\mu^2}-1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84).$$

Тогда имеем:

$$V_p=\varphi\sqrt{2g\left(H_0+\frac{V_0^2}{2g}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85).$$

Так как: $Q=\omega V_p=\Omega_0V_0$; то, исключая в выражении для V_p член $\frac{V_0^2}{2g}$, получаем:

$$V_p=\varphi\sqrt{\frac{2gH_0}{1-\left(\frac{\varphi\omega}{\Omega_0}\right)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86).$$

В тех случаях, когда величина $\frac{V_0^2}{2g}$ сравнительно с H_0 весьма мала или когда $\left(\frac{\varphi\omega}{\Omega_0}\right)^2$ сравнительно с единицей весьма мало, получаем для V_p следующее самое простое и часто употребляемое выражение:

$$V = \varphi\sqrt{2gH_0} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (87).$$

Определение давления в сжатом сечении насадки. Для этой цели рассмотрим линию тока M_1M; замечая, что здесь гидравлические сопротивления равны сумме (2) и (3) сопротивлений, и обозначая $(z_0' - z_1) = y$, получаем:

$$\frac{V_p^2 - V_1^2}{2g} + \left\{\left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 + \lambda\frac{L}{D}\right\}\frac{V_p^2}{2g} = \left(z_1 + \frac{p_1}{\Delta}\right) - \left(z + \frac{p}{\Delta}\right) = \frac{p_1 - p_0}{\Delta} - y.$$

Но из выражения (85) имеем:

$$\frac{V_p^2}{2g} = \mu^2\left(H_0 + \frac{V_0^2}{2g}\right) = \mu^2 h_0;$$

тогда:

$$\frac{p_1 - p_0}{\Delta} = 2\mu^2 h_0\left\{\left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right) + \lambda\frac{L}{2D}\right\} + y \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (88).$$

Коэф. $\alpha_1 < 1$, а потому $\left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right) < 0$; если величина $\left(\frac{L}{D}\right)$ не очень велика (не более 5), а также не велико y, то вторая часть выраж. (88) меньше 0 и следоват. $p_1 < p_0$; тогда насадка будет обладать свойством всасывания. Напр., при $\mu = 0{,}82$ и $\alpha_1 = 0{,}64$ получаем:

$$\frac{p_1 - p_0}{\Delta} = -0{,}75h_0 + y.$$

Пока $y < 0{,}75h_0$ насадка будет всасывать; чем меньше y, тем меньше p_1 и тем больше всасывание. С увеличением длины насадки L и глубины погружения y всасывание уменьшается и, наконец, насадка перестает всасывать.

§ 28. Насадки конически-расходящиеся, конически-сходящиеся и коноидальные. Рассмотрим теперь другие формы насадок. В технике играют более важную роль конически-расходящиеся насадки; они представляют собою усеченный конус, обращенный вершиною во внутрь сосуда; угол между двумя противоположными производящими называется *углом конусности*. Скорость, расход и ед. давление в этих насадках определяются тем же способом, как для цилиндрических насадок.

Струя, входя в насадку, сжимается и образует сжатое сечение ab (черт. 106); затем она быстро расширяется и в cd заполняет все сечения насадки, если только угол конусности не велик. Если же угол конусности значителен, то струя не касается стенок насадки и выходит из mn как из отверстия в тонкой стенке. Вокруг сжатого сечения образуется кольцевидная полость, занятая жидкостью в состоянии близком к покою. Как и в цилиндрической насадке, гидравлические сопротивления состоят из трех частей: первая часть — это сопротивления на пути M_0M_1, т.-е. до сжатого сечения; вторая часть сопротивления — между сжатым сечением ab и расширенным cd, т.-е. на пути M_1M_2; и третья часть — на остальном пути M_2M. Обозначим их последовательно в зависимости от скорости V_p в выходном сечении:

$$\zeta' \frac{V_p^2}{2g}; \quad \zeta'' \frac{V_p^2}{2g}; \quad \zeta''' \frac{V_p^2}{2g}.$$

Тогда все сопротивление на пути M_0M будет равно:

$$(h'' - h_0'')_{M_0M} = (\zeta' + \zeta'' + \zeta''') \frac{V_p^2}{2g} = \zeta_1 \frac{V_p^2}{2g}$$

где ζ_1 — коэф. сопротивления конически-расходящейся насадки. Теперь уравн. Д. Бернулли для линии тока M_0M будет иметь такой вид:

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g} + \zeta_1 \frac{V_p^2}{2g} = \left(z_0 + \frac{p_0}{\Delta}\right) - \left(z + \frac{p}{\Delta}\right) = H = \text{напору};$$

здесь в выходном отверстии ед. давление $p = p_0$, так как по выходе из rs частицы движутся независимо друг от друга. Следоват.

$$V_p = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_1}} \sqrt{2g\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)} = \varphi \sqrt{2g\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)} \quad \ldots \quad (89).$$

Здесь по предыдущему имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\zeta_1}} = \varphi, \text{ откуда } \zeta_1 = \frac{1}{\varphi^2} - 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (90).$$

Так как вообще $\alpha\varphi = \mu$ а в рассматриваемом случае внешнего сжатия струи нет, то $\alpha = 1$ и $\mu = \varphi$. Расширение струи при переходе ее из сжатого сечения в расширенное оказывается здесь более значительным, чем в цилиндрической насадке, а потому вторая часть сопротивления будет также больше. На этом основании коэф. сопротивления ζ_1 больше, а коэф. μ меньше, чем для цилиндрической насадки. Вообще μ зависит от угла конусности насадки; как среднее значение можно принять $\mu = 0{,}45$; тогда $\zeta_1 = 4{,}0$. Формула (89) показывает, что

скорость изменяется с напором по закону параболы; во многих случаях, а именно, как величина

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{Sin}\Psi}{h_0}\right)\frac{D}{2}$$

(где D — диаметр выходного отверстия насадки, а $h_0 = H_0 + \frac{V_0^2}{2g}$) мала сравнительно с единицей, можно принимать скорость одинаковой во всех точках отверстия и равной скорости в центре сжатого сечения, а именно:

$$V_p = \varphi\sqrt{2g\left(H_0 + \frac{V_0^2}{2g}\right)} = \varphi\sqrt{2gh_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (91).$$

Равенство расходов на свободной поверхности и в выходном отверстии а именно: $Q = \Omega_0 V_0 = \omega V_p$ дает возможность исключить член $\left(\frac{V_0^2}{2g}\right)$ из предыдущего равенства, и тогда получается:

$$V_p = \varphi\sqrt{\frac{2gH_0}{1-\left(\frac{\varphi\omega}{\Omega_0}\right)^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (92).$$

Если высоту $\frac{V_0^2}{2g}$ можно считать очень малой по сравнению с H_0 или, что тоже самое, величину $\left(\frac{\varphi\omega}{\Omega_0}\right)^2$ считать очень малой сравнительно с единицей, то получим простейшее и наиболее часто употребляемое выражение для скорости:

$$V_p = \varphi\sqrt{2gH_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (93).$$

Если принять, что V_p одинаково во всех точках выходного отверстия, то для расхода можно принять такое выражение:

$$Q = \omega V_p = \varphi\omega\sqrt{2g\left(H_0 + \frac{V_0^2}{2g}\right)} = \varphi\omega\sqrt{\frac{2gH_0}{1-\left(\frac{\varphi\omega}{\Omega_0}\right)^2}} \quad . \; . \; . \; . \; (94).$$

Во всех тех случаях, в которых можно для скорости пользоваться уравн. (93), будем иметь самое простое выражение:

$$Q = \varphi\omega\sqrt{2gH_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (95).$$

Определение давления в сжатом сечении насадки делается во всем согласно с изложенным для цилиндрической насадки. Для этого рассмотрим линию тока M_1M; на этой линии проявляются вторая и третья части гидравлических сопротивлений. Мы предположим, что насадка довольно коротка, а потому третьею частью гидр. сопротивлений пре-

небрегаем, и что, следоват. расширенное сечение струи cd совпадает с выходным rs; тогда вторая часть сопротивлений определится по теореме Борда и, имея в виду, что $Q = \omega V_p = \alpha_1 \omega_0 V_1$, можно ее представить так:

$$\zeta'' \frac{V_p^2}{2g} = \frac{(V_1 - V_p)^2}{2g} = \left(\frac{\omega}{\alpha_1 \omega_0} - 1\right)^2 \frac{V_p^2}{2g}$$

где ω_0 — входное сечение насадки; α_1 — коэф. внутреннего сжатия струи; и V_1 — скорость в сжатом сечении. Теперь формулу Д. Бернулли для линии тока M_1M можно написать в следующем виде:

$$\frac{V_p^2 - V_1^2}{2g} + \zeta'' \frac{V_p^2}{2g} = \frac{V_p^2}{2g} \left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\alpha_1 \omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\alpha_1 \omega_0} - 1\right)^2 \right\} =$$

$$= \left(z_1 + \frac{p_1}{\Delta}\right) - \left(z + \frac{p_0}{\Delta}\right) = \frac{p_1 - p_0}{\Delta} + \xi \quad \ldots \ldots \ldots (96).$$

здесь $(z_1 - z) = \xi = M_1K$ берется положительным, когда насадка обращена отверстием вниз, и отрицательным, когда она обращена вверх. Отсюда получаем, взяв для V_p выражение (91):

$$\frac{p_1 - p_0}{\Delta} = 2\mu^2 h_0 \left(1 - \frac{\omega}{\alpha_1 \omega_0}\right) - \xi \quad \ldots \ldots \ldots (97).$$

Очевидно, что величина в скобках отрицательна, поэтому $p_1 < p_0$ и насадка будет всасывать. В этих насадках всасывание получается больше, чем в цилиндрической насадке. Если насадке дать форму, показанную на черт. 108 и 115d, т.-е. снабдить ее раструбом E, называемым мундштуком, или закруглением F, то гидр. сопротивления происходящие от быстрого расширения струи не будут существовать, так как кольцевидная полость с покоющеюся жидкостью будет отсутствовать; поэтому $\zeta'' = 0$ и коэф. μ в данном случае будет больше. Если сверх того предположить, что насадка довольно короткая, то также $\zeta''' = 0$ и из уравн. (96) получим:

$$\frac{p_1 - p_0}{\Delta} = \mu^2 h_0 \left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\alpha_1 \omega_0}\right)^2 \right\} - \xi \quad \ldots \ldots \ldots (98).$$

Очевидно в этом случае p_1 будет меньше, чем в обыкновенной конически-расходящейся насадке; следоват. насадка с мундштуком или с закруглением будет всасывать сильнее, чем без мундштука или без закругления. Всасывающее действие конически-расходящихся насадок можно обнаружить на опыте приемом, применяемом для цилиндрических насадок. Для этого нужно в насадке против сжатого сечения сделать отверстие, которое помощью резиновой трубки соединить со

стекляной, вставленной в сосуд с водою (черт. 108*a*). Тогда при вытекании воды через насадку воздух из этих трубок будет высасываться и увлекаться далее вместе со струей. Вследствие уменьшения давления воздуха в трубках вода из сосуда поднимется по стекляной трубке на высоту равную $\left(\frac{p_0 - p_1}{\Delta}\right)$. Если поставить несколько подобных трубок между сжатым сечением и выходным, то в них вода также поднимется; чем ближе трубка к выходному концу, тем высота поднявшейся жидкости будет меньше; в самом выходном отверстии эта высота равна нулю, т.-е. в этом месте давление равно атмосферному, как это принято при выводе выражения для V_p.

По опытам в гидравлической лаборатории Московского Института инженеров п. с. с конически расходящейся насадкой, для которой: $D = 35{,}4$ м.м.; $d = 71{,}0$ м.м.; $l = 250{,}6$ м.м.; угол конусности β равен $8°7'40''$, было найдено в среднем из *пяти* опытов при напоре $H = 0{,}8$ м.м. и $\xi = 0$, что коэф. $\mu = 0{,}244$. Для определения всасывающего действия насадки, были в насадке укреплены три тоненькие металлические трубочки в расстоянии от плоскости входного отверстия: 20; 95; 170 м.м. Высоты всасывания в этих трубочках оказались соответственно равными 1,211; 0,295; 0,090 м. Отсюда видно, что отношение этих высот к напору H_0 равны: 1,51; 0,37; 0,11. Итак из этих опытов получается, что высота всасывания равна:

$$\frac{p_1 - p_0}{\Delta} = -1{,}211 \text{ м.} = -1{,}51\, H_0.$$

По этой величине можем при помощи формулы (97) определить коэф. внутреннего сжатия α_1, полагая, что $V_0 = 0$ и что $h_0 = H_0$:

$$\alpha_1 = 0{,}294.$$

Следоват. в этом случае высота всасывания в 2 раза больше, чем в цилиндрической насадке.

Случай затопленной конически-расходящейся насадки имеем тогда, когда вода из сосуда вытекает через насадку в бассейн, в котором вода стоит на одной и той же высоте и находится в покое (черт. 107). Движение воды в насадке происходит здесь совершенно так как при вытекании на воздух. Определение скорости и расхода делается во всем согласно с предыдущим случаем; различие будет заключаться только в том, что скорость V_p в выходном отверстии одинакова для всех точек и зависит от постоянной разности H_0 горизонтов в сосуде и бассейне; в этом убедимся помощью тех же рассуждений, какие

приведены для затопленных цилиндрических насадок. Итак для V_p можно применять выражения (91; 92; 93), а для Q выражения (94; 95), в которых H_0 есть разность горизонтов в сосуде и в бассейне. Коэф. $\varphi = \mu$ имеет тоже численное значение, как и для незатопленных насадок, т.-е. в среднем $\varphi = \mu = 0{,}45$ м. и $\zeta_1 = 4$.

Определение давления в сжатом сечении насадки можно сделать проще всего следующим приемом. Мы предположим, что насадка довольно коротка и потому третьею частью гидравл. сопротивлений можем пренебречь; тогда $\xi''' = 0$; затем вторую часть сопротивлений определим так же как и для незатопленных насадок; поэтому имеем:

$$\zeta'' \frac{V_p^2}{2g} = \frac{(V_1 - V_p)^2}{2g} = \frac{V_p^2}{2g}\left(\frac{\omega}{\alpha_1\omega_0} - 1\right)^2.$$

Теперь определим давление p в выходном отверстии. Около сечения rs вода в бассейне находится по условию в покое; давления в сечении rs распределяются по гидростатическому закону, ибо в этом сечении скорости можно принять параллельными между собою; в бассейне около насадки распределение давлений происходит по тому же закону; по этому можно написать

$$z + \frac{p}{\Delta} = z_0' + \frac{p_0}{\Delta}.$$

В таком случае ур. Д. Бернулли для линии тока M_1M представляется в таком виде:

$$\frac{V_p^2 - V_1}{2g} + \zeta'' \frac{V_p^2}{2g} = \frac{V_p^2}{2g} \cdot 2\left(1 - \frac{\omega}{\alpha_1\omega_0}\right) =$$

$$= \left(z_1 + \frac{p_1}{\Delta}\right) - \left(z + \frac{p}{\Delta}\right) = \frac{p_1 - p_0}{\Delta} - y$$

где $y = (z_1 - z_0')$ представляет глубину погружения точки M_1 под горизонтом воды в бассейне. Примем для V_p выражение (91), тогда окончательно выведем:

$$\frac{p_1 - p_0}{\Delta} = 2\mu^2 h_0 \left(1 - \frac{\omega}{\alpha_1\omega_0}\right) + y \quad \text{. . . . . . . (99).}$$

Если насадка погружена в воду неглубоко, т.-е. y довольно мало, то вторая часть этого выражения будет отрицательной и, следовательно, $p_1 < p_0$, т.-е. насадка будет всасывать. Насадка снабженная закруглением (черт. 115d) или мундштуком (черт. 108), будет всасывать сильнее, чем насадка без закругления или без мундштука, как это было доказано для случая вытекания на воздух. С увеличением погружения y всасывание уменьшается и, наконец, насадка перестает всасывать. С

увеличением длины насадки всасывание также уменьшается и может совсем прекратиться.

Конически-сходящиеся насадки. При вытекании воды через такую насадку струя, войдя в нее, сжимается и, расширяясь вслед затем, наполняет всю трубку; по выходе из отверстия струя вновь сжимается, после чего частицы струи движутся независимо друг от друга; в кольцевидном пространстве жидкость находится частью в покое, частью в медленном движении. Итак, здесь струя имеет *два* сжатых сечения — внутреннее и наружное. Будем придерживаться предыдущих обозначений; тогда для скорости вытекания V_p и для расхода Q можем получить, так же как и для ранее рассмотренных насадок:

$$V_p = \varphi \sqrt{2g\left(H_0 + \frac{V_0^2}{2g}\right)} = \varphi \sqrt{2gh_0} = \varphi \sqrt{\frac{2gH_0}{1 - \left(\frac{\mu\omega}{\Omega_0}\right)^2}} \quad \ldots . (100).$$

В тех случаях, когда можно пренебрегать $\frac{V_0^2}{2g}$ сравнительно с H_0 или величиной $\left(\frac{\mu\omega}{\Omega_0}\right)^2$ сравнительно с 1, получаем простейшее выражение:

$$V_p = \varphi \sqrt{2gH_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (101).$$

Для расхода имеем:

$$Q = \Omega V_p = \alpha\omega . \varphi \sqrt{2gh_0} = \mu\omega \sqrt{2gh_0} \quad \ldots\ldots (102).$$

В вышеуказанных случаях получаем такое упрощенное выражение

$$Q = \mu\omega \sqrt{2gH_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (103).$$

Весьма много опытов с конически-сходящимися насадками произвели *Добюиссон* и *Кастель*. На основании этих опытов *Грасгоф* составил следующую таблицу IV коэф. φ; α; μ для конически-сходящихся насадок при различных значениях угла конусности β; величины φ_0 и μ_0 соответствуют цилиндрическим насадкам.

Из этой таблицы видно, что для конически-сходящихся насадок коэф. μ больше, чем для цилиндрических, и что наибольшее $\mu = 0{,}945$ соответствует углу конусности $\beta = 13°$; оно на 14% больше, чем для цилиндрической насадки. Коэф. φ также возрастает с увеличением β и при $\beta = 45°$ равен 0,98, т.-е. на 19% больше, чем для цилиндрической насадки, и равен коэф. φ для отверстия в тонкой стенке. Эти насадки не имеют свойства всасывания, так как $\alpha_1\omega_0 > \omega$. Наибольший коэф. расхода получается для *коноидальных* насадок (черт. 109) внутреннее очертание которых соответствует приблизительно виду струи,

выходящей из отверстия в тонкой стенке. В этих насадках не проявляется ни внутреннего ни внешнего сжатия струи, поэтому здесь $\mu = \varphi$. По опытам *Мичелотти, Эйтельвейна, Вейсбаха* и др. для этих насадок $\mu = 0{,}90 - 0{,}98$. По Вейсбаху отношение размеров $d:l:D$ равно 1:1,78:2,22; по его опытам для короткой коноидальной насадки при напоре в 17 м. коэф. $\mu = 0{,}995$. Эти насадки также не обладают свойством всасывания.

Таблица IV

коэффициентов сжатия, скорости и расхода для конически-сходящихся насадок при различных углах конусности по опытам ДОБЮИССОНА и КАСТЕЛЯ.

β^0	μ	$\frac{\mu}{\mu_0}$	φ	$\frac{\varphi}{\varphi_0}$	α	β^0	μ	$\frac{\mu}{\mu_0}$	φ	$\frac{\varphi}{\varphi_0}$	α
0	0,829	1,000	0,829	1,000	1	13	0,945	1,140	0,961	1,159	0,983
1	852	1,028	852	1,028	1	14	943	1,138	965	1,164	977
2	873	1,053	873	1,053	1	16	938	1,131	969	1,169	968
3	892	1,076	892	1,076	1	18	931	1,123	970	1,170	960
4	909	1,097	909	1,097	1	20	922	1,112	971	1,171	950
5	920	1,110	920	1,110	1	25	908	1,095	974	1,175	932
6	925	1,116	925	1,116	1	30	896	1,081	975	1,176	919
8	931	1,123	933	1,125	0,998	35	883	1,065	977	1,179	904
10	937	1,130	949	1,145	987	40	871	1,051	980	1,182	889
12	942	1,136	955	1,152	986	45	857	1,034	983	1,186	872

§ 29. Живая сила вытекающей струи. Сравнение насадок.

Живая сила струи T, вытекающей из отверстий или насадок, может быть определена следующим образом. Если M — масса жидкости вытекающей в секунду, V_p — скорость частиц в сжатом сечении или в выходном отверстии (если наружного сжатия нет), то, принимая V_p одинаковым во всех точках сечения, имеем:

$$M = \frac{\Delta}{g} Q \quad \text{и} \quad T = \frac{1}{2} M V_p^2.$$

Если струя по выходе из сосуда имеет сжатое сечение (отверстие в тонкой стенке или конически-сходящаяся насадка), то имеем:

$$V_p = \varphi \sqrt{2g\left(H_0 + \frac{V_0^2}{2g}\right)} = \varphi \sqrt{2gh_0} \quad \text{и} \quad Q = \mu\omega\sqrt{2gh_0}.$$

Здесь $\mu = \alpha\varphi$; ω — площадь отверстия; H_0 — расстояние центра отверстия до свободной поверхности, для которой скорость V_0. Тогда получаем:

$$T = \Delta\omega\sqrt{(2gh_0)^3}\,\mu\varphi^2 = C.\mu\varphi^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (104)$$

где $C = \Delta\omega\sqrt{(2gh_0)^3}$ есть постоянная величина по условию. В том воображаемом случае, когда $\varphi = 1$; $\alpha = 1$ (сжатия нет); $\mu = 1$ получается $T = C$. Поэтому постоянную C можно назвать *теоретической живой силой* при вытекании через отверстия и насадки. Когда струя не имеет внешнего сжатого сечения (насадки: цилиндрические, конически-расходящиеся и коноидальные), то $\alpha = 1$ и $\varphi = \mu$; следоват., получится:

$$V_p = \mu\sqrt{2gh_0}; \quad Q = \mu\omega\sqrt{2gh_0}; \quad T = \Delta\omega\sqrt{(2gh_0)^3}\mu^3 = C\mu^3.$$

Выше было предположено, что скорость V_p одинакова во всех точках сечения; это предположение можно делать всегда для затопленных отверстий и насадок, а для вытекания на воздух только тогда, когда выходное отверстие горизонтально или когда количество:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{Sin}\Psi}{h_0}\right)\eta_0$$

(см. §§ 24 и 27) мало сравнительно с единицей. В противном случае живую силу струи T нужно вычислять по точному значению для V_p, приведенному в § 24 для отверстий в тонкой стенке и в § 27 для цилиндрических насадок. Истинное T будет *больше* приближенного T, получающегося в предположении, что V_p одно и то же по всему сечению. Определим высоту гидравлических сопротивлений на единицу веса расхода Q для отверстий и насадок. Выше было указано, что во многих случаях эту высоту можно представить под таким видом:

$$(h'' - h_0'') = \zeta\,\frac{V_p^2}{2g},$$

где ζ — коэф. сопротивления равный: $\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)$. Так как

$$V_p = \sqrt{2gh_0}, \text{ то следоват. } (h'' - h_0'') = (1 - \varphi^2)h_0 \quad . \; . \; . \; (105).$$

Работа гидравлических сопротивлений T_r на вес всего расхода Q определится так:

$$T_r = (h_n - h_0'').\Delta Q = (1 - \varphi^2)h_0.\Delta\mu\omega\sqrt{2gh_0} = C\mu(1 - \varphi^2) \quad . \; . \; . \; . \; (106).$$

Тогда отношение T_r к T равно:

$$\eta = \frac{T_r}{T} = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = \zeta.$$

Следовательно, полная живая сила равна:

$$T_0 = T + T_r = C\mu \quad \text{. . . . .} \quad (107).$$

Итак, если бы жидкость была совершенной, то ее живая сила равнялась бы $C\mu$. В нижеследующей таблице V приведены для отверстия в тонкой стенке и для различных насадок *средние* значения коэффициентов α; φ; μ; ζ, а так же выражения для полной живой силы T_0; живой силы струи T; высоты гидравлических сопротивлений на ед. веса $(h'' - h_0'')$ и работы гидравлических сопротивлений на вес расхода T_r. В этой таблице $C = \Delta\omega\sqrt{(2gh_0)^3}$. Из сравнения приведенных в таблице данных приходим к следующим выводам.

а) Если требуется иметь струю с *наибольшею скоростью*, то надо выпускать воду через отверстие в тонкой стенке или через конически-сходящуюся насадку или через коноидальную насадку; тогда получится скорость, составляющая 97% от теоретической.

б) Когда нужно выпустить из сосуда возможно больше воды за один и тот же промежуток времени, то нужно выбрать насадку с наибольшим μ, т.-е. взять конически-сходящуюся или коноидальную насадку; тогда получится около 95%—97% теоретического расхода.

Таблица V

коэффициентов α, φ, μ, ζ и величин $(h'' - h_0'')$, T_r, T и T_0 для отверстия в тонкой стенке и для различных насадок.

№№		Коэффициенты:				$(h'' - h_0'')$	T_r	T	$T_0 = T + T_r$
		α	φ	μ	ζ				
1.	Отверстие в тонкой стенке	0,64	0,97	0,62	0,063	$0,059h_0$	$0,037C$	$0,583C$	$0,62C$
2.	Цилиндрическая насадка	1	0,82	0,82	0,487	$0,328h_0$	$0,269C$	$0,551C$	$0,82C$
3.	Цилиндрическая насадка с закруглением при входе	1	0,90	0,90	0,235	$0,190h_0$	$0,171C$	$0,729C$	$0,90C$
4.	Конически-сходящаяся насадка с углом конусности 13°	0,98	0,97	0,95	0,063	$0,059h_0$	$0,056C$	$0,894C$	$0,95C$
5.	Коноидальная насадка	1	0,97	0,97	0,063	$0,059h_0$	$0,057C$	$0,913C$	$0,97C$
6.	Конически - расходящаяся насадка	1	0,45	0,45	3,938	$0,797h_0$	$0,359C$	$0,091C$	$0,45C$

в) Наибольшую живую силу имеет струя при вытекании через конически-сходящуюся или через коноидальную насадку, именно около 90% теоретической живой силы.

г) Наименьшую живую силу имеет струя при выходе из конически-расходящейся насадки, именно около 9% теоретической живой силы.

д) На *гидравлические сопротивления*, отнесенные к единице веса расхода, тратится напора больше всего в случае конически-расходящейся насадки (до $0{,}8h_0$) и меньше всего — при отверстии в тонкой стенке, в конически-сходящейся и в коноидальной насадках (до $0{,}06h_0$).

е) На *гидравлические сопротивления*, отнесенные к весу всего расхода, тратится живой силы больше всего — при конически-расходящейся насадке (до 36% теоретической живой силы) и меньше всего — при отверстиях в тонкой стенке, в конически-сходящейся и в коноидальной насадках (от 4% до 6% теоретической живой силы).

ж) Полная живая сила T_0 частью расходуется на гидравлические сопротивления (именно ζT), частью остается свободною в струе именно T), поэтому отношение между этими частями равное коэф. сопротивления ζ может служить показателем степени выгодности израсходования полной живой силы T_0. Самое *выгодное* отношение получается для отверстия в тонкой стенке, для конически-сходящейся и коноидальной насадок; это отношение равно отношению 0,063:1. Самое *невыгодное* отношение получается для конически-расходящейся насадки, оно равно 3,938:1; другими словами на гидравлические сопротивления затрачивается живая сила в 4 раза больше той, которая остается в струе.

§ 30. Практическое применение насадок. Случаи применения насадок многочисленны; здесь отметим только некоторые из них, относящиеся к конически-расходящимся насадкам.

1). **Водоструйный насос** или **водогон** (черт. 110) состоит из следующих частей: *а)* напорной трубы *a*, приводящей воду из водопровода или из высоко расположенного резервуара *A*; *б)* конически-сходящейся насадки *b*, в конце которой получается тонкая струя, выходящая с большою скоростью; *в)* всасывающей коробки *c*; так как струя увлекает с собою жидкость из коробки и гонит ее далее в конически-расходящуюся насадку *d*, то взамен увлеченной воды входит (присасывается) в коробку вода из бассейна *B*; *г)* конически расходящейся насадки *d*, принимающей воду из насадки *b* вместе с присосанной водою из коробки; *д)* нагнетательной трубы *e*, по которой поднимается вверх напорная вода вместе с присосанной. Этот насос употребляется для откачки воды из подвалов

помощью воды из водопровода, для откачки воды из шахт при рудничных работах помощью воды из вышележащего озера или реки (черт. 111) и т. п. Коэф. полезного действия водогона η называется отношение работы веса присосанной воды к работе веса водопроводной воды. Если за время t израсходовано воды из водопровода количество q при давлении в водопроводе соответствующем высоте водяного столба h, и в то же время поднято воды из бассейна B количество Q на высоту H, то работа веса первой воды за время t равна Δqh, а работа веса второй воды равна ΔQH, а потому

$$\eta = \frac{QH}{qh} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a).$$

Отсюда видно, что в водогоне малое количество воды, падая с большой высоты, производит своим весом работу по подъему большого количества воды на малую высоту. Коэффициент η этого насоса вообще незначительный: для малых водогонов около 12% и для больших около 25%. Такой малый коэффициент возмещается простотой конструкции (нет движущихся частей), а потому и дешевизной насоса, а также и автоматичностью работы, не требующей особого присмотра. Водоструйный насос устраивается также со всасывающей трубой (черт. 112). В этом случае насос состоит из тех же частей, но к коробке c прикрепляется всасывающая труба f, опущенная в бассейн B, из которого нужно выкачивать воду. При этом нужно иметь в виду, что наибольшая глубина всасывания не может превосходить 7 м.

2). **Пароструйный насос.** В этом насосе вода поднимается паром. Он состоит из следующих частей: *а*) паропроводной трубы a (черт. 113); *б*) конически-сходящейся насадки b, называемой соплом; через конец сопла пар выходит тонкой струей с громадной скоростью; *в*) конически-расходящейся насадки d с расширенным входным отверстием или мундштуком c; *г*) всасывающей трубы f, помощью которой вода всасывается в камеру h, окружающую насадку b; в этой камере происходит смешение воды с паром, нагревание ее и конденсация пара. Для урегулирования притока пара служит шпиндель g; это тонкий конический стержень, ввинчивая который можем уменьшить выходное отверстие в насадке b. Струя пара, выходя из насадки b, увлекает за собою воздух из камеры h и трубки f; поэтому вода из бассейна B вгоняется атмосферным давлением в f и в h, где пар смешивается с водой, конденсируется и в виде горячей струи воды направляется в насадку d и далее.

3) **Инжектор**, изобретенный *Жиффаром* в 1858 г., представляет, по мнению многих специалистов, одно из величайших изобретений

XIX столетия как по простоте идеи вложенной в него, так и по чрезвычайной практической важности. Инжекторы применяются для питания водою паровых котлов и делятся на две системы: всасывающие, когда они берут воду из нижележащего резервуара, и не всасывающие, когда вода берется из вышележащего резервуара. Смотря по конструкции инжекторы работают свежим или мятым паром. Вода, поступающая в инжектор, не должна быть теплее 30° — 40° C; но существуют инжекторы особой конструкции, всасывающие воду нагретую до 60° *C*.; это обстоятельство весьма важно, так как получается большая экономия при нагревании такой воды в котле. Чем холоднее вода, тем больше может быть высота всасывания. Инжектор состоит из следующих частей (черт. 114): *а*) паровой трубы *A* с вентилем *H*; *б*) парового сопла *a* в виде конически-сходящейся насадки; выходное отверстие сопла может быть увеличено или уменьшено помощью шпинделя *d*; *в*) водяного сопла *в* в виде насадки с мундштуком; *г*) напорного сопла *c* в виде конически-расходящейся насадки, снабженной мандштуком; *д*) всасывающей трубы *B*, по которой присасывается вода из резервуара *P* в инжектор; *е*) нагнетательной трубы *C*, по которой эта вода, смешавшись с паром, направляется в котел; *ж*) обратного клапана *E*, препятствующаго воде направляться из котла в инжектор в случае неисправности последняго; *з*) вестовой трубы *D*, по которой из инжектора уходит вода, всосанная в излишестве, которую пар не в состоянии при наличных условиях протолкнуть в котел по трубе *C*; *и*) конденсационной камеры *M*, где пар смешивается с присосанною водою и конденсируется, а вода нагревается; и *к*) переходной камеры *N*. Паровое сопло *a* может быть подвижным; ввинчивая его в тело инжектора, можем это сопло подвести ближе к водяному соплу. Пар, выходя из паровой части *F* котла, не может, конечно, присосать воду извне и втолкнуть ее в ту же паровую часть; но он легко вталкивает эту воду в водяную часть котла *G*. Подробный анализ явлений, совершающихся в инжекторе, требует применения формул термодинамики и сложных вычислений. Поэтому здесь ограничимся лишь несколькими словами, при чем для простоты предположим, что обратного клапана *E* нет. Пар выходит из парового сопла *a* с очень большою скоростью и увлекает воздух из камеры *M*, а также из трубы *B*, почему атмосферным давлением вода из резервуара *P* вгоняется по трубе *B* в камеру *M*. В этой камере пар сообщает воде свою живую силу и конденсируется; температура воды доходит до 90° *C*, но не должна превышать 100° *C*. Далее смесь горячей воды и пара проходит водяное сопло *b* и в в виде горячей воды достигает переходной камеры *N*.

В то же время вода из части котла G под давлением пара устремляется по трубе C и насадке c. Таким образом в узкой части мундштука c' встречаются две водяных струи. Очевидно, движение воды установится в сторону струи, имеющей бо́льшую живую силу. Выбирая надлежащим образом размеры узких концов сопл, а также регулируя шпинделем d приток пара и вдвигая сопло a в сопло b, можем всегда достигнуть, что верхняя струя будет иметь бо́льшую живую силу, а потому установится движение по трубе C в котел. Различных конструкций инжекторов очень много.

Двойные инжекторы могут питать котлы водою, нагретою до 70° C, всасывая воду на высоту до 6,5 м.; они состоят из двух инжекторов bc и $b'c'$, поставленных рядом в одной коробке (черт. 115). Первый инжектор всасывает воду и подводит ее под напором ко второму инжектору, которой и нагнетает ее в котел. В первый инжектор впускается около $^1/_3$ всего количества пара, а во второй остальные $^2/_3$; поэтому присосанная вода нагревается в первом, напр., на 17°, а во втором—на 34°, а всего на 51° C. Если всасываемая вода имеет температуру 55°, то в первом инжекторе она нагревается до $55° + 17° = 72°$, а во втором—до $72° + 34° = 106°$, что не влечет еще парообразования, так как давление в первом инжекторе около одной атмосферы, а во втором—около двух.

4) **Водобой** (черт. 115a) применяется в горных работах для разбивки горной породы и для размельчения ее. Вода под очень большим напором подводится по трубе A в конически-сходящуюся насадку или сопло B. Помощью шарового шарнира C сопло может принимать различные положения в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Для уравновешения сопла и для облегчения этих движений служит противовес D, лежащий на конце длинного рычага скрепленного с соплом.

При больших напорах и при значительных размерах выходного отверстия сопла живая сила выбрасываемой струи может достигать громадных размеров. Если, напр., принять напор H_0, под которым выбрасывается струя из сопла, равным 20 м., а диаметр сопла d равным 50 м. м., то по форм. (104) получим живую силу струи равной:

$$T = C\mu\varphi^2, \text{ где } C = \Delta\omega\sqrt{(2gH_0)^3}.$$

Для конически-сходящейся насадки с углом конусности в 13° по таблице V имеем: $\varphi = 0,97$; $\mu = 0,95$ и $\mu\varphi^2 = 0,894$.

Тогда получается:

$$T = 0,894.\ 1000.\ 0,001963\sqrt{(2.9,81.20)^3} = 13641 \text{ килограммометров}$$

или

$$T = 182 \text{ паров. лошадей.}$$

Такую живую силу будет иметь, напр., груз в 400 пуд., падающий с высоты около 7 ф. Очевидно, что под таким ударом должны дробиться даже очень крепкие горные породы.

5) **Брандспойт с наконечником** применяется при тушении пожаров. При пожаре вода забирается из бочек пожарными насосами и накачивается в пожарные рукава длиною 30 саж. и более. Эти рукава делаются пеньковыми или резиновыми внутренним диаметром от $2^1/_2$ до 3 дюймов; они состоят из отдельных звеньев длиною 10—15 саж., свинчивающихся между собою помощью особого приспособления. На конце рукава C укрепляется брандспойт B (черт. 115*в*), т.-е. медная конически-сходящаяся насадка длиною 24 д. и диаметром в широком месте от $2^1/_2$ до 3 дюйм., а в узкой (1,5—2) d, где d — диаметр бьющей струи равный $^3/_4$ до $1\frac{1}{4}$ д. На брандспойт навинчивается наконечник A, который представляет соединение двух насадок: цилиндрической диаметром d и длиною 1,5 d, и коноидальной длиною 1,75 d и диаметром в узкой части d и в широкой (1,5—2) d. Очертание этой насадки делается по параболе с вершиною a. Выходное отверстие наконечника снабжено утолщением для защиты от повреждений. Высота струи s (черт. 115 c), бьющей из наконечника, зависит от давления, т.-е. напора h, при входе в брандспойт и от диаметра d струи. Эта высота s меньше h вследствие сопротивлений движению воды в брандспойте и наконечнике, а также вследствие сопротивления в воздухе. Для определения s можно пользоваться формулами *Бокса*, *Фримана*, *Люгера* и др.

По *Фриману*:

$$s = h_1 - \frac{a h_1^2}{d} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (107a)$$

По *Люгеру*:

$$s = \frac{h_1}{1 + \beta h_1} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (107в)$$

где: $a = 0{,}000113$ и $\beta = \frac{0{,}00025}{d + 1000\, d^3}$ для метров; $h_1 = h + \frac{V_0^2}{2g}$ представляет напор, исправленный на скорость V_0 протекания воды в рукаве.

Для тушения пожаров струя оказывается годной лишь на протяжении s_1, на котором струя остается сплошной; обыкновенно $s_1 = (0{,}7 - 0{,}8)\, s$. При наклонном положении брандспойта бьющая струя имеет вид параболы. Наибольший полет струи λ по горизонтальному

направлению или *дальнобойность* струи получается при угле Ψ, зависящем от напора h; чем больше h, тем меньше Ψ. Так при $h=10$ м. $\Psi=35^0-40^0$; при $h=35$ м. $\Psi=30^0-35^0$.

Пример. Определить высоту s бьющей струи при следующих данных. Напор $h=30$ м.; диаметр наконечника $d={}^7/_8$ д. $=22$ м. м.; расход воды 50 ведер в минуту $=0{,}615$ к. м.; следоват., $Q=0{,}01025$ к. м. в секунду; диаметр рукава $D=3$ д. $=76$ м. м.; сечение его $\Omega=$ $=0{,}004536$ м.^{2}. По этим данным находим:

$$V_0=\frac{Q}{\Omega}=\frac{0{,}01025}{0{,}004536}=2{,}26 \text{ м.}; \quad \frac{V_0^2}{2g}=0{,}26 \text{ м.}; \quad h_1=30+0{,}26=30{,}26 \text{ м.}$$

Далее по Фриману:

$$s=30-\frac{0{,}000113.(30{,}26)^2}{0{,}022}=30-4{,}70=25{,}3 \text{ м.}$$

Длина струи s_1, при которой происходит успешное тушение пожара, равна:

$$s_1=0{,}75\ s=19 \text{ м.}$$

6) **Применение конически-расходящихся насадок в паровых тюрбинах.** В § 16 было показано, что вытекание газа может происходить по двум законам в зависимости от величины давления p_0 в сосуде. Если p_0 $<1{,}89\,P$ (здесь P — давление атмосферы), то скорость вытекания W_1 определяется по форм. (77 и 78) Навье, С. Венана и Ванцеля. При $p_0>1{,}89\,P$ скорость вытекания W_2 нужно определять по форм. (79); при этой скорости вес вытекающего газа G получается наибольшим. Эта скорость W_2 остается постоянной. Давление в сжатом сечении $p_1=0{,}53\,p_0$ для воздуха и $p_1=0{,}58\,p_0$ для насыщенного пара. Отсюда видно, что как бы велико ни было давление p_0 пара в котле, скорость его при вытекании будет одна и таже; давление же p_1 будет возростать пропорционально p_0.

В паровых тюрбинах применяется живая сила вытекающей струи пара, равная

$$\frac{1}{2}MV^2=\frac{\Delta}{2g}\,QV^2; \text{ в данном случае она равна } \frac{1}{2g}\,GW_2{}^2.$$

При W_2 постоянном живая сила с увеличением давления p_0 пара в котле увеличивается только пропорционально увеличению веса G. Это обстоятельство долго препятствовало рациональному устройству паровых тюрбин, пока *Де-Лаваль* не применил конически-расходящихся насадок для выпуска пара на рабочее колесо тюрбины.

Если, согласно Де-Лавалю, к выходному отверстию ab (черт. 115d) присоединить конически-расходящуюся насадку, то при переходе пара

из узкого сечения ab в широкое cd давление p_1 уменьшается до P, а скорость W_2 увеличивается до W_0. Вследствие этого возможно пользоваться живою силою пара соответствующей скорости W_0, именно равною $\frac{1}{2g} G W_0^2$. Отсюда видно, что при употреблении насадки живая сила струи увеличивается в $\left(\frac{W_0}{W_2}\right)^2$ раз.

Пример. Пусть давление в паровом котле $p_0 = 12$ атм.; давление в холодильнике $P = 0{,}12$ атм.; отношение сечений $cd : ab = 14:1$. Для насыщенного пара отношение теплоемкостей $\gamma = 1{,}135$. Давление в сжатом сечении $p_1 = 0{,}58\, p_0 = 6{,}96$ атм.; скорость в узком сечении $W_2 = 466$ м.; скорость в выходном сечении $W_0 = 1190$ м.

Итак, при переходе пара из сечения ab в cd давление уменьшается с 6,96 атм. до 0,12 атм.; скорость увеличивается с 466 м. до 1190 м.; при употреблении насадки живая сила увеличивается в $\left(\frac{1190}{466}\right)^2 = 6{,}5$ раз.

Глава III. Вытекание из сосудов при переменном горизонте.

§ 31. Вытекание из сосуда на воздух без притока. До сих пор рассматривались случаи вытекания из сосудов при постоянном горизонте. Постоянство горизонта возможно, очевидно, тогда, когда взамен вытекающей воды будет приводиться в сосуд извне такое же количество воды. Происходящее при таких условиях движение жидкости называется установившимся. Если взамен вытекающей воды будет приводиться вода в большем или меньшем количестве, то горизонт в сосуде будет подниматься или опускаться. Движение при таких условиях называется неустановившимся. Подобные случаи в практике встречаются довольно часто. Рассмотрение их делается при помощи *частной* гипотезы, о которой было уже упомянуто в § 22, и заключающейся в том, что неустановившееся движение заменяется установившимся. По этой гипотезе предполагается, что для всякого момента t скорость V при переменном напоре ζ равна скорости V_p при том же напоре ζ, считая его постоянным; следоват., по этой гипотезе $V = V_p = \varphi \sqrt{2g\zeta}$.

Пусть жидкость вытекает из сосуда с поперечным сечением Ω_0 через отверстие ω в тонкой стенке или через какую-либо насадку с выходным отверстием ω.

Покажем, что в большинстве случаев, пользуясь этой гипотезой, мы не сделаем сколько-нибудь заметной погрешности.

Предположим сперва, что вытекание происходит из сосуда, сечение которого Ω_0 *весьма велико* сравнительно с ω под напором H_0. Если мгновенно открыть отверстие, то в первые моменты движение будет неустановившееся со скоростью чрезвычайно быстро возрастающей; через очень малый промежуток времени t эта скорость подходит к пределу—скорости установившегося движения равной: $V_r = \varphi\sqrt{2gH_0}$. Напр., если вытекание происходит из цилиндрического сосуда $D = 1$ м. через круглое отверстие $d = 10$ м. м. при напоре $H_0 = 1{,}5$ м., то время t получается значительно меньше 0,001 сек. Отсюда видно, что неустановившееся движение переходит в установившееся в чрезвычайно короткий промежуток времени.

Если отношение $\left(\frac{\Omega_0}{\omega}\right)$ не очень велико, то при вытекании горизонт воды в сосуде опускается и напор H_0 постепенно уменьшается.

Здесь следует различать *два* случая. *Первый* случай, когда отверстие мгновенно открывается и горизонт падает. *Второй* случай, когда вытекание происходит первоначально при постоянном H_0 (следов., в сосуд существует приток), а затем приток в сосуд прекращается и горизонт опускается. Если вычислить по точным формулам время опорожнения сосудов для обоих случаев T_1 и T_2 и сравнить их с временами T_1' и T_2' вычисленными при помощи вышеприведенной частной гипотезы, то, оказывается, что при отношении $\left(\frac{\Omega_0}{\omega}\right) = 10$ получаются такие результаты:

для *первого* случая: $\frac{T_1}{T_1'} = 1{,}00023$ и для *второго* случая: $\frac{T_2}{T_2'} = 0{,}995$.

При значении $\left(\frac{\Omega_0}{\omega}\right)$ большем 10 эти отношения будут еще ближе к единице, т.-е. T и T' будут итти к совпадению.

Как общий вывод можно сказать, что при $\left(\frac{\Omega_0}{\omega}\right) > 100$ или при $\left(\frac{D}{d}\right) > 10$ можно руководствоваться этою частною гипотезою без заметной погрешности.

Положим при вытекании жидкости через отверстие или через насадку какому-либо моменту t соответствует горизонт mn и напор ζ (черт. 116); он измеряется от центра C сжатого сечения в случае отверстия в тонкой стенке и в случае конически-сходящейся насадки, или от центра C выходного отверстия в прочих случаях. В приложениях можно во всех случаях напор ζ измерять от центра отверстия.

Пусть ось OX горизонтальна и проходит через точку C; ось Z направим вертикально вверх. Тогда получаем:

$$V_p = \varphi\sqrt{2g\zeta}\ ; \qquad Q = \alpha\omega .\ V_p = \mu\omega\sqrt{2g\zeta}.$$

В течении момента dt из сосуда выйдет количество Qdt, а горизонт mn за это время понизится на $d\zeta$. Если O—поперечное сечение сосуда в mn, то элементарный объем вытекшей воды равен $Od\zeta$. Очевидно, объемы Qdt и $Od\zeta$ равны, но эти количества имеют разные знаки, потому что $dt > 0$, а $d\zeta < 0$, так как горизонт опускается и, следоват., ζ уменьшается. Приняв это во внимание, получим основное дифференциальное уравнение вытекания при переменном горизонте:

$$Qdt = -Od\zeta \qquad \text{или} \qquad \mu\omega\sqrt{2g\zeta}.\ dt = -Od\zeta.$$

Определим время t, потребное для опускания горизонта от ζ_0 до ζ_1; при этом предположим, что коэфф. μ остается постоянным; тогда

$$t = \frac{1}{\mu\omega\sqrt{2g}}\int_{\zeta_1}^{\zeta_0}\frac{Od\zeta}{\sqrt{\zeta}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (108)$$

Объем жидкости вытекшей за время t равен:

$$W = \int_{\zeta_1}^{\zeta_0} Od\zeta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (109)$$

Рассмотрим частные случаи.

а) Поперечное сечение сосуда постоянное. Пусть поперечное сечение сосуда *постоянно* и равно Ω_0; тогда из ур. (108) получаем:

$$t = \frac{2\Omega_0}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left\{\sqrt{\zeta_0} - \sqrt{\zeta_1}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (110)$$

$$W = \Omega_0(\zeta_0 - \zeta_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (111)$$

Полученное выражение для t не применимо при $\zeta_0 = \zeta_1$, т. е. для постоянного напора. Преобразуем его, умножив и разделив вторую часть на $(\sqrt{\zeta_0} + \sqrt{\zeta_1})$; тогда получим:

$$t = \frac{2\Omega_0(\zeta_0 - \zeta_1)}{\mu\omega\sqrt{2g}(\sqrt{\zeta_0} + \sqrt{\zeta_1})} = \frac{2W}{\mu\omega\sqrt{2g}(\sqrt{\zeta_0} + \sqrt{\zeta_1})} \quad . \; . \; . \quad (112)$$

При $\zeta_0 = \zeta_1$ получается:

$$t = \frac{W}{\mu\omega\sqrt{2g\zeta_0}} \qquad \text{или} \qquad \frac{W}{t} = Q = \mu\omega\sqrt{2g\zeta_0}$$

Это выражение для расхода при постоянном напоре ζ_0.

Для случаев вытекания при переменном горизонте полезно ввести новые понятия: средний напор H_c и средний расход Q_c. Средним напором называется такой постоянный напор, при котором за тот же промежуток времени t вытекает тот же объем W, что и при переменном напоре. Расход, соответствующий этому постоянному напору, называется средним. Из этого определения следует:

$$Q_c \cdot t = W; \qquad Q_c = \mu\omega\sqrt{2gH_c}$$

Первое из этих выражений при помощи уравн. (112) дает:

$$Q_c = \mu\omega\sqrt{2g} \cdot \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\zeta_0} + \sqrt{\zeta_1}\right\}$$

а из сравнения второго выражения с только что найденным имеем:

$$\sqrt{H_c} = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\zeta_0} + \sqrt{\zeta_1}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (113)$$

Поэтому уравн. (112) можно переписать еще так:

$$t = \frac{W}{\mu\omega\sqrt{2gH_c}} \quad \ldots \ldots \quad (114)$$

Время опорожнения сосуда T получаем из (110), полагая $\zeta_1 = 0$ тогда

$$T = \frac{2\Omega_0}{\mu\omega}\sqrt{\frac{\zeta_0}{2g}} \quad \ldots \ldots \quad (115)$$

Определим время t, необходимое для опорожнения верхней половины сосуда; тогда $\zeta_1 = \frac{1}{2}\zeta_0$ и получается из ур. (110):

$$t = \frac{2\Omega_0}{\mu\omega}\sqrt{\frac{\zeta_0}{2g}}\left\{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right\} = 0{,}29\,T.$$

На опорожнение нижней половины сосуда потребуется 0,71 T или почти в $2\frac{1}{2}$ раза больше. Найдем время T', в течении которого при постоянном напоре ζ_0 вытечет объем равный объему всего сосуда, т.-е. $\Omega_0\,\zeta_0$; тогда имеем:

$$Q \cdot T' = \mu\omega\sqrt{2g\zeta_0} \cdot T' = \Omega_0\,\zeta_0$$

Отсюда

$$T' = \frac{\Omega_0}{\mu\omega}\sqrt{\frac{\zeta_0}{2g}}$$

следоват.

$$T' = \frac{1}{2}T.$$

Из уравн. (110) видно, что зависимость между t и ζ_1 параболическая; действительно, полагая

$$\frac{2\Omega_0}{\mu\omega\sqrt{2g}}=c \qquad \text{получаем:} \qquad (T-t)^2=c^2\zeta_1.$$

Если принять $(T-t)=x$, то имеем: $x^2=c^2\zeta_1$, что представляет уравнение параболы ACB (черт. 117), отнесенное к осям CO и CZ'; вершина параболы в C, а ось есть CZ'. По этой параболе не трудно найти время t, соответствующее заданному ζ_1. Пусть требуется определить время t, необходимое для опускания горизонта с ζ_0 до ζ_1. Для этого продолжим линию горизонта mn до пересечения с параболой, тогда, очевидно, $nq=t$. Также решается обратная задача: определить ζ_1 по заданному t. Парабола OD представляет кривую скоростей; здесь напору ζ_0 соответствует скорость:

$$V_p=\sqrt{2g\zeta_0}=AD.$$

б) Поперечное сечение сосуда переменное. Площадь поперечного сечения сосуда O представляется вообще функцией ζ; т.-е. $O=f(\zeta)$. Во многих случаях эту площадь можно выразить целой алгебраической функцией второй степени от ζ такого вида:

$$O=f(\zeta)=\Omega_0+p\zeta+q\zeta^2.$$

К такому случаю относятся сосуды, имеющие форму эллипсоида, конуса, пирамиды и т. п. В этом случае уравн. (103) примет вид:

$$t=\frac{1}{\mu\omega\sqrt{2g}}\int_{\zeta_1}^{\zeta_0}(\Omega_0+p\zeta+q\zeta^2)\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}}$$

Произведя интегрирование и взяв пределы, найдем:

$$t=\frac{2}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left\{\Omega_0(\sqrt{\zeta_0}-\sqrt{\zeta_1})+\frac{1}{3}p(\sqrt{\zeta_0^3}-\sqrt{\zeta_1^3})+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}q(\sqrt{\zeta_0^5}-\sqrt{\zeta_1^5})\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(116)$$

Объем жидкости, вытекшей за время t, найдем из уравн. (109):

$$W=\Omega_0(\zeta_0-\zeta_1)+\frac{1}{2}p(\zeta_0^2-\zeta_1^2)+\frac{1}{3}q(\zeta_0^3-\zeta_1^3).$$

Если $p=0$ и $q=0$, то $O=\Omega_0=$ постоянное и для t и W получаются уже ранее найденные выражения (110 и 111). Если положить $\zeta_1=0$, то найдем время опорожнения T. Очевидно, Ω_0 представляет поперечное сечение сосуда при $\zeta_1=0$. Для решения задачи необходимо знать величины p и q; определение их будет ясно из следующего примера.

Как пример, возьмем сосуд в форме *эллипсоида* с осями a, b и c, при чем ось c вертикальна (черт. 118). Пусть отверстие расположено в плоскости $X'Z$ и находится в расстоянии m от центра O' эллипсоида. Найдем выражение для площади сечения $m'n'$ взятого в расстоянии u от центра O' и в расстоянии $\zeta = m + u$ от O. Уравнение эллипсоида относительно осей $X'Y'Z$ имеет вид:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1.$$

Положим здесь $z = u$; тогда

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2 = k^2$$

или

$$\left(\frac{x}{ak}\right)^2 + \left(\frac{y}{bk}\right)^2 = 1.$$

Это уравнение эллипса $m'n'$ с полуосями ak и bk. Площадь сечения $m'n'$ равна:

$$O = \pi \cdot ak \cdot bk \cdot = \frac{\pi ab}{c^2}(c^2 - u^2) = \frac{\pi ab}{c^2}\left\{c^2 - (\zeta - m)^2\right\}$$

или

$$O = \frac{\pi ab}{c^2}(c^2 - m^2) + \frac{2\pi abm}{c^2}\zeta - \frac{\pi ab}{c^2}\zeta^2.$$

Сравнивая этот результат с общим выражением для O, выводим:

$$\Omega_0 = \frac{\pi ab}{c^2}(c^2 - m^2);\ p = \frac{2\pi abm}{c^2};\ q = -\frac{\pi ab}{c^2}.$$

Для сосуда в виде *шара* $a = b = c$. Если найденные значения для Ω_0; p; q вставим в выражения для t и W, то получим окончательное решение вопроса о вытекании жидкости из эллипсоида при переменном горизонте.

Как второй пример рассмотрим случай опорожнения *водохранилищ*, которые в инженерной практике часто устраиваются для приведения в действие гидравлических двигателей, для водоснабжения городов, для питания судоходных каналов, для орошения и т. п. Такие водохранилища имеют форму довольно сложную в зависимости от рельефа местности и вообще геометрически неопределимую. Французский гидравлик *Греф*, много занимавшийся вопросами, относящимися до водохранилищ, дает подробные указания для определения времени понижения горизонта и для определения объема вытекшей воды.

Мы рассмотрим более простой хотя и не столь точный способ определения времени понижения горизонта в водохранилищах. Этот

способ основан на применении известной формулы Симпсона для приближенного вычисления определенного интеграла. Как известно, по этой формуле нужно промежуток $(\zeta_0 - \zeta_{2n})$ разделить на четное $2n$ число равных частей; затем для каждой из ординат: $\zeta_0; \zeta_1 \ldots \zeta_{2n}$ нужно определить каким-либо способом значения подинтегральной функции $f(\zeta)$; пусть эти значения будут равны

$$f(\zeta_0);\ f(\zeta_1) \ldots\ f(\zeta_{2n}).$$

Тогда по формуле Симпсона имеем:

$$\int_{\zeta_{2n}}^{\zeta_0} f(\zeta)\,d\zeta = \frac{(\zeta_0 - \zeta_{2n})}{3 \cdot 2n} \Big\{ f(\zeta_0) + f(\zeta_{2n}) +$$

$$+ 4[f(\zeta_1) + f(\zeta_3) + \cdots] + 2[f(\zeta_2) + f(\zeta_4) + \cdots] \Big\}$$

В нашем случае нужно приближенно определить величину интеграла:

$$\int_{\zeta_{2n}}^{\zeta_0} \frac{O\,d\zeta}{\sqrt{\zeta}}$$

в выражении (108) для t. Пусть горизонтальные сечения водохранилища для ординат $\zeta_0; \zeta_1 \ldots \zeta_{2n}$ суть $O_0; O_1 \ldots O_{2n}$ (черт. 119); тогда:

$$f(\zeta_0) = \frac{O_0}{\sqrt{\zeta_0}};\ f(\zeta_1) = \frac{O_1}{\sqrt{\zeta_1}};\ \ldots\ f(\zeta_{2n}) = \frac{O_{2n}}{\sqrt{\zeta_{2n}}}$$

Выражение (108) получает такой окончательный вид:

$$t = \frac{(\zeta_0 - \zeta_{2n})}{3 \cdot 2n \cdot \mu\omega \sqrt{2g}} \Big\{ \frac{O_0}{\sqrt{\zeta_0}} + \frac{O_{2n}}{\sqrt{\zeta_{2n}}} + 4\left[\frac{O_1}{\sqrt{\zeta_1}} + \frac{O_3}{\sqrt{\zeta_3}} + \cdots\right] +$$

$$+ 2\left[\frac{O_2}{\sqrt{\zeta_2}} + \frac{O_4}{\sqrt{\zeta_4}} + \cdots\right] \Big\} \ldots \ldots \quad (117).$$

Объем вытекшей воды, очевидно, равен:

$$W = \int_{\zeta_{2n}}^{\zeta_0} O\,d\zeta.$$

Этот интеграл находим приближенно по тому же способу и получаем:

$$W = \frac{(\zeta_0 - \zeta_{2n})}{3 \cdot 2_n} \Big\{ O_0 + O_{2n} + 4[O_1 + O_3 + \cdots] + 2[O_2 + O_4 + \cdots] \Big\} \quad (118)$$

Определение сечений $O_0; O_1 \ldots$ нужно сделать путем съемки. Выпуск воды из пруда или водохранилища можно делать или через щи-

товое отверстие или посредством трубы металлической или каменной. Величина коэффициента расхода μ зависит от устройства выпускного отверстия; в случае трубы нужно для определения μ пользоваться данными для труб.

§ 32. Вытекание из сосуда на воздух с притоком. Пусть при вытекании из сосуда существует приток в сосуд равный q в секунду и пусть при этом горизонт жидкости понижается на $d\zeta$ (черт. 116 Для упрощения в письме всегда можно положить

$$q = \mu\omega\sqrt{2ga}$$

где a постоянная величина. За время dt вытекает из сосуда количество Qdt; этот объем, очевидно равен количеству qdt притекшему в сосуд за это время и количеству $Od\zeta$. Так как $dt > 0$ и $d\zeta < 0$ (потому что горизонт понижается), то $Od\zeta$ нужно взять со знаком минус и равенство объемов напишется так:

$$Qdt = qdt - Od\zeta.$$

Так как

$$Q = \mu\omega\sqrt{2g\zeta_0} \quad \text{и} \quad q = \mu\omega\sqrt{2ga}$$

то предыдущее равенство можно переписать так:

$$\mu\omega\sqrt{2g}\,(\sqrt{\zeta} - \sqrt{a})\,dt = -Od\zeta.$$

Отсюда найдем время t, необходимое для понижения горизонта с ζ_0 до ζ_1, в предположении, что коэфф. расхода μ постоянен:

$$t = \frac{1}{\mu\omega\sqrt{2g}}\int_{\zeta_1}^{\zeta_0}\frac{Od\zeta}{\sqrt{\zeta} - \sqrt{a}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (119)$$

Объем жидкости, вытекшей из сосуда за время t, равен притоку жидкости в сосуд за время t и объему сосуда между ординатами ζ_0 и ζ_1; следоват.

$$W = qt + \int_{\zeta_1}^{\zeta_0} Od\zeta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (120)$$

а). Пусть *сечение сосуда постоянно;* тогда $O = \Omega_0$; для интегрирования вводим новую переменную $u^2 = \zeta$; в таком случае получаем:

$$\int\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta} - \sqrt{a}} = 2\int\frac{(u - \sqrt{a} + \sqrt{a})\,du}{u - \sqrt{a}} =$$

$$= 2u + 2\sqrt{a}\,lgnat.(u - \sqrt{a}) + C.$$

Заменив здесь u равной ему величиной и взяв вторую часть этого равенства между пределами ζ_0 и ζ_1, представим уравн. (119) в таком окончательном виде:

$$t = \frac{2\Omega_0}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left\{(\sqrt{\zeta_0} - \sqrt{\zeta_1}) + \sqrt{a}\, lgnat. \left(\frac{\sqrt{\zeta_0} - \sqrt{a}}{\sqrt{\zeta_1} - \sqrt{a}}\right)\right\} \ldots \quad (121)$$

Объем вытекшей жидкости:

$$W = qt + \Omega_0(\zeta_0 - \zeta_1).$$

Исследуем выражение (121).

Если притока нет, то $q = 0$, следоват., $a = 0$ и получается форм. (110) в § 30.

Если $a = \zeta_0$, то приток q в сосуд равен расходу из сосуда при напоре ζ_0, т.-е. в начале вытекания, почему горизонт в сосуде будет оставаться постоянным.

При выводе уравнения (121) было предположено, что горизонт понижается или другими словами, что приток q меньше начального расхода Q_0 соответствующего напору ζ_0; следоват.

$$\mu\omega\sqrt{2ga} < \mu\omega\sqrt{2g\zeta_0} \quad \text{или} \quad a < \zeta_0.$$

Будем по оси X (черт. 120) откладывать времена t а по оси Y соответственные ординаты ζ_1. Тогда уравн. (121) можно представить некоторой трансцендентной кривой AGD, где $AO = \zeta_0$; она имеет горизонтальную ассимптоту ED, для которой $OE = a$. В этом случае горизонт жидкости, понижаясь все время, подходит при $t = \infty$ к горизонту, для которого $\zeta = a$. Итак, здесь для всякого t будем иметь $\zeta > a$.

Предположим теперь, что приток q больше начального расхода Q_0, т.-е.:

$$\mu\omega\sqrt{2ga} > \mu\omega\sqrt{2g\zeta_0} \text{ или } a > \zeta_0;$$

тогда горизонт в сосуде будет подниматься и величина $d\zeta$ будет положительна.

Дифференциальное уравнение получит в этом случае такой вид:

$$(q - Q)\,dt = \mu\omega\sqrt{2g}\,(\sqrt{a} - \sqrt{\zeta})dt = \Omega d\zeta.$$

Отсюда видно, что это уравнение сохраняет свой вид, а потому уравн. (121) для t останется справедливым и для этого случая. Кривая, изображаемая этим уравнением, есть трансцендентная кривая BC, где $OB = \zeta_0$; она имеет горизонтальную ассимптоту EF. Итак, в этом случае горизонт жидкости, поднимаясь все время, подходит при $t = \infty$ к горизонту, для которого $\zeta = a$; здесь постоянно: $\zeta < a$.

б) Если *сечение сосуда переменное* и выражается целой алгебраической функцией второй степени, т.-е выражается уравнением:

$$O = \Omega + p\zeta + q\zeta^2,$$

то в этом случае уравнение (119) примет такой вид:

$$t = \frac{1}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left\{\Omega_0\int_{\zeta_1}^{\zeta_0}\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}-\sqrt{a}} + p\int_{\zeta_1}^{\zeta_0}\frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{\zeta}-\sqrt{a}} + q\int_{\zeta_1}^{\zeta_0}\frac{\zeta^2 d\zeta}{\sqrt{\zeta}-\sqrt{a}}\right\} \ldots (122)$$

Первый интеграл находится как об'яснено выше; второй получим, прибавив к числителю a и вычтя из него a; третий вычислим, полагая $\sqrt{\zeta} = u$. Если затем взять полученные результаты между пределами ζ_0 и ζ_1, то найдем в окончательном виде выражение для t.

Упрощение уравнения (121). Для вычисления величин ζ_1 и q уравнение (121) представляет большие неудобства, почему лучше решать эти задачи по приближению, употребляя для этой цели вместо точного уравн. (121)—приближенное. Так как

$$\sqrt{a} = \frac{q}{\mu\omega\sqrt{2g}},$$

то, вставляя это значение в уравнение (121), находим:

$$t = \frac{2\Omega_0}{\mu\omega\sqrt{2g}}(\sqrt{\zeta_0} - \sqrt{\zeta_1}) - \frac{2q\Omega_0}{(\mu\omega\sqrt{2g})^2}\ lg\ nat.\left(\frac{q-\mu\omega\sqrt{2g\zeta_1}}{q-\mu\omega\sqrt{2g\zeta_0}}\right). (121a)$$

Разложим lg в ряд по известной формуле высшего анализа:

$$lg\ nat.\left(\frac{N+k}{N-k}\right) = 2\left\{\frac{k}{2N+k} + \frac{1}{3}\left(\frac{k}{2N+k}\right)^3 + \ldots\right\}$$

С этою целью полагаем:

$$N + k = q - \mu\omega\sqrt{2g\zeta_1};\quad N - k = q - \mu\omega\sqrt{2g\zeta_0}.$$

Отсюда выводим:

$$k = \mu\omega\sqrt{2g}(\sqrt{\zeta_0} - \sqrt{\zeta_1});\quad 2N + k = 2q - \mu\omega\sqrt{2g}(\sqrt{\zeta_0} + \sqrt{\zeta_1}).$$

В разложении lg ограничимся первым членом; тогда выражение (121a) примет вид:

$$t = \frac{2\Omega_0}{\mu\omega\sqrt{2g}}(\sqrt{\zeta_0} - \sqrt{\zeta_1}) - \frac{2q\Omega_0}{\mu\omega\sqrt{2g}}\cdot\frac{2(\sqrt{\zeta_0} - \sqrt{\zeta_1})}{2q - \mu\omega\sqrt{2g}(\sqrt{\zeta_0} - \sqrt{\zeta_1})}.$$

Отсюда находим в окончательном виде следующее выражение для t:

$$t = \frac{2\Omega_0(\zeta_0 - \zeta_1)}{\mu\omega\sqrt{2g}(\sqrt{\zeta_0} + \sqrt{\zeta_1}) - 2q} \ldots\ldots\ldots (123)$$

Помощью этой приближенной формулы можно легко определить величины постоянного притока q и напора ζ_1. Действительно, из выражения (123) находим:

$$q = \frac{1}{2}\mu\omega\sqrt{2g}(\sqrt{\zeta_0} + \sqrt{\zeta_1}) - \frac{\Omega_0}{t}(\zeta_0 - \zeta_1).$$

Решая же это уравнение как квадратное относительно ζ_1, получаем:

$$\sqrt{\zeta_1} = -\frac{t\mu\omega\sqrt{2g}}{4\Omega_0} \pm \sqrt{\left\{\frac{t\mu\omega\sqrt{2g}}{4\Omega_0} - \sqrt{\zeta_0}\right\}^2 + \frac{tq}{\Omega_0}}.$$

Перед корнем нужно взять знак минус, если $q > \mu\omega\sqrt{2g\zeta_0}$, и знак плюс в обратном случае.

§ 33. Случай двух сообщающихся сосудов (вытекание через затопленное отверстие). Рассмотрим случай двух сообщающихся сосудов: вода вытекает из одного сосуда в другой через отверстие в диафрагме, поставленной в широкой и короткой соединительной трубе (черт. 121). Пусть в какой-либо момент горизонты воды занимают положение mn и $m'n'$; разность горизонтов равна $(z - z') = \zeta$. Поперечные сечения сосудов O и O' будут вообще некоторыми функциями от z и z', напр., $O = f(z)$ и $O' = F(z')$. За момент времени dt сечение mn — понизится на dz, а сечение $m'n'$ повысится на dz'. Расход через затопленное сечение определится по формуле (60) в § 24 и равен (при $V_0 = 0$):

$$Q = \mu\omega\sqrt{2g(z - z')} = \mu\omega\sqrt{2g\zeta}.$$

Объем воды вытекшей за это время из левого сосуда равен Odz, а втекшей в правый сосуд равен $O'dz'$. Так как $dt > 0$ и $dz' > 0$, а $dz < 0$, то равенство объемов представится в таком виде:

$$-Odz = O'dz' = Qdt = \mu\omega\sqrt{2g\zeta}\,.\,dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

В этом уравнении выразим dz через $d\zeta$. Так как

$(z - z') = \zeta$, то $dz - dz' = d\zeta$; также: $-Odz = O'dz'$;

тогда получается отсюда:

$$dz = \frac{O}{O + O'}d\zeta.$$

Подставим этот результат в уравн. (a); тогда, принимая попрежнему коэф. расхода μ постоянным, получим время t для понижения с ζ_0 до ζ_1:

$$t = \frac{1}{\mu\omega\sqrt{2g}}\int_{\zeta_1}^{\zeta_0}\frac{OO'}{O + O'}\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (124)$$

Это есть основное уравнение для двух сообщающихся сосудов; оно дает время t, в течение которого разность горизонтов ζ_0 обращается в ζ_1. Объем воды вытекшей из левого сосуда равен:

$$W = \int_{z_1}^{z_0} O dz,$$

где z_0 и z_1 соответствуют начальному и конечному положениям горизонта mn.

Рассмотрим простейший случай, когда *сечения сосудов постоянные.* Пусть сечения сосудов будут: левого Ω_0 и правого Ω_1; тогда из уравн. (124) находим:

$$t = \frac{2\Omega_0\Omega_1}{\mu\omega\sqrt{2g}(\Omega_0 + \Omega_1)}\left\{\sqrt{\zeta_0} - \sqrt{\zeta_1}\right\} \quad \ldots\ldots (125)$$

Если положить $\zeta_1 = 0$, то определим время T сравнения горизонтов в сосудах, а именно:

$$T = \frac{2\Omega_0\Omega_1\sqrt{\zeta_0}}{\mu\omega\sqrt{2g}(\Omega_0 + \Omega_1)} \quad \ldots\ldots\ldots (126)$$

Пусть уровень в правом сосуде не изменяется, напр., потому, что сечение его Ω_1 весьма велико. Тогда в уравн. (125) числителя и знаменателя делим на Ω_1 и, замечая, что при

$\Omega_1 = \infty$ получается $\left(\frac{\Omega_0}{\Omega_1}\right) = 0$, находим:

$$t = \frac{2\Omega_0}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left\{\sqrt{\zeta_0} - \sqrt{\zeta_1}\right\} \ldots\ldots\ldots (127)$$

Если уровень в левом сосуде не изменяется потому, что его сечение Ω_0 весьма велико, то таким же путем найдем:

$$t = \frac{2\Omega_1}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left\{\sqrt{\zeta_0} - \sqrt{\zeta_1}\right\} \ldots\ldots\ldots (128)$$

Уравнения (127 и 128) тожественны с уравн. (110) в § 31 полученным для вытекания из сосуда в воздух; только в первых уравнениях ζ_0 и ζ_1 суть разности горизонтов в сосудах, а во втором уравнении те же величины представляют расстояния горизонта воды в сосуде от центра сжатого сечения (при отверстии) или выходного отверстия (при насадке). Выражению (125) можно дать другой вид. Если в левом сосуде горизонт опустился на h_0, а в правом поднялся на h_1, то $\Omega_0 h_0 = \Omega_1 h_1$; очевидно также, что $(\zeta_0 - \zeta_1) = (h_0 + h_1)$. Тогда имеем:

$$\Omega_0 + \Omega_1 = \Omega_1\left(1 + \frac{h_1}{h_0}\right); \quad \sqrt{\zeta_0} - \sqrt{\zeta_1} = \frac{\zeta_0 - \zeta_1}{\sqrt{\zeta_0} + \sqrt{\zeta_1}} = \frac{h_0 + h_1}{\sqrt{\zeta_0} + \sqrt{\zeta_1}}.$$

Подставляя в уравн. (125) этот последний результат а также заменяя $(\Omega_0 + \Omega_1)$ только что полученным выражением, находим окончательно:

$$t = \frac{2\Omega_0 h_0}{\mu\omega\sqrt{2g}(\sqrt{\zeta_0} + \sqrt{\zeta_1})} \quad \dots\dots\dots\dots (129)$$

Это выражение остается справедливым также при $\zeta_1 = \zeta_0$; уравнение (125) при этом условии не даст никакого результата.

Также, как и при вытекании на воздух, введем понятия о среднем напоре H_c и среднем расходе Q_c. Эти величины определяются равенствами:

$$Q_c . t = W \qquad Q_c = \mu\omega\sqrt{2gH_c},$$

где W — объем жидкости, вытекшей из левого сосуда за время t при изменении напора с ζ_0 до ζ_1; $W = \Omega_0 h_0 = \Omega_1 h_1$. Из этих равенств следует:

$$t = \frac{\Omega_0 h_0}{\mu\omega\sqrt{2gH_c}}.$$

Сравнивая это выражение с выражением (129), находим:

$$\sqrt{H_c} = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\zeta_0} + \sqrt{\zeta_1}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots (130)$$

$$Q_c = \mu\omega\sqrt{2g} \cdot \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\zeta_0} + \sqrt{\zeta_1}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots (131)$$

Эти выражения тожественны с полученными в § 31 для случая вытекания на воздух. Уравнение (125) дает зависимость между t и переменной ζ_1; эта зависимость параболическая. Это уравнение можно переписать так, если обозначить $b = \frac{T}{\sqrt{\zeta_0}}$:

$$t = T - b\sqrt{\zeta_1}; \text{ отсюда } (T - t)^2 = b^2\zeta_1.$$

Полагая

$$(T - t) = x, \text{ имеем: } x^2 = b^2\zeta_1.$$

По оси X откладываем t (черт. 122), а по оси Z—значения ζ_1. Искомая парабола есть ACB с вершиною в C и с осью параллельной оси Z; при этом $OC = T$ и $OA = \zeta_0$. Тогда время t, соответствующее изменению ζ_0 до ζ_1, равно $OE = DH$.

§ 34. Наполнение и опорожнение шлюзных камер. Применим формулы, полученные в §§ 31 и 33, к определению времени, необходимого для наполнения и опорожнения шлюзных камер, устраиваемых в шлюзах на судоходных каналах или реках.

Судоходные каналы состоят из *бъефов* (очень длинных, но узких резервуаров, с горизонтальною поверхностью воды) и частей соединительных между бьефами, называемых *шлюзами*. Устройство шлюзов необходимо потому, что горизонты в двух смежных бъефах разнятся на высоту (падение), которая может составлять несколько метров. Впервые шлюз был построен *Ф. Висконти* в 1439 г. около Милана.

Шлюз состоит из одной или нескольких камер, отделенных друг от друга а также и от бъефов шлюзными воротами. Внизу ворот помещены щитовые отверстия *aa* (черт. 123), открываемые и закрываемые особыми механизмами. Открывая или закрывая эти отверстия, можем наполнять и опорожнять камеры. Сверх этого в стенах шлюза устраиваются особые каналы, при помощи которых можно значительно ускорить наполнение и опорожнение камер.

Положим, что судно опускается из верхняго бъефа в нижний бъеф через однокамерный шлюз и пусть судно подходит вплотную к шлюзу.

Тогда открывают отверстия в верхних шлюзных воротах и в каналах, соединяющих камеру с верхним бъефом, и наполняют камеру, так что горизонты в камере и верхнем бъефе сравниваются через несколько минут. После этого верхние ворота открываются, и судно втягивается в камеру. Далее ворота закрываются; отверстия, только что открытые, также закрываются. Теперь необходимо сравнять горизонты воды в камере и нижнем бъефе. Для этого открываются отверстия в нижних шлюзных воротах а также в каналах, соединяющих камеру с нижним бъефом; вода из камеры выпускается в нижний бъеф, и когда горизонты их сравняются, то ворота открываются и судно вытягивается из камеры в нижний бъеф. Если шлюз двухкамерный, то судно из верхнего бъефа вводится в верхнюю камеру тем же порядком, а затем из этой камеры вода выпускается в нижнюю камеру через отверстия в средних шлюзных воротах и через каналы, соединяющие обе камеры, и когда горизонты в них сравняются, то судно переводится в нижнюю камеру, из которой оно проводится в нижний бъеф вышеуказанным порядком. Отсюда видно, что для определения времени пропуска судна через шлюз необходимо знать: 1) время наполнения верхней камеры из верхнего бъефа; 2) время опорожнения нижней камеры в нижний бъеф и 3) время сравнения горизонтов в обеих камерах.

1) Время наполнения шлюзной камеры из верхнего бъефа должно быть разделено на 3 промежутка: *первый* соответствует вытеканию на воздух под постоянным напором h_2 (черт. 123); *второй*—вытеканию под переменным напором, при чем горизонт в камере поднимается от

нижней горизонтальной грани щитового отверстия до верхней грани; если высота всего отверстия w, а высота незатопленной части x, то вытекание через затопленную часть отверстия происходит под водою и при напоре равном $(h_2 - \frac{1}{2}w) + x$, а вытекание через незатопленную часть отверстия—на воздух и под напором $(h_2 - \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}x)$; *третий* промежуток соответствует вытеканию через затопленное отверстие и под напором изменяющимся от $(h_2 - \frac{1}{2}w)$ до 0, когда горизонты в камере и верхнем бъефе сравняются. Но для большей простоты в вычислениях можно принять два промежутка: *первый* t_1 при поднятии горизонта на h_1 с mn до $m'n'$, при чем происходит вытекание на воздух под напором h_2; *второй* t_2—когда горизонт в камере повышается на h_2 с $m'n'$ до $m''n''$; здесь имеет место вытекание под водою и при напоре, изменяющемся от h_2 до 0. Также для упрощения будем рассматривать только щитовые отверстия в воротах; наполнение же камеры помощью каналов пока рассматривать не будем. Пусть ω—площадь щитового отверстия; n—число этих отверстий; Ω_1—горизонтальное сечение камеры, которое принимаем постоянным по всей высоте камеры. Величина первого промежутка времени t_1 найдется из равенства расходов за этот промежуток, а именно:

$$Qt_1 = \mu n \omega \sqrt{2gh_2}\, t_1 = \Omega_1 h_1,$$

отсюда

$$t_1 = \frac{\Omega_1 h_1}{\mu n \omega \sqrt{2gh_2}}.$$

Для определения t_2 нужно взять уравн. (128) в § 33, в котором очевидно следует принять: $\zeta_0 = h_2$ и $\zeta_1 = 0$; тогда

$$t_2 = \frac{2\,\Omega_1}{\mu n \omega} \sqrt{\frac{h}{2g}}.$$

Таким образом время наполнения камеры равно:

$$T = t_1 + t_2 = \frac{\Omega_1 (h_1 + 2h_2)}{\mu n \omega \sqrt{2gh_2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (132)$$

2) Опорожнение шлюзной камеры в нижний бъеф происходит обыкновенно через затопленное отверстие (черт. 124) и горизонт mn понижается до $m'n'$. В этом случае время T_1, необходимое для сравнения горизонтов в камере и нижнем бъефе, получится из уравн. (127) в § 33, в котором нужно положить $\zeta_0 = h$ и $\zeta_1 = 0$; находим:

$$T_1 = \frac{2\Omega_1}{\mu n \omega} \sqrt{\frac{h}{2g}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (133)$$

3) Сравнение горизонтов в камерах. Здесь могут быть два случая: первый случай имеет место, когда щитовые отверстия находятся под водой, и второй—когда эти отверстия не затоплены.

В *первом* случае горизонт в левой камере (черт. 125) понижается с mn до $m''n''$, а в правой повышается с p_0q_0 до $p''q''$. Воспользуемся формулой (125) в § 33; в ней надо принять $\zeta_0=h$ и $\zeta_1=0$, а также положить $\Omega_0=\Omega_1$, так как сечения камер одинаковы; тогда получается

$$T_2=\frac{\Omega_1}{\mu n\omega}\sqrt{\frac{h}{2g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (134)$$

Во *втором* случае для упрощения лучше всего разделить все время на два промежутка. Первый промежуток t_1 соответствует поднятию горизонта в правой камере на h_1 до центра тяжести отверстия, т.-е. с pq до $p'q'$; пусть при этом горизонт в левой камере понизился от h_2 до x, т.-е. с mn до $m'n'$; тогда по уравн. (110) в § 31 найдем:

$$t_1=\frac{2\Omega_1}{\mu n\omega\sqrt{2g}}\left\{\sqrt{h_2}-\sqrt{x}\right\}.$$

В течение второго промежутка t_2 вытекание происходит через затопленное отверстие и разность горизонтов в камерах изменяется от x до 0; при этом в левой камере горизонт понижается с $m'n'$ до $m''n''$, а в правой—повышается с $p'q'$ до $p''q''$; по уравн. (125) в § 33 находим:

$$t_2=\frac{\Omega_1}{\mu n\omega}\sqrt{\frac{x}{2g}}.$$

Итак, во втором случае время T_2 получается:

$$T_2=t_1+t_2=\frac{2\Omega_1}{\mu n\omega\sqrt{2g}}\left\{\sqrt{h_2}-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (135)$$

Высота x определяется из равенства объемов:

$$\Omega_1(h_2-x)=\Omega_1 h_1; \quad \text{откуда} \quad x=h_2-h_1.$$

Время поднятия щитов. В предыдущих выводах предполагалось, что время поднятия щитов, закрывающих выпускные отверстия, весьма мало, а потому вытекание рассматривалось происходящим все время через полное отверстие. В действительности время, необходимое для подъема щитов, оказывается не очень малым, сравнительно с временем наполнения или опорожнения шлюзной камеры. Так, напр., при высоте отверстия в 2 фута и при напоре в 9 футов, это время может доходить до 40 секунд, и при бóльших напорах до 1 минуты; все время наполнения или опорожнения составляет 5—7 минут. Очевидно, при

таких условиях в первое время вытекание происходит лишь через часть отверстия. Инженер *Августовский* доказал, что истинное время наполнения или опорожнения равно теоретическому, выведенному нами выше, увеличенному на половину времени, потребного на подъем щитов. Величина этого времени зависит от устройства щитов и механизмов, приводящих их в действие.

Полное время проводки судна из верхнего бъефа в нижний определится, если ко времени, потребному для наполнения или опорожнения камер, прибавить: время для ввода судна из верхнего бъефа в камеру и для вывода из камеры; время, необходимое для открывания и закрывания ворот, и время для подвода судна к шлюзу по шлюзовому каналу, а также для отвода его от шлюза.

В предыдущих расчетах предполагалось, что площадь $n\omega$ щитовых отверстий задана и требовалось определить время наполнения и опорожнения шлюзной камеры. Эту задачу приходится решать для шлюза уже выстроенного. Если же шлюз проектируется, то надо сперва определить площадь щитовых отверстий $n\omega$; она вычисляется по допускаемой средней скорости w вертикального перемещения судна в камере; эта скорость берется в пределах от 0,006 до 0,025 м. в секунду в зависимости от величины судна. Если разность горизонтов в камере и нижнем бъефе равна h, то время опускания T судна на высоту h, т.-е. время опорожнения камеры, определится из равенства:

$$w.T = h \quad \text{или} \quad T = \frac{h}{w}.$$

Но только что было найдено (уравн. 133), что это время равно:

$$T = \frac{2\Omega_1}{\mu n\omega}\sqrt{\frac{h}{2g}}, \text{ сравнивая, находим: } n\omega = \frac{2\Omega_1 w}{\mu\sqrt{2gh}}.$$

Время ввода и вывода судна из камеры определяется по допускаемой скорости движения судна по горизонтальному направлению, которая равна при подходе судна от 0,3 до 0,45 м., а при выходе судна около 0,75 м. в секунду.

Как пример приведем, что при расчете шлюзов на р. С. Донце принимались следующие данные для времени, потребного на проход судна через шлюз, а именно: для запирания и открывания ворот по 4 минуты; для открывания и закрывания щитовых отверстий по 1 м.; для наполнения и опорожнения камеры по 7 м.; вводка судна в камеру и выводка его из камеры по 8 м. При этом предполагалось, что шлюзы имеют, кроме отверстий в воротах, также каналы в стенах, что значительно сокращает время опорожнения и наполнения камер.

Что касается *коэф. расхода* μ при наполнении и опорожнении шлюзных камер, то довольно затруднительно дать для него достаточно точную величину, так как вытекание происходит при переменном напоре на воздух и в воду; кроме того, величина и обделка выпускных отверстий также могут влиять довольно сильно на величину этого коэффициента. Опыты *Кипке* над шлюзом Бромбергского канала дали в среднем $\mu = 0{,}63$; опыты *Добюиссона* над шлюзами Лангедокского канала дали в среднем $\mu = 0{,}55$. Заслуживают внимания опыты инженера *Августовского* над старыми шлюзами Мариинской водной системы. Из этих опытов получается, что: а) при вытекании в воду и при изменении напора от 0,3 ф. до 10 ф. коэф. μ изменяется от 0,47 до 0,68; б) при вытекании на воздух при постоянном напоре в пределах от 6 ф. до 7,6 ф. коэф. μ изменяется от 0,58 до 0,63. По *Збожеку* лучше брать для расчетов коэф. $\mu = 0{,}55$. В виду недостаточности опытного материала необходимо производство новых опытов, что не может представлять каких-либо затруднений для инженеров, заведующих шлюзами.

Глава IV. Вытекание через водосливы.

§ 35. Вытекание через прямоугольный водослив. Если в каком-либо канале устроить высокую поперечную стенку и в ней сделать прямоугольный вырез, то вода будет переливаться из канала через этот вырез и получается прямоугольный водослив (черт. 126*a*). Нижняя горизонтальная грань выреза называется *порогом* водослива; длина самой грани есть *длина* порога, а ширина грани—называется *шириной* порога. Порог может быть узким в виде острого ребра, а также более или менее широким, закругленным и т. п. Стенки и дно канала обыкновенно находятся в некотором расстоянии от соответственных ребер выреза; расстояние стенок будем обозначать L и L'; обыкновенно $L = L'$; расстояние дна канала до порога обозначим через G. Вырез может быть треугольным, трапецоидальным и т. п.

Поверхность воды в канале перед водосливом постепенно понижается по мере подхода к ребру водослива, образуя кривую *mn*, обращенную выпуклостью кверху. Вода, подходящая снизу к порогу, в случае очень тонкого порога поднимается кверху, а затем опускается вниз, образуя кривую *acd*. Вертикальное сечение струи *cc'*, проведенное через высшую точку этой кривой, можно рассматривать как *сжатое* сечение водосливной струи. При широком пороге (черт. 126*b*) струя поднимается от *a* к *c*, а затем опускается от *c* к *d*, образуя полость *v*, наполненную

жидкостью в состоянии, близком к покою, подобно тому, что наблюдается в насадках. Сверху вода имеет вид кривой $mc'n$ с перегибом в c'. Сечение cc' соответствует внутреннему сжатому сечению в насадках.

По выходе из водосливного отверстия струя сжимается с боков, снизу и сверху; при этом струя сильно изменяет свой вид; сжатое сечение cc' можно принимать приблизительно за прямоугольное.

Возвышение H поверхности воды m над порогом водослива a называется *напором* водослива. Измерение напора H надо делать в таком расстоянии от порога, при котором поверхность воды можно принять горизонтальной; для больших водосливов это расстояние равно 1,5 — 2 метра, для небольших водосливов—около 1 м.

Водосливы устраиваются с двоякою целью: или для водоизмерения не очень больших масс воды, напр., небольших речек, каналов и т. п., или для пропуска вод наподобие щитового отверстия. В этом курсе водосливы рассматриваются только как сооружения для водоизмерения, что особенно важно при устройстве водяных двигателей (колес, тюрбин, насосов и т. п.), орошения и вообще во всех тех случаях, где требуется *точное* определение расхода воды.

Формула Дюбюа. В § 31 были выведены формулы Дюбюа и Вейсбаха для прямоугольных водосливов; мы их получили, рассматривая вытекание через прямоугольное отверстие в тонкой стенке и полагая, что напор над верхним ребром отверстия равен нулю; здесь, следоват., водослив рассматривается как предельный случай отверстия. Покажем другой вывод формулы Дюбюа независимо от случая отверстия и с этою целью рассмотрим водослив с острым порогом (черт. 127) и с полным сжатием струи. Полное сжатие струи получается, когда расстояния L и L' вертикальных граней водослива от боковых стенок канала, а также расстояние G горизонтального порога водослива от дна канала довольно значительны сравнительно с напором H, напр., больше $3H$. Струя сверху имеет вид кривой M_0ci, а снизу—вид кривой fbg; высшая точка этой кривой есть b, а вертикальное сечение bc есть сжатое сечение. Как и в случае вытекания через отверстие, сжатое сечение водосливной струи характеризуется тем, что ед. давления в bc и во всех точках струи, лежащей вправо от этого сечения, равны атмосферному p_0. Возьмем линию тока $M_0'M$ и применим к ней теорему Д. Бернулли; имеем:

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g} + (h'' - h_0'') \underset{M_0'M}{=} \left(z_0' + \frac{p_0'}{\Delta}\right) - \left(z + \frac{p}{\Delta}\right).$$

Здесь по гипотезе $p=p_0$, так как M лежит в сжатом сечении; начальная скорость V_0 весьма мала сравнительно с V_p, потому что предполагаем, что живое сечение канала довольно значительно по сравнению с сжатым сечением. В живом сечении канала, проходящем через точку M_0', скорости можно считать нормальными к сечению, а следоват. параллельными между собою; поэтому на основании § 17 ед. давления в этом сечении распределяются по гидростатическому закону, т.-е.

$$z_0'+\frac{p_0'}{\Delta}=z_0+\frac{p_0}{\Delta}.$$

Затем принимаем, что

$$(h''-h_0'')=\zeta\frac{V_p^2}{2g},$$

где ζ — коэф. сопротивления. Тогда обозначая $(z_0-z)=y$, находим из предыдущего равенства:

$$V_p=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta}}\sqrt{2gy}=\varphi\sqrt{2gy}\ \ldots\ldots\ldots\ (136).$$

Здесь $\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta}}$ представляет коэф. скорости на том же основании, как для отверстий в тонкой стенке и для насадок. Это выражение для V_p представляет параболическую зависимость между скоростью V_p и ординатой y; вершина параболы dmn лежит в точке d, и ось параболы — это прямая de; параметр ее $2p=2g\varphi^2$. Скорости в точках c и b суть cm и bn.

По известному распределению скоростей в сжатом сечении можно определить расход Q. Для упрощения можно представить сжатое сечение в виде прямоугольника $bb'cc'$ (черт. 127); расстояния горизонтальных линий bb' и cc' от поверхности dd' в точке M_0 равны: $cd=y_1=\alpha_1 H$; $bd=y_2=\alpha_2 H$; ширина сжатого сечения $bb'=\beta\ a$; здесь a — длина водослива, а коэф. α_1; α_2; β суть правильные дроби. Сжатое сечение разбивaем горизонтальными линиями на элементарные площадки $d\omega=\beta a\cdot dy$. Элементарный расход dQ, соответствующий этой площадке, выразится так:

$$dQ=V_p.d\omega=\varphi\beta a\sqrt{2gy}\ dy$$

Следоват.

$$Q=\varphi\beta a\sqrt{2g}\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{y}\ dy=\frac{2}{3}\varphi\beta a\sqrt{2g}\left(y_2^{3/2}-y_1^{3/2}\right)$$

Заменив y_1 и y_2 величинами им равными, получим:

$$Q=\frac{2}{3}\varphi\beta\left(\alpha_2^{3/2}-\alpha_1^{3/2}\right)a\sqrt{2g}\ H^{3/2}\ \ldots\ldots\ (137).$$

Количество $\varphi . \beta \left(\alpha_2^{3/2} - \alpha_1^{3/2}\right)$ есть произведение из коэф. скорости φ на коэффициенты $\beta; \alpha_1; \alpha_2$, характеризующие сжатие струи. Поэтому по анологии с тем, что при вытекании через отверстие произведение $\alpha\varphi$ мы назвали коэф. расхода, можем и здесь вышеозначенное произведение рассматривать как коэф. расхода и следоват. положить:

$$\varphi . \beta \left(\alpha_2^{3/2} - \alpha_1^{3/2}\right) = \mu.$$

Тогда окончательно получается известная формула *Дюбюа*:

$$Q = \frac{2}{3} \mu a \sqrt{2g}\, H^{3/2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (138)$$

Базен непосредственным опытом доказал, что ед. давления в сжатом сечении очень близки к атмосферному и таким образом сделанная нами выше гипотеза подтверждается. Более точная теория водосливов дана *Буссинеком*. Опыты Базена и теоретические выводы Буссинека хорошо согласуются между собою, что видно из нижеследующей таблицы.

Значения величин.	По опытам Базена.	По теории Буссинека.
Понижение воды $c'd'$ на пороге	$0{,}15H$	—
Высота сжатого сечения bc	$0{,}668H$	$0{,}667H$
Высота подъема be струи снизу	$0{,}112H$	$0{,}111H$
Понижение струи в сжат. сечении cd . . .	$0{,}22H$	$0{,}222H$
Расстояние fe сжатого сечения.	$0{,}25H$	—
Ордината es	$0{,}34H$	$0{,}375H$
Отношение скоростей в точках c и b. . . .	0,5	0,47
maxim. $\left(\frac{p - p_0}{\Delta}\right) = ss'$	$0{,}18H$	$0{,}19H$

Базен построил особый прибор для определения скоростей и давлений в различных точках сжатого сечения струи. Высоту превышения давления p над атмосферным p_0, т.-е. величину $\left(\frac{p - p_0}{\Delta}\right)$, Базен откладывал в соответственных точках вправо от сечения bc, как это показано на черт. 127, если она была больше 0, и влево, если она была меньше 0, и получил кривую $bs'c$. Наибольшая ордината ss' и расстояние es точки сечения s показаны в вышеприведенной таблице. Откладывая затем скорости в различных точках сечения полученные им из опыта, Базен построил кривую скоростей mqn. Для крайних точек се-

чения b и c давления равны атмосферному, а скорости равны теоретическим значениям em и bn; в других же точках давления и скорости отличаются вообще немного от теоретических.

О скорости подхода. Скорость, с которою вода подходит к водосливу, называется скоростью подхода. В предыдущем выводе было предположено, что скорость подхода V_0 весьма мала сравнительно с V_p; пренебрегая ею, мы получили формулу Дюбюа. Если скоростью V_0 пренебрегать нельзя, то, рассуждая так же как и выше, найдем, что скорость в какой-либо точке сжатого сечения равна:

$$V_p = \varphi \sqrt{2g\left(y + \frac{V_0^2}{2g}\right)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (139)$$

а расход водослива равен:

$$Q = \frac{2}{3}\mu a\sqrt{2g}\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2} = \frac{2}{3}\mu a\sqrt{2g}\; h^{3/2} \quad \ldots \ldots \ldots (140)$$

где $h = \left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)$; следоват., h есть напор водослива, исправленный на скорость подхода. Далее будем называть выражение (140) *обобщенной формулой Дюбюа.* В § 24 была выведена для водослива со скоростью подхода V_0 следующая формула *Вейсбаха*:

$$Q = \frac{2}{3}\mu a\sqrt{2g}\left\{\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right\} = \frac{2}{3}\mu a\sqrt{2g}\; h^{3/2} \quad \ldots (141).$$

Здесь h представляет напор исправленный на скорость подхода; величина его очевидно определяется равенством:

$$h^{3/2} = \left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (142).$$

Если здесь пренебречь вычитаемым по его малости сравнительно с уменьшаемым, то получается обобщенная формула Дюбюа. Известный американский гидравлик *Френсис* определял расходы по формуле Вейсбаха, принимая $V_0 = V$ — средней скорости в канале. Если живое сечение в канале обозначить через Ω_0, то:

$$V = \frac{Q}{\Omega_0}.$$

Другой американский гидравлик *Г. Смитз* пользовался обобщенной формулой Дюбюа, полагая, что:

$$V_0 = \sqrt{b} \cdot V = \sqrt{b}\,\frac{Q}{\Omega_0};$$

следоват. по Смитзу напор исправленный на скорость подхода выражается так:

$$h = H + \frac{b V^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (142\ a).$$

где коэф. b имеет следующие значения:

$b = 1{,}4$ для водосливов с полным сжатием струи;
$b = 1{,}33$ „ „ „ сжатием только снизу;
$b = 1$ „ „ без всякого сжатия.

Водосливы с неполным и несовершенным сжатием. Полное сжатие водосливной струи, т.-е. сжатие с двух боков и снизу получается в том случае, когда вышеупомянутые расстояния L, L' и G по отношению к напору H или длине порога a довольно велики, напр., когда они равны или больше $3H$ при $H < a$, или когда они равны или больше $3a$ при $H > a$. Если $L = 0$, т.-е. вертикальное ребро водослива придвинуто совершенно к стенке канала, то с этой стороны сжатие струи не проявляется; также и вслучае $L' = 0$. Если одновременно $L = 0$ и $L' = 0$, то не проявляется сжатие струи с двух сторон. При $G = 0$ дно канала находится в уровне порога водослива, а потому не проявляется сжатие струи снизу; вследствие этого не будет и подъема be (черт. 127). Водосливы подобного устройства называются водосливами с *неполным сжатием*. Во всех этих случаях скорость V_p выражается так же как и при полном сжатии струи, т.-е. по форм. (136) без начальной скорости или по форм. (139) с начальною скоростью. Но при устранении сжатия с одного или с двух боков, с одного бока и снизу площадь сжатого сечения увеличивается, почему увеличивается и расход Q. Этот увеличенный расход определяется по форм. Дюбюа (138) — без начальной скорости, и по форм. Вейсбаха или по обобщенной формуле Дюбюа — с начальною скоростью совершенно так, как и при полном сжатии струи, но с *увеличенным* коэф. расхода μ. Если через μ_0 обозначить коэф. расхода для водослива с полным сжатием (т.-е. коэффициент в вышеприведенных формулах обозначенный через μ), а через μ_e — коэф расхода для водослива с неполным сжатием, то зависимость между этими коэффициентами можем быть выражена следующей формулой *I. Смитза*:

$$\mu_e = \mu_0 \left(1 + m \frac{s}{p}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (143).$$

где p — смачиваемый периметр водосливного отверстия (рассчетный, а не действительный), именно: $p = a + 2h$, где a длина порога и h — напор водослива исправленный на скорость подхода, если она приньи

мается во внимание, и $h = H$, когда скорость подхода можно пренебречь; s — периметр, на котором нет сжатия; напр. при неполном сжатии с двух боков, т.-е. при сжатии только снизу $s = 2h$; m — коэффициент в среднем равный 0,16. Эта формула вполне совпадает с формулой (64) в § 26 для неполного сжатия струи при вытекании через отверстие.

Если вертикальные ребра водослива отстоят от стенок довольно близко, напр. L или L' равно напору H, то сжатое сечение струи также увеличивается, а потому увеличивается и расход Q. Подобное же явление наблюдается и тогда, когда порог расположен довольно близко к дну канала. Такие водосливы называются водосливами с *несовершенным сжатием.* Скорость V_p и расход Q определяются по тем же самым формулам как и при полном сжатии, но с *увеличенным* коэф. расхода. Обозначим через μ_p — коэф. расхода при несовершенном сжатии; тогда между μ_p и μ_c получается такая зависимость:

$$\mu_p = \mu_c\left(1 + n\frac{c}{p}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (144).$$

Здесь μ_c и p — те же обозначения, что и выше; c — периметр, на котором проявляется несовершенное сжатие; n — коэффициент изменяющийся в пределах от 0 до 0,16 в зависимости от расстояния d бокового ребра водослива до стенки канала (или соответственно : от расстояния порога водослива до дна канала). Для определения n назовем : через M — наименьшее измерение водослива, т.-е. длину a или исправленный напор h (или H); через e — наименьшее из расстояний d (т.-е. или расстояние какого-либо бокового ребра водослива от стенки канала, или расстояние порога водослива от дна канала). Из опытов *Лебро* и *Френсиса* получается:

при . . . . $\frac{e}{M} =$	3	2	1	0,5	0
коэффициент $n =$	0	0,005	0,025	0,06	0,16.

Отсюда видно, что если вертикальные ребра водослива и порог его отстоят от соответственных частей канала на расстояние $e = 2M_1$, т.-е. на расстояние в два раза больше наименьшего измерения водослива, то $c = p$; $n = 0{,}005$ и $\mu_p = 1{,}005\,\mu_c$ или на 0,5% больше, чем при полном сжатии струи. Затем также видно, что при $e = 3M$ получается $n = 0$; следоват. при удалении вертикальных ребер и порога водослива от соответственных частей канала на расстояние в три раза большее наименьшего измерения водослива никакого увеличения коэф. расхода не наблюдается и $\mu_p = \mu_c$. Вышеприведенная формула аналогична полу-

ченной нами выше в § 26 формуле (64), неполного сжатия при вытекании через отверстия.

В водосливах, так же как и при отверстиях, приближение порога к дну канала влияет сильнее на величину μ_p, чем приближение вертикальных граней водослива к стенкам канала. При очень малых напорах, напр. при $h = 3$ до 6 сантим. порог водослива должен отстоять от дна не менее как на расстояние G равное $4h$ до $5h$ для того, чтобы влияние дна не отражалось на коэффициенте расхода. Таким образом коэф. расхода для неполного и несовершенного сжатия, т.-е. μ_s и μ_p определятся по форм. (143 и 144), коль скоро будет известен коэф. расхода при полном сжатии, т.-е. μ_c.

§ 36. О коэффициентах расхода для водосливов. Опыты по определению коэф. расхода μ_c при полном сжатии были произведены многими гидравликами:: *Понселе* и *Лебро; Френсисом*; *Г. Смитзом; Фтили* и *Стирнсом.* и мн. др. Результаты этих опытов можно представить графически следующим образом: по оси X откладываем напоры H или напоры h исправленные на скорость подхода, а по оси Y значения коэф. μ_c, соответствующие этому напору и для водослива данной длины a. Таким образом получены кривые коэф. расхода μ_c, изображенные на черт. 128; эти кривые носят обозначения I; II . . . XI и соответствуют водосливам с длиною a равною 0,66; 1; 2; 2,6; 3; 4; 5; 7; 10; 15 и 19 футов. Эти кривые мы будем называть кривыми Г. Смитза для коэф. μ_c. На этом чертеже для большого удобства показаны значения μ_c, начиная с 0,59. Из рассмотрения этих кривых можно сделать следующие заключения.

а) Если рассматривать какую-либо из этих кривых, то увидим, что с увеличением напора коэфициент μ_c неопределенно уменьшается; каждая из кривых подходит ассимптотически к линии параллельной оси Y.

б) Рассматривая все кривые в совокупности, находим, что при одном и том же напоре коэф. μ_c увеличивается с увеличением длины порога a, но не безпредельно; для водосливов очень большой длины кривые коэффициентов μ_c подходят к кривой XII, которая представляет кривую коэф. μ_c при $a = \infty$; эта кривая при $h > 0{,}8$ фут. обращается в прямую параллельную оси X. Кривая XII дает значения коэффициентов расхода, которые обозначены через μ_i; при $h \gtreqless 0{,}8$ ф. получается $\mu_i = 0{,}614$.

Вышеизложенное относится к водосливам, длина которых не менее 0,5 фут.; для более коротких водосливов получается другой закон изменения коэф. μ_c, как это показали опыты *Лебро* и *Кастеля*.

Кривые коэффициентов расхода μ_s при неполном сжатии. На том же чертеже 128 нанесены кривые коэффициентов μ_s для водосливов, в которых сжатие имеется только снизу; эти кривые обозначены нумерами XIII; XIV,.. XX и соответствуют водосливам, длина которых равна соответственно: 19; 15; 10; 7; 5; 4; 3 и 2 фут. Эти кривые будем называть кривыми Г. Смитза для коэф. μ_s. Характер этих кривых совершенно иной, чем кривых для коэф. μ_c. Из рассмотрения этих кривых приходим к следующим выводам.

а) Если рассматривать кривую μ_s для какого-либо водослива, то оказывается, что с увеличением напора h коэф. μ_s сперва уменьшается до некоторого *minimum'a*, а затем неопределенно увеличивается.

б) С увеличнием длины водослива a при одном и том же h коэф. μ_s уменьшается, но не беспредельно; для водосливов очень большой длины кривые μ_s подходят к кривой XII, которая представляет кривую коэффициентов μ_s при $a = \infty$.

в) При очень большой длине водослива коэффициенты расхода при полном сжатии и при сжатии только снизу, т.-е. μ_c и μ_s получаются одинаковыми, что и понятно, так как сжатие с боков должно сильно отражаться только при коротких водосливах.

г) Кривая XII представляет кривую коэффициентов μ_i для водосливов, в которых нет сжатия с *одного* бока. Таким образом для этих водосливов длина a не влияет на μ_i, а влияет только напор h. Эти водосливы, по отношению к величине коэффициента расхода, являются *предельными* для водосливов с полным сжатием и с сжатием только снизу.

Таблицы Г. Смитза коэффициентов расхода для водосливов. Эти таблицы VI и VII составлены *Г. Смитзом* на основании всего опытного материала известного в технической литературе. В них приведены численные значения коэф. расхода для водослив с полным сжатием (μ_c) и с сжатием снизу (μ_s) при длине порога от 0,66 до 19 футов и при напорах от 0,1 до 1,7 футов, а также значения коэф. расхода при сжатии снизу и с одного бока μ_i) при тех же напорах. При помощи этих таблиц или вышеприведенных кривых Г. Смитза можно найти коэф. расхода для всякого напора h и для всякой длины a, лишь бы величины h и a не выходили из пределов таблицы или чертежа. Данные таблиц вполне согласуются с кривыми, показанными на чертеже 128.

Таблица VI Г. Смитза

коэффициентов расхода μ_c для водосливов с полным сжатием.

Напор H или h		Коэф. расхода μ_c для водосливов с *полным* сжатием при длине $a =$										
Футы.	Метры.	0,66 0,201	1 0,305	2 0,610	2,6 0,792	3 0,914	4 1,219	5 1,524	7 2,134	10 3,048	15 4,572	19 фут. 5,791 м.
		Коэффициенты увеличены в 1000 раз.										
0,10	0,030	632	639	646	650	652	653	653	654	655	655	656
0,15	0,046	619	625	634	637	638	639	640	640	641	642	642
0,20	0,061	611	618	626	629	630	631	631	632	633	634	634
0,25	0,076	605	612	621	623	624	625	626	627	628	628	629
0,30	0,091	601	608	616	618	619	621	621	623	624	624	625
0,40	0,122	595	601	609	612	613	614	615	617	618	619	620
0,50	0,152	590	596	605	607	608	610	611	613	615	616	617
0,60	0,183	587	593	601	604	605	607	608	611	613	614	615
0,70	0,213	585	590	598	601	603	604	606	609	612	613	614
0,80	0,244	583	587	595	598	600	602	604	607	611	612	613
0,90	0,274	—	—	592	596	598	600	603	606	606	611	612
1,00	0,305	—	—	590	593	595	598	601	604	608	610	611
1,10	0,335	—	—	587	591	593	596	599	603	606	609	610
1,20	0,366	—	—	585	589	591	594	597	601	605	608	610
1,30	0,396	—	—	582	586	589	592	596	599	604	607	609
1,40	0,427	—	—	580	584	587	590	594	598	602	606	609
1,50	0,457	—	—	—	582	585	589	592	596	601	605	608
1,60	0,488	—	—	—	580	582	587	591	595	600	604	607
1,70	0,518	—	—	—	—	579	585	590	594	599	603	607

Таблица VII Г. Смитза

коэффициентов расхода μ_s для водосливов с сжатием только снизу и коэф. расхода μ_i при сжатии снизу и с одного бока.

Напор H или h.		Сжатие снизу и с одного бока μ_i.	Коэф. расхода μ_s для водосливов со сжатием только снизу при длине $a =$								
Футы.	Метры.		19 5,791	15 4,572	10 3,048	7 2,134	5 1,524	4 1,219	3 0,914	2 0,610	0,66 фут. 0,201 м.
			Коэффициенты увеличены в 1000 раз.								
0,10	0,030	656	657	657	658	658	659	—	—	—	675
0,15	0,046	643	643	644	644	645	645	647	649	652	662
0,20	0,061	635	635	636	637	637	638	641	642	645	656
0,25	0,076	629	630	631	632	633	634	636	638	641	653
0,30	0,091	625	626	627	628	629	631	633	636	639	651
0.40	0,122	620	621	622	623	625	628	630	633	636	650
0,50	0,152	617	619	620	621	624	627	630	633	637	650
0,60	0,183	616	618	619	620	623	627	630	634	638	651
0,70	0,213	615	618	619	620	624	628	631	635	640	653
0,80	0.244	614	618	620	621	625	629	633	637	643	656
0,90	0,274	614	619	620	622	627	631	635	639	645	—
1,00	0,305	614	619	621	624	628	633	637	641	648	—
1,10	0,335	614	620	622	625	630	635	639	644	—	—
1,20	0,366	614	620	623	626	632	636	641	646	—	—
1,30	0,396	614	621	624	628	633	638	643	648	—	—
1,40	0,427	614	622	625	629	634	640	644	—	—	—
1,50	0,457	614	622	625	630	636	641	645	—	—	—
1,60	0,488	614	623	626	631	637	642	647	—	—	—
1,70	0,518	614	623	626	632	633	—	—	—	—	—

§ 37. Наиболее употребительные формулы для расхода через водослив. Выше указан способ точного определения расхода Q через водослив. При решении многих практических вопросов можно определить Q по эмпирическим формулам, данным различными гидравликами. Приведем главнейшее из этих формул; оне относятся к прямоугольным водосливам с острым порогом в вертикальной стенке и с доступом воздуха между ниспа щей струей и стенкой.

1) *Формула Френсиса* пользуется особым доверием практиков; она имеет такой вид:

$$Q=\frac{2}{3}\mu_0\Big(1-\qquad\sqrt{2g}\,h^{3/2}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (145).$$

Здесь $\mu_0=0{,}623$ пред авляет коэф. расхода для водослива, имеющего сжатие только снизу; h — напор, исправленный на скорость подхода и определяемый равенством (142) в § 35; коэффициент:

$k=0{,}2$ для водосливов с полным сжатием, т.-е. снизу и с 2 боко
$k=0{,}1$ „ „ „ сжатием снизу и с 1 бока;
$k=0$ „ „ „ „ только снизу.

Если принять $\sqrt{2g}=8{,}02$, то формула Френсиса для мер в *футах* перепишется в таком виде:

$$Q=3{,}33\left(1-\ \frac{h}{a}\right)a\,h^{3/2}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (146).$$

Формула Френсиса дает результаты хорошо согласующиеся с опытом при $h=0{,}5$ до 2 ф. и при длине порога $a \gtreqless 3h$.

2) *Формула Г. Смитза* имеет такой вид:

$$Q=\frac{2}{3}\mu_0\left(1-k\,\frac{h}{a}\right)a\sqrt{2g}\,h^{3/2}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (147).$$

Здесь $\mu_0=0{,}615$ представляет коэф. расхода для водослива имеющего сжатие снизу и с одного бока; h — напор исправленный на скорость подхода и определяемый равенством (142a) в § 35; коэффициент:

$k=0{,}1$ для водосливов с полным сжатием, т.-е. снизу и с 2 боков;
$k=0$ „ „ „ сжатием снизу и с одного бока;
$k=-\frac{1}{7}$ „ „ „ „ только снизу.

Если принять $\sqrt{2g}=8{,}02$, то эта формула для мер в *футах* представится в таком виде:

$$Q=3{,}29\left(1-k\,\frac{h}{a}\right)a\,h^{3/2}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (148).$$

Пределы применимости этой формулы те же, что и формулы Френсиса.

3) *Формула Брашмана.* Профессор механики Московского университета Брашман предложил пользоваться формулой Дюбюа:

$$Q = \frac{2}{3} \mu a \sqrt{2g} H^{3/2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (138).$$

в которой коэффициент μ он выразил под таким видом:

$$\mu = \alpha + \beta \frac{a}{B} + \frac{\gamma}{H} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (149).$$

Здесь B — ширина канала подводящего воду к водосливу в том месте, где измеряется напор H; величины α; β; γ суть постоянные коэффициенты равные:

для метров: $\alpha = 0{,}5757$; $\beta = 0{,}0580$; $\gamma = 0{,}0085$;
„ футов; $\alpha = 0{,}5757$; $\beta = 0{,}0580$, $\gamma = 0{,}002793$.

Вывод этой формулы Брашман основал на принципе наименьшего действия, а численные значения для коэффициентов α; β и γ он вывел из опытов *Каетеля* над водосливами длиною от 0,33 до 2,43 футов. Эта формула дает результаты, достаточно согласующиеся с опытом за исключением только водосливов, длина которых меньше 0,33 фут.

4) *Формула Базена* для водосливов со сжатием только снизу представляется в таком виде:

$$Q = \frac{2}{3} \mu a \sqrt{2g} H^{3/2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (138).$$

где:

$$\frac{2}{3} \mu = \left(a_1 + \frac{b}{H}\right)\left[1 + c\left(\frac{H}{G+H}\right)^2\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (150).$$

Здесь:

для метров: $a_1 = 0{,}405$; $b = 0{,}003$; $c = 0{,}55$;
„ футов: $a_1 = 0{,}405$; $b = 0{,}0098$; $c = 0{,}55$;
„ саженей: $a_1 = 0{,}405$; $b = 0{,}0014$; $c = 0{,}55$.

Далее H — напор водослива; G — расстояние ребра порога до дна канала. При напоре H в пределах от 0,1 до 0,3 метр. можно вместо предыдущего выражения взять следущее:

$$\frac{2}{3} \mu = 0{,}425 + 0{,}212 \left(\frac{H}{G+H}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (151).$$

Кроме вышеупомянутых формул в технической литературе известны формулы: из прежних — Лебро; Редтенбахера; Буало; Вейсбаха, а из новых — Фтили и Стирнса; Труппа; Фрезе; Кинцера; Векса; Ганзена; Ребока др.

Численный пример. Чтобы показать применение вышеприведенных формул, а также чтобы узнать, на сколько могут разниться между собою

результаты, получаемые как по этим, так и по некоторым другим формулам, приводим определение Q для водослива, для которого по Френсису имеются следующие данные: длина водослива $a = 9{,}995$ ф.; напор $H = 0{,}9791$ ф.; ширина канала $B = 9{,}992$ ф.; высота порога над дном $G = 4{,}6$ ф.; найденный по опыту расход $Q = 32{,}561$ куб. ф.

Этот водослив устроен с острым порогом в вертикальной стенке с доступом воздуха между ниспадающей струей и этою стенкою и с сжатием только снизу.

а) Определяем сперва скорость подхода V_0; сечение канала $\Omega_0 = B(H+G) = 55{,}745$ кв. ф.; тогда $V_0 = \frac{32{,}561}{55{,}745} = 0{,}584$ фут.

б) Напор исправленный на скорость подхода по Смитзу:

$$h = H + b\frac{V_0^2}{2g} = 0{,}9791 + 1{,}33\,\frac{(0.584)^2}{2g} = 0{,}9862 \text{ ф.}$$

в) Напор исправленный на скорость подхода по Френсису:

$$h = \left\{\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right\}^{2/3} = \left\{0{,}9767 - 0{,}0004\right\}^{2/3} = 0{,}9842 \text{ ф.}$$

г) Расход по формуле *Френсиса*:

$$Q = 3{,}33\,a\,h^{3/2} = 3{,}33\cdot 9{,}995\,(0{,}9842)^{3/2} = 32{,}495 \text{ куб. ф.}$$

д) Расход по формуле *Г. Смитза*:

$$Q = 3{,}29\left(1 + \frac{1}{7}\frac{h}{a}\right) a\,h^{3/2} = 3{,}29\left(1 + \frac{1}{7}\frac{0{,}9862}{9{,}995}\right) 9{,}995\,\left(0{,}9862\right)^{3/2} =$$

$$= 32{,}660 \text{ куб ф.}$$

е) Расход по формуле *Брашмана*:

$$Q = \frac{2}{3}\left(\alpha + \beta\frac{a}{B} + \frac{\gamma}{H}\right) a\sqrt{2g}\,H^{3/2} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(0{,}5757 + 0{,}0580 + \frac{0{,}2793}{0{,}9791}\right) 9{,}995\sqrt{2g}\left(0{,}9791\right)^{3/2} = 32{,}959 \text{ куб. ф.}$$

ж) Расход по формуле *Базена*:

$$Q = \left\{0{,}425 + 0{,}212\left(\frac{H}{G+H}\right)^2\right\} a\sqrt{2g}\,H^{3/2} =$$

$$= \left\{0{,}425 + 0{,}212\left(\frac{0{,}9791}{4{,}6 + 0{,}9791}\right)^2\right\} 9{,}995\sqrt{2g}\left(0{,}9791\right)^{3/2} = 33{,}510 \text{ куб. ф.}$$

з) Расход по вышеприведенной *таблице Г. Смитза*: из этой таблицы для $a = 10$ ф. и для $H = 1$ ф. получается $\mu = 0{,}624$; следоват.,

$$Q = \frac{2}{3}\mu a\sqrt{2g}\,h^{3/2} = \frac{2}{3}\cdot 0{,}624\cdot 9{,}995\cdot\sqrt{2g}\cdot\left(0{,}9862\right)^{3/2} = 32{,}660 \text{ куб. ф.}$$

Отсюда видно, что для данного водослива особенно хорошие результаты получаются по формулам: Френсиса (отклонение от результата опыта на 0,2%); Г. Смитза (на 0,3%); Брашмана (на 1,2 %); несколько худшие результаты получаются по форм. Базена (на 2,9%). По таблице Г. Смитза отклонение получается в 0,3%.

§ 38. Водослив с широким порогом. Эти водосливы не применяются для водоизмерения, а только для пропуска вод. Они представляют большой практический интерес, потому что при рассчете каменных труб под высокими железнодорожными насыпями движение воды в трубе рассматривается подобным тому, как в водосливе с широким порогом. Эти водосливы отличаются от предыдущих тем, что порог не представляет острого ребра, а имеет некоторую ширину c, которая должна быть не менее $\frac{2}{3}H$. Порог предполагаем *горизонтальным*. Картина движения воды по такому водосливу следующая. Горизонт воды перед порогом немного понижается; при вступлении на порог это понижение равно ab (черт. 129); далее на пороге понижение достигает наибольшей величины cd; затем поверхность повышается до f; от этой точки и до конца водослива поверхность воды постепенно понижается; на конце водослива понижение ровно $gk = \zeta$. Вертикальное расстояние от порога до горизонта воды в M_0 называется *напором* водослива H по аналогии с обыкновенным водосливом. Частицы, подходящие к порогу снизу, несколько поднимаются над порогом, как показано на чертеже пунктиром, и затем опускаются и движутся вдоль порога. В сечении dd' получается сжатое сечение струи, под которым находится полость с водою в состоянии близком к покою, как при движении воды в цилиндрической насадке.

Для определения скорости и расхода рассмотрим линию тока $M_0'M$. Можно довольно приблизительно считать, что в начальном сечении M_0M_0' и в конечном ki скорости параллельны между собою; тогда согласно § 17 ед. давления в этих сечениях распределяются по гидростатическому закону. Для точки M_0' имеем V_0; z_0'; p_0'; для точки M: V_p; z; p. Уравн. Д. Бернулли представляется так:

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2} + \left(h'' - h_0''\right) = \left(z_0' + \frac{p_0'}{\Delta}\right) - \left(z + \frac{p}{\Delta}\right).$$

Но согласно сделанному предположению получаем:

$$z_0' + \frac{p_0'}{\Delta} = z_0 + \frac{p_0}{\Delta} \text{ и } z + \frac{p}{\Delta} = z' + \frac{p_0}{\Delta}.$$

Затем: $(z_0 - z') = \zeta = gk$. Как и в случае насадок, можно здесь положить, что

$$(h' - h_0') = \zeta_1 \frac{V_p^2}{2g}$$

где ζ_1 — коэф. сопротивления для линии $M_0'M$. Тогда выводим:

$$V_p = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_1}} \sqrt{2g\left(\zeta + \frac{V_0^2}{2g}\right)} = \varphi \sqrt{2g\left(\zeta + \frac{V_0^2}{2g}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (152).$$

Здесь как и в других случаях имеем для коэф. скорости φ:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\zeta_1}} = \varphi \quad \text{и} \quad \zeta_1 = \frac{1}{\varphi^2} - 1.$$

Из выражения (152) видно, что скорость во всех точках конечного сечения ki одинакова, а поэтому расход через это сечение равен:

$$Q = a\left(H - \zeta\right) \cdot V_p = \varphi\left(H - \zeta\right) a \sqrt{2g\left(\zeta + \frac{V_0^2}{2g}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (153).$$

Следоват. $Q = f(H, \zeta)$. Как и надо было ожидать, каждому напору H на одном и том же водосливе соответствует определенное понижение ζ на конце порога и определенный расход Q. Для определения ζ, а следоват., и расхода Q можно сделать *две* разные частные гипотезы. По первой гипотезе предполагается, что понижению ζ должен соответствовать *maximum* расхода Q; по второй гипотезе предполагается, что понижению ζ должен соответствовать *maximum* живой силы T протекающей воды. Рассмотрим каждую гипотезу в отдельности.

Первая гипотеза (гипотеза *Беланже*). По этой гипотезе принимается, что при определенном напоре H понижение ζ будет в действительности таким, что расход Q получается наибольшим из всех расходов, какие были бы возможны в этом водосливе при напоре H. По этому условию найдем ζ, приравняв нулю производную Q по ζ. Тогда из выражения (153) имеем:

$$\frac{dQ}{d\zeta} = \varphi a \sqrt{2g} \left\{ -\sqrt{\left(\zeta + \frac{V_0^2}{2g}\right)} - \frac{(H - \zeta)}{2\sqrt{\left(\zeta + \frac{V_0^2}{2g}\right)}} \right\} = 0.$$

Отсюда

$$\zeta = \frac{1}{3}\left(H + \frac{V_0^2}{2}\right) - \frac{V_0^2}{2g} = \frac{1}{3} h - \frac{V_0^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (154)$$

где сделано обозначение: $\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right) = h$.

Затем по чертежу находим глубину воды на конце порога:

$$\left(H - \zeta\right) = \frac{2}{3}\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right) = \frac{2}{3} h.$$

Если скорость V_0 незначительна, то, пренебрегая ею, получаем:

$$\zeta = \frac{1}{3} H; \left(H - \zeta\right) = \frac{2}{3} H \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (155).$$

Подставляя значение (154) в уравн. (152), находим:

$$V_p = \frac{\varphi}{\sqrt{3}} \sqrt{2g\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)} = \frac{\varphi}{\sqrt{3}} \sqrt{2gh} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (156).$$

Затем имеем соответственный расход, который по условию будет наибольшим:

$$maxim. \quad Q = Q_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \varphi a \sqrt{2g} \left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2} = \frac{2}{3} \mu_1 a \sqrt{2g}\, h^{3/2} \quad . \; . \; (157).$$

Здесь условно положено:

$$\frac{\varphi}{\sqrt{3}} = \mu_1$$

с тою целью, чтобы привести выражение для Q_1 к виду, полученному выше для обыкновенных водосливов. Если принять приблизительно $\varphi = 0{,}909$ то $\mu_1 = 0{,}525$; тогда принимая начальную скорость $V_0 = 0$, получаем формулу *Бресса*, согласную с опытами *Лебро* и *Кастеля:*

$$Q_1 = 0{,}35 \; a \; \sqrt{2g}\, H \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (158),$$

Этою формулою очень часто пользуются при расчете каменных труб под железнодорожными насыпями; именно из этого уравнения находят отверстие трубы a по заданному напору H и по наибольшему расходу Q_1, определенному по нормам Кёстлина для бассейна этой трубы. Однако опыты, произведенные автором в гидравлической лаборатории Московского Института инженеров путей сообщения над водосливами шириною $c = 0{,}622$ и 1,255 м.;—длиною $a = 0{,}2$ м. при напорах $H = 0{,}05$ до 0,154 м. не подтвердили равенства (155); понижение горизонта на конце водослива ζ получилось значительно больше $\frac{1}{3}$ H, составляя в среднем: $\zeta = 0{,}55\, H$; коэф. $\mu_1 = 0{,}341$ при $c = 0{,}622$ м. и коэф. $\mu_1 = 0{,}315$ при $c = 1{,}255$ м. Независимо сего вид поверхности воды на водосливе оказался также несогласным с тем, который представляли себе различные гидравлики до настоящего времени. Именно при пользовании гипотезой Беланже эти ученые предполагали, что поверхность воды на всем протяжении водослива горизонтальна, и что поэтому глубина воды на водосливе одна и таже и равна $H - \zeta = \frac{2}{3}$ H; при таком условии движение воды по водосливу должно считаться равномерным. В действительности вид поверхности воды совершенно иной;

он уже описан выше и показан на черт. 129; откуда видно, что эта глубина есть величина переменная и что, следоват., движение воды по водосливу неравномерное. В виду таких опытных данных необходимо отнестись критически к гипотезе Беланже и считать ее неподтвержденной опытами.

Вторая гипотеза (новая). Эта гипотеза основана на предположении, что движение воды по водосливу с широким горизонтальным порогом происходит в действительности с затратой наименьшей живой силой на побеждение гидравлических сопротивлений или другими словами, что вода, покидающая водослив, заключает в себе наибольшую живую силу, какая только возможна при напоре H на данном водосливе. *Гельмгольц* доказал для случая очень малых скоростей, что движение жидкости устанавливается вообще таким образом, что работа гидравлических сопротивлений оказывается наименьшей и что, следоват., живая сила жидкости будет наибольшей. Гидравлические сопротивления на пути $M_0'M$, как и в случае насадок, можно рассматривать состоящими из следующих сопротивлений: 1) на пути $M_0'M_1$, т.-е. до сжатого сечения dd'; 2) на пути M_1M_2, т.-е. от сжатого сечения до расширенного ff'; и 3) на пути M_2M, т.-е. от расширенного сечения до конца водослива. На этом последнем пути вода находится в условиях неравномерного движения по каналу с горизонтальным дном и с прямоугольным поперечным сечением; очевидно, что здесь гидравлические сопротивления зависят от длины λ между сечениями ff' и ki, т.-е. от ширины порога c. Поэтому коэф. сопротивления ζ_1, а следоват., и коэффициенты φ и μ_1 суть величины переменные. Определение всех этих гидравлических сопротивлений представляет задачу довольно сложную, а потому для упрощения ограничимся предположением, так же как и при выводе формулы Бресса, что коэф. ζ_1 и φ суть величины постоянные; в таком случае на полученные результаты следует смотреть, как на приближенные. Найдем живую силу T соответствующую расходу Q имея в виду выражения (152 и 153), получаем:

$$T=\frac{1}{2}MV_p^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{g}Q\right)V_p^2=\frac{\Delta}{2g}\varphi^3\left(2g\right)^{3/2}\ a\left(H-\zeta\right)\left(\zeta+\frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2}=F(\zeta)$$

Определим, при каком ζ получается *maxim.* T; для этого нужно решить по ζ уравнение:

$$\frac{dT}{d\zeta}=F'(\zeta)=0$$

где φ считается постоянным. Находим:

$$F'(\zeta)=\frac{\Delta}{2g}\varphi^3(2g)^{3/2}\ a\left\{(H-\zeta)\frac{3}{2}\left(\zeta+\frac{V_0^2}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\zeta+\frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right\}=0$$

Отсюда получаем:

$$\zeta = 0{,}6\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right) - \frac{V_0^2}{2g} = 0{,}6\,h - \frac{V_0^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots (159)$$

Если начальная скорость V_0 очень мала, то пренебрегая ею, имеем:

$$\zeta = 0{,}6\,H \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (160$$

Вставляя значение (159) в выражение (153), находим искомый расход соответствующий *maximum'y* живой силы T:

$$Q_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{3/2} \varphi\, a \sqrt{2g}\, h^{3/2} = \frac{2}{3}\mu_2\, a \sqrt{2g}\, h^{3/2} \quad \ldots \ldots \ldots (161)$$

Здесь условно положено:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{3/2} \varphi = \mu_2$$

чтобы привести выражение для Q_2 к виду полученному для обыкновенных водосливов. Полагая для примера $\varphi = 0{,}91$, имеем $\mu_2 = 0{,}42$; при $V_0 = 0$ получается:

$$Q_2 = 0{,}28\, a \sqrt{2g} H^{3/2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (162)$$

Сравнивая полученные значения для Q_1 и Q_2, видим, что Q_2 *меньше* Q_1 на 19%; если же сравнить живые силы T_1 и T_2 для этих расходов, то найдем, что T_2 *больше* T_1 на 46%. Что касается понижения на конце порога ζ, то при $V_0 = 0$ получается $\zeta = 0{,}6\,H$, что довольно хорошо согласуется с вышеприведенным результатом опытов, по которым $\zeta = 0{,}55\,H$. Как уже сказано выше, коэф. φ и μ суть функции от ширины c водослива и чем c больше, тем φ и μ должны быть меньше; поэтому на вышеприведенные значения коэффициентов:

$$\frac{2}{3}\mu_1 = 0{,}35 \text{ и } \frac{2}{3}\mu_2 = 0{,}28$$

следует смотреть только как на частные значения, соответствующие определенной ширине водослива c.

При расчете железнодорожных каменных труб лоток трубы считается не горизонтальным, а имеющим продольный уклон i (черт. 129 *a*). Тогда движение по такому лотку будет равномерным, а глубина воды H_1 будет везде одна и таже, кроме небольшой части трубы около входа в трубу. Таким образом движение воды по трубе будет происходить как в коротком канале прямоугольного сечения шириною a, при глубине воды H_1 и при продольном уклоне i. Наибольшая скорость V_p равномерного движения задается техническими условиями в зависимости от способа укрепления дна трубы. Очевидно, расход трубы:

$$Q = \omega V_p = a H_1 V_p$$

Зададимся отношением

$$k=\frac{a}{H_1}=0{,}75-2;\ \text{тогда}\ Q=ka^2V_p;$$

откуда

$$a=\sqrt{\frac{Q}{kV_p}}\ \text{и}\ H_1=\frac{Q}{aV_p}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (163)$$

Продольный уклон лотка i определится по формуле *Шези*, о которой сказано подробнее ниже и имеющей такой вид:

$$V_p=C\sqrt{Ri};\ \text{откуда}\ i=\frac{1}{R}\left(\frac{V}{C}\right)^2\ \ldots\ldots\ (164)$$

Здесь R — *гидравлический радиус*, который представляет отношение живого сечения $\omega=aH_1$ к смачиваемому периметру стенок и дна канала: $\chi=a+2H_1$, т.-е.

$$R=\frac{\omega}{\chi}=\frac{aH_1}{a+2H_1}$$

C — коэффициент, зависящий от шероховатости стенок и дна лотка, а также от гидравлического радиуса R.

Отношение k нужно выбрать таким, чтобы стоимость трубы, т.-е. стоимость лотка трубы; двух боковых стенок и свода была приблизительна *наименьшей*. При таком способе расчета трубы нет надобности пользоваться гипотезой Беланже. Заметим, что при пользовании форм. Бресса (158) отношение $\left(\frac{a}{H_1}\right)$ не соответствует наименьшей стоимости трубы.

§ 39. Неполные или затопленные водосливы. Если горизонт воды в отводящем канале B (черт. 130) выше ребра водослива c на H_2, то такой водослив называется неполным или затопленным. Здесь вода переливается через водосливное отверстие совершенно так же, как в обыкновенном водосливе; на пороге струя имеет толщину ec; верхняя поверхность струи есть ee', а нижняя cc', так что струя снизу поднимается несколько выше порога; точка g высшая точка; сечение gk — сжатое сечение. В месте f встречи верхней части струи с поверхностью воды в канале B проявляется сильное волнение.

Опыты с затопленными водосливами были произведены *Борнеманном*, *Френсисом*, *Базеном*, а также *Фтили* и *Стирнсом*. Затопленные водосливы представляют весьма несовершенный способ для водоизмерения вследствие существования начальной скорости V_0 и вследствие невозможности точно определить разность горизонтов H_1, так как около

точки f проявляется сильное волнение. При малой начальной скорости возможно еще грубое определение расхода в канале или в реке, а при большой—даже и такое определение не мыслимо.

Определение расхода для таких водосливов производится по форм. Дюбюа, Вейсбаха, Мари, Базена и др. Этими формулами в практике пользуются для вычисления отверстия плотин.

1) *Формула Дюбюа.* Способ вывода форм. Дюбюа довольно искусственный. Плоскостью mn, совпадающей с горизонтом воды в канале B, разделяем переливающуюся струю на две части cd и de. Часть cd рассматриваем, как протекающую через *затопленное* отверстие cd из сосуда A в сосуд B, при чем разность горизонтов в этих сосудах равна H_1. Ширина этого отверстия равна длине водослива a, а высота отверстия равна H_2. Часть de рассматривается как струя *обыкновенного водослива*, воображаемый порог которого лежит в точке d, а напор равен H_1; длина этого водослива равна a. Сжатое сечение dk делим также на две части: часть ik принадлежит водосливу, а часть gi—затопленному отверстию. Сообразно с этим расход Q через неполный водослив равен сумме расходов: расходу Q_1 части de и расходу Q_2 части cd. Для той и другой части примем во внимание скорость подхода V_0.

Расход Q_1 определится по форм. (140) в § 35, а именно:

$$Q_1 = \frac{2}{3} \mu_1 a \sqrt{2g}\, h^{3/2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (165)$$

где $h = \left(H_1 + \frac{V_0^2}{2g}\right)$ — есть напор воображаемого водослива, исправленный на скорость подхода V_0, и μ_1 — коэф. расхода для водослива.

Расход Q_2 найдем по форм. (60) в § 24, а именно:

$$Q_2 = \mu_2 \omega \sqrt{2g\left(H_1 + \frac{V_0^2}{2g}\right)} = \mu_2 a H_2 \sqrt{2gh} \quad \ldots \ldots \ldots (166)$$

Здесь $\omega = aH_2$ — площадь воображаемого затопленного отверстия cd; $h = H_1 + \frac{V_0^2}{2g}$ — напор исправленный на скорость V_0; μ_2 — коэф. расхода для отверстия; можно положить, что $\mu_2 = \beta\mu_1$, где β правильная дробь, по Френсису и Г. Смитзу равная $\beta = 0{,}92$.

Расход для всего водослива получим, сложив найденные расходы:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \mu_1 a \sqrt{2gh} \left\{\beta H_2 + \frac{2}{3} h\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (167)$$

Если скорость подхода V_0 довольно мала, то полагая $V_0 = 0$, найдем $h = H_1$ и получим формулу *Дюбюа*:

$$Q = \mu_1 a \sqrt{2gH_1} \left(\beta H_2 + \frac{2}{3} H_1\right) \quad \ldots \ldots \ldots (168)$$

По *Г. Смитзу* коэф. μ_1 равен коэф. расхода для обыкновенного водослива с сжатием только снизу; в таком случае по формуле (147) в § 37 имеем:

$$\mu_1 = 0{,}615\left(1 + \frac{1}{7}\frac{H_1}{a}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (168\,a)$$

Скорость подхода V_0, т.-е. скорость на поверхности, *Г. Смитз* выражает через среднюю скорость в канале v, полагая скорость на поверхности больше средней на $15^0/_0$; тогда:

$$\frac{V_0^2}{2g} = \left(\frac{1{,}15\,v}{2g}\right)^2 = b\,\frac{v^2}{2g}; \text{ где } b = 1{,}32; \text{ и } v = \frac{Q}{\Omega};$$

здесь Ω — живое сечение канала, подводящего воду к водосливу.

2) *Формула Вейсбаха* выводится совершенно так же как и форм. (167), но с применением для расхода Q_1 через воображаемый водослив форм. (57) Вейсбаха, данной в § 24; таким образом получим расход Q_1 через воображаемый водослив:

$$Q_1 = \frac{2}{3}\mu_1 a\sqrt{2g}\left\{\left(H_1 + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (169)$$

Расход Q_2 через затопленное отверстие представится так:

$$Q_2 = \mu_2\, aH_2\sqrt{2g\left(H_1 + \frac{V_0^2}{2g}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (170)$$

Тогда полагая $\mu_1 = \mu_2$, получим формулу *Вейсбаха* для расхода через неполный водослив:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \mu_1 a\sqrt{2g}\left\{\frac{2}{3}\left[\left(H_1 + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right] + H_2\sqrt{\left(H_1 + \frac{V_0^2}{2g}\right)}\right\} \quad (171)$$

Формула Вейсбаха отличается от выражения (167) только членом $\left(\frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2}$; если по малости V_0 принять $V_0 = 0$ и положить $\beta = 1$, то формулы Дюбюа и Вейсбаха совпадут.

Формула Вейсбаха часто применяется как русскими так и иностранными инженерами для определения отверстия a плотин. Для этой цели коэффициенты μ_1 и μ_2 берутся: по *Толкмиту* $\mu_1 = 0{,}83$ и $\mu_2 = 0{,}62$—$0{,}67$. Многие авторы принимают $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}80$. Профессор *Зброжек* для расчета отверстий плотин рекомендует применять также формулу Вейсбаха, полагая в ней $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}80$; он дает этой формуле следующий вид:

$$Q_1 = \mu_1 a\sqrt{2g\left(H_1 + \frac{V_0^2}{2g}\right)} \times$$

$$\times\left[\frac{2}{3}H_1 + H_2 + \frac{2}{3}\frac{V_0^2}{2g}\left\{1 - \frac{V_0}{\sqrt{2g\left(H_1 + \frac{V_0^2}{2g}\right)}}\right\}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (172)$$

При расчете отверстия плотины все величины, кроме a, должны быть известны; тогда из этой формулы определится отверстие или длина плотины a. Подпор или перепад H_1 допускается: по *Built-in Зброжеку* от 1 до 1,5 фут. и не более 3 ф.; по *Петрашеню* для плотин на р. Шексне $H_1 = 0{,}35$ ф.; по *Пузыревскому* для плотин на р. С. Донце $H = 0{,}7$ ф.

3) *Формула Мари* выводится следующим образом. Применим к линии тока $M_0 M_1$ (черт. 130) теорему Д. Бернулли; тогда для скорости V_p в точке M_1 имеем, обозначая сопротивления на этой линии через $\zeta_1 \frac{V_p^2}{2g}$:

$$V_p = \varphi \sqrt{2g\left(H_1 + \frac{V_0^2}{2g}\right)},\ \text{здесь коэф. скорости}\ \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_1}}$$

Расход Q в сечении $M_1 M_2$ равен:

$$Q = \omega V_p = \varphi a H_2 \sqrt{2g\left(H_1 + \frac{V_0^2}{2g}\right)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (173)$$

Это формула данная *Мари*. В применении к плотинам можно принимать коэф. $\varphi =$ коэф. $\mu_1 = 0{,}80$. Из этого выражения можно исключить $\frac{V_0^2}{2g}$. Как указано выше, по Г. Смитзу:

$$\frac{V_0^2}{2g} = b\,\frac{v^2}{2g} = \frac{b}{2g}\left(\frac{Q}{\Omega}\right)^2$$

где $b = (1{,}15)^2 = 1{,}32$ и Ω живое сечение реки выше плотины, соответствующее расходу Q.

По формуле Мари определяется расход только через затопленное отверстие aH_2, при чем скорость определяется величиной перепада H_1. Поэтому форм. Мари целесообразно пользоваться в тех случаях, когда перепад H_1 довольно мал сравнительно с глубиною H_2, что имеет место именно при расчете плотин.

При выводе формулы Мари не нужно прибегать к искусственному приему, который применен для вывода формул Дюбюа и Вейсбаха.

4) *Формула Базена.* На основании своих многочисленных опытов Базен вычисляет расход через неполный водослив по формуле обыкновенного водослива:

$$Q = \frac{2}{3}\mu_1 a \sqrt{2g}\, H^{3/2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (174)$$

где: $H = H_1 + H_2$; $\frac{2}{3}\mu_1 = \frac{2}{3}\mu\alpha\left[1 + \beta\frac{H_2}{G_1}\right]\sqrt[3]{\frac{H_1}{H}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (175)$

здесь $\frac{2}{3}\mu$ представляет коэф. расхода для обыкновенного водослива и определяется по формуле (150); $\alpha = 1{,}05$; $\beta = 0{,}2$; G_1 — вертикальное расстояние порога водослива от дна канала с низовой стороны.

Численные примеры. а) Определить расход через неполный водослив при следующих данных: длина водослива $a = 2$ м.; перепад $H_1 = 0{,}15$ м.; глубина $H_2 = 0{,}25$.; $H = H_1 + H_2 = 0{,}4$ м.; вертикальное расстояние порога от дна канала с верховой стороны $G = 0{,}8$ м.; вертикальное расстояние порога от дна канала с низовой стороны $G_1 = 0{,}5$ м.

Применяя формулу *Дюбюа*, находим, что по Г. Смитзу:

$$\mu_1 = 0{,}615\left(1 + \frac{1}{7}\frac{0{,}15}{2}\right) = 0{,}622$$

Тогда

$$Q = 0{,}622 \cdot 2\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}15}\left[0{,}92 \cdot 0{,}25 + \frac{2}{3}0{,}15\right] = 0{,}703 \text{ куб. м.}$$

По формуле *Мари* получается:

$$Q = 2\sqrt{\frac{2 . 9{,}81 . 0{,}15}{\left(\frac{1}{0{,}8 . 0{,}25}\right)^2 - 1{,}33\left(\frac{1}{0{,}8 + 0{,}4}\right)^2}} = 0{,}700 \text{ куб. м.}$$

По формуле *Базена* (150) имеем:

$$\frac{2}{3}\mu = \left(0{,}405 + \frac{0{,}003}{0{,}4}\right)\left\{1 + 0{,}55\left(\frac{0{,}4}{0{,}8 + 0{,}4}\right)^2\right\} = 0{,}44.$$

Следовательно:

$$\frac{2}{3}\mu_1 = 0{,}44 \cdot 1{,}05\left(1 + 0{,}2\frac{0{,}25}{0{,}50}\right)\sqrt[3]{\frac{0{,}15}{0{,}40}} = 0{,}366$$

Тогда

$$Q = 0{,}366 \cdot 2 \cdot (0{,}4)^{3/2} \cdot 4{,}43 = 0{,}822 \text{ куб. м.}$$

Это значение значительно превышает результаты, полученные по формулам Дюбюа и Мари.

б) Определить отверстие плотины a при следующих данных: расход реки $Q = 63$ куб. саж.; живое сечение реки непосредственно выше плотины $\Omega = 186{,}4$ кв. саж.; перепад $H_1 = 0{,}05$ саж.; $H = H_1 + H_2 = 2{,}54$ саж.

Отсюда находим скорость $V_0 = \frac{63}{186{,}4} = 0{,}338$ саж.; затем

$$H_1 + \frac{V_0^2}{2g} = 0{,}05 + 0{,}0124 = 0{,}0624 \text{ саж.}$$

По формуле *Вейсбаха* находим:

$$a = \frac{Q}{\mu_1\sqrt{2g}\left[\frac{2}{3}\left\{\left(H_1 + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right\} + H_2\sqrt{\left(H_1 + \frac{V_0^2}{2g}\right)}\right]} =$$

$$= \frac{63}{0{,}8\sqrt{2.4{,}6}\left[\frac{2}{3}\left\{(0{,}0624)^{3/2} - (0{,}0124)^{3/2}\right\} + 2{,}49\sqrt{0{,}0624}\right]} = 41{,}2 \text{ саж.}$$

Вычислим отверстие a по формуле *Мари* (173):

$$a = \frac{Q}{\mu_1 H_2 \sqrt{2g\left(H_1 + \frac{V_0^2}{2g}\right)}} = \frac{63}{0{,}8 \cdot 2{,}49 \sqrt{2 \cdot 4{,}6 \cdot 0{,}0624}} = 41{,}7 \text{ саж.}$$

Глава V. Движение воды в трубах.

§ 40. Гипотезы. Распределение скоростей по сечению трубы согласно опытам. Уравнение равномерного движения. Изучение движения жидкостей по трубам является для техники особенно важным вследствие применения законов этого движения к расчету многочисленных сооружений, из которых главнейшие суть водопроводы и водостоки.

Движение жидкости в трубах может быть двояким: *равномерным* и *неравномерным*. Первое из них наблюдается тогда, когда поперечное сечение трубы и расход не изменяется; это случай водопровода с постоянным диаметром и с постоянным расходом. Второе движение имеет место при постепенном изменении или диаметра или расхода или того и другого одновременно; это случай водопровода с переменным диаметром или с переменым расходом, также случай водопровода с переменным расходом и диаметром. При рассмотрении движения в трубах будем пользоваться общими гипотезами гидравлики (§ 22). По второй из этих гипотез скорости во всех точках сечения трубы равны между собою и нормальны к сечению. Поэтому при равномерном движении жидкости, когда диаметр трубы и расход не изменяется, все частицы движутся со скоростями равными и параллельными. Эта скорость движения V общая всем частицам получается делением расхода Q на поперечное сечение трубы ω. При таких предположениях движение очевидно уподобляется равномерному движению твердого тела, скользящего по стенкам трубы со скоростью V. Такое отожествление движения жидкости с движением твердого тела, однако, неверно. Действительное распределение скоростей в капиллярах выражается форм. (f) в § 21, выведенной *Кирхгофом* теоретическим путем; здесь закон изменения скоростей параболический. Для труб большого диаметра распределение скоростей было найдено впервые *Дарси* путем опыта; найденная им кривая скоростей оказалась полукубической параболой. Впоследствии тем же вопросом занимались экспериментально *Фриман* и *Базен*; для своих измерений они применяли принцип трубки Пито, т. е.

то же, что делал и Дарси. Базен дал следующую формулу, которая хорошо согласуется также и с опытами Фримана:

$$V = V_0 - B\left\{1 - \sqrt{1 - C\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (176)$$

здесь V скорость в точках сечения в расстоянии ρ от оси трубы; ρ_0 — радиус трубы; V_0 — скорость для центральной струйки; $C = 0{,}95$ и

$$B = k\sqrt{\rho_0 i}$$

где $k = 20{,}86$; i — гидравлический уклон, т.-е. высота гидравлических сопротивлений на единицу длины трубы. Ур. 176 есть уравнение эллипса. Скорость по периферии будет наименьшей и равна

$$minim. \; V = w = V_0 - B$$

Скорость центральной струйки наибольшая и равна V_0. Средняя скорость V_0 соответствует точкам, лежащим от оси в расстоянии $\rho_1 = 0{,}74\,\rho_0$. Если в различных точках сечения трубы mn (черт. 131) откладывать соответственные скорости, то, соединяя концы отрезков, получим кривую abc — эллипс; тогда $na = mc = w$; $Ob = V_0$ и $de = V_c$.

Буссинек теоретическим путем нашел закон распределения скоростей в трубах большого диаметра; кривая изменения скоростей оказалась кривой третьей степени. По Буссинеку средней скорости V_c соответствует расстояние $\rho_1 = 0{,}74\,\rho_0$; затем скорость у стенок $w = 0{,}66\ V_c$ а скорость в центре $V_0 = 1{,}22\ V_c$.

Найденное путем опыта уменьшение скорости от центра сечения к стенкам происходит очевидно от трения между жидкостью и стенками, а также от трения между частицами жидкости. В недавнее время американские инженеры *Вильямс*, *Губел* и *Фенкел* производили опыты помощью трубки Пито над распределением скоростей в трубе и нашли, что скорости изменяются по эллиптическому закону; средняя скорость V_c соответствует $\rho_1 = 0{,}75\,\rho_0$; $V_0 = 1{,}19\ V_c$ и $w = 0{,}6\ V_c$.

Движение воды в трубе можно представить следующим образом. Возьмем два смежные поперечные сечения mm и nn (черт. 131 a); полученный элементарный цилиндр разобьем смежными цилиндрическими поверхностями на элементарные кольца $1 - 1$; $2 - 2$; . . . При движении воды центральные кольца будут двигаться быстрее колец, прилегающих к стенкам, и получится перемещение колец, показанное на чертеже. Такое движение воды наз. телескопическим, т. к. оно аналогично движению трубок телескопа, которые выдвигаются одна из другой.

Несмотря на такой ясный результат опытов, все же при рассмотрении движения воды по трубам все гидравлики принимают гипотезу, что скорости во всех точках сечения трубы равны между собою. Причина, заставляющая так поступать, об'яснена в § 22. Пользуясь такой гипотезой, нужно иметь в виду указание, сделанное в § 22 относительно того, что в действительности количество движения расхода Q и живая сила расхода Q будут *больше*, чем при равномерном распределении скоростей: первое на 3%, а вторая на 9%.

Уравнение равномерного движения. Возьмем два поперечных сечения трубы mn и $m'n'$ (черт. 132) в конечном расстоянии L друг от друга; таким образом выделим об'ем жидкости $mn\ m'n'$. Этот об'ем движется равномерно, а потому все силы, к нему приложенные, уравновешиваются; следов., сумма проекций всех этих сил на любую ось l равна нулю.

Силы, действующие на этот об'ем жидкости, следующие.

1. Давления в сечениях mn и $m'n'$ происходящие от действия жидкости, лежащей влево от mn и вправо от $m'n'$ на частицы рассматриваемого об'ема. Так как ед. давления распределяются по гидростатическому закону при скоростях параллельных между собою (§ 17), то сумма давлений в mn равна $p_0\omega$, а сумма давлений в $m'n'$ равна $p\omega$, где p_0 и p суть ед. давления в центрах этих сечений C_0 и C, а ω — поперечное сечение трубы.

2. Давление цилиндрической стенки трубы на боковую поверхность водяного цилиндра $mn\,m'n'$. В § 22 было об'яснено, что в силу общих гипотез гидравлики мы принимаем трение проявляющимся лишь между стенкой трубы и боковою поверхностью жидкого тела. Для любой элементарной площадки $ab = d\Omega$ этой поверхности сила трения равна $t \cdot d\Omega$, где t — ед. сила трения; направление этой силы противоположно направлению движения. Этой же площадке еще соответствует нормальная сила $n \cdot d\Omega$; она представляет противодействие стенки давлению жидкости. Если χ — периметр поперечного сечения трубы, то боковая поверхность цилиндра равна $\chi \cdot L$; тогда сумма всех сил трения равна:

$$t \cdot S = t \cdot \chi L.$$

3. Вес жидкости в рассматриваемом об'еме равен $G = \Delta\omega L$. Все перечисленные силы проектируем на ось l, параллельную скорости. Так как проекция сил $nd\Omega$ равна нулю, а проекция веса G равна:

$$G \sin\beta = G\left(\frac{z_0 - z}{L}\right) = \Delta\omega\left(z_0 - z\right)$$

то получаем:

$$p_0\omega - p\omega - t\chi L + \Delta\omega\,(z_0 - z) = 0$$

Отсюда

$$\frac{t}{\Delta}\frac{\chi}{\omega}L=\left(z_0+\frac{p_0}{\Delta}\right)-\left(z+\frac{p}{\Delta}\right)$$

Применим затем к линии C_0C уравнение Д. Бернулли для несовершенных жидкостей; так как скорости в C_0 и C равны между собою, то это уравнение будет иметь такой вид:

$$\left(h''-h_0''\right)_{C_0C}=\left(z_0+\frac{p_0}{\Delta}\right)-\left(z+\frac{p}{\Delta}\right)$$

Здесь вторая часть представляет напор между точками C_0 и C; поэтому можно сказать, что при равномерном движении жидкости в трубе напор тратится всецело на гидравлические сопротивления. Сравнивая предыдущие выражения, получаем:

$$\left(h''-h_0''\right)_{C_0C}=\frac{t}{\Delta}\cdot\frac{\chi}{\omega}L=\frac{t}{\Delta}\frac{L}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (177).$$

Частное $\frac{\omega}{\chi}=R$ называется *гидравлическим* или *подводным радиусом.* Для круглого сечения трубы $R=\frac{1}{4}D$; для прямоугольного сечения $a\cdot b$ получается:

$$R=\frac{ab}{2(a+b)}.$$

Уравнение (177) представляет уравнение равномерного движения в трубах. Из этого уравнения выводим:

$$\frac{t}{\Delta}=\frac{\omega}{\chi}\cdot\frac{(h''-h_0'')}{L}=Ri \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (178).$$

Здесь величина $(h''-h_0'):L$ представляет гидравлические сопротивления на единицу длины трубы и называется *гидравлическим уклоном* i. Уравнение (178) есть также уравнение равномерного движения жидкости в трубе; оно дает зависимость между ед. силой трения t, гидравлическим радиусом R и гидравлическим уклоном i. Вообразим в точках C_0 и C пьезометры; тогда разность горизонтов rs в этих пьезометрах равна $(h''-h_0'')$. Отложим от точки q вверх отрезок $\frac{V^2}{2g}$; тогда горизонтальная плоскость NN представляет плоскость напора; прямая qr—линию скоростей и прямая qs—линию давлений. Эта линия составляет угол α с горизонтом. Из чертежа видно:

$$tg\alpha=\frac{rs}{qr}=\frac{(h''-h_0'')}{L\,Cos\,\beta}=\frac{i}{Cos\,\beta};\ \text{отсюда:}\ tg\alpha\cdot Cos\,\beta=i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (179).$$

Так выражается зависимость между гидравлическим уклоном i и углами α и β, составляемыми с горизонтом линией давления qs и продольной осью трубы C_0C. Если ось горизонтальна, то $tg\alpha=i$.

Очевидно, что основное уравн. (177 или 178) может иметь практическое значение только тогда, когда будет известна величина ед. силы трения t. Зависимость этой величины от разных факторов, как-то: размеров трубы, скорости V, степени шероховатости стенок трубы, температуры жидкости, свойств самой жидкости, все это может быть выяснено только путем опытов, которые и производились в большом числе с трубами большого и малого диаметра, имевшими различную шероховатость стенок, как с водой так и с другими жидкостями: нефтью, керосином, разного рода маслами и т. п.

Необходимо заметить, что между законами движения жидкостей в трубах (в руслах под напором) и в каналах (в руслах свободных) нет никакого различия, а потому для суждения о законах движения можно опираться как на опыты с трубами, так и на опыты с каналами. Если в курсах гидравлики движение в тех и других руслах рассматривается отдельно, то это делается вследствие различия их в техническом отношении. Опыты с каналами важны в том отношении, что дают нам возможность судить о движении больших масс воды в руслах очень значительных размеров при очень больших скоростях и притом в руслах с разнообразною шероховатостью стенок, чего опыты с водопроводными трубами дать не могут.

§ 41. Опыты над движением жидкостей в капиллярах и в трубах большого диаметра. Два закона движения в трубах. Опыты над движением дистиллированной воды в капиллярах были впервые произведены профессором физики на медицинском фокультете в Париже *Пуазёйлем*, опубликовавшем их в 1846 г. Впоследствии метод Пуазёйля был применен профес. *Н. П. Петровым* к исследованию движения в волосных трубках различных масл, получаемых из бакинской нефти (керосин, нефтяные остатки, соларное масло), а также масл: оливкового, сурепного, спермацетового, касторового, и наконец с с водой; результаты этих опытов были опубликованы в 1886 г. Затем целый ряд ученых производили опыты над движением жидкостей различного химического состава. Целью всех выше упомянутых опытов было определение *коэффициента внутреннего трения* μ жидкости, т.-е. трения, проявляющегося между частицами жидкости. Если две смежные частицы жидкости a и b, расстояние между центрами которых равно dr, перемещаются одна со скоростью v, а другая—со скоростью $v+dv$, то угловая скорость перемещения равна (черт. 133)

$$tg\alpha = \frac{dv}{dr}.$$

Силу трения F, которая при этом проявится по площадке $d\omega$, можно принять равной

$$F = \mu \cdot \frac{dv}{dr} \cdot d\omega.$$

где μ — коэф. пропорциональности, названный выше коэф. внутреннего трения. Если положить $dv = dr$, то получится

$$f = \frac{F}{d\omega} = \mu.$$

Отсюда видно, что μ выражается так же как и f, т.-е. в весовых единицах на ед. площади; обыкновенно μ выражается в милиграммах на м. м.^{2}.

Выше в § 20 была приведена следующая формула Кирхгофа для скорости в капилляре радиуса R_0 частицы, лежащей в расстоянии R от центра трубки:

$$u = \frac{p_1 - p_0}{4 \mu L} \left({R_0}^2 + 2 \left(\frac{\mu}{k} \right) R_0 - R^2 \right) \quad \ldots \ldots \ldots (a).$$

Здесь L — длина трубки между двумя рассматриваемыми сечениями mm и nn (черт. 67); p_1 и p_0 — ед. давления в этих сечениях; μ — коэф. внутреннего трения; k — коэф. внешнего трения. Отношение $\mu : k$ зависит от температуры, свойств жидкости, состояния поверхности стенок и является величиной довольно малой. Пренебрегая поэтому вторым членом в скобках, находим приближенное значение для u:

$$u = \frac{p_1 - p_0}{4 \mu L} ({R_0}^2 - R^2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (b).$$

Определим по этой скорости расход Q трубки. Возьмем в поперечном сечении трубки круговое кольцо радиусов R и $R + dR$; площадь его равна $\omega = 2\pi R \cdot dR$.

Элементарный расход dQ через эту площадку равен:

$$dQ = u \cdot d\omega = \frac{p_1 - p_0}{4 \mu L} \left({R_0}^2 - R^2 \right) 2\pi R \cdot dR$$

Следоват. расход для всего сечения равен:

$$Q = \frac{\pi (p_1 - p_0)}{2 \mu L} \left\{ {R_0}^2 \int R dR - \int R^3 dR \right\}$$

Здесь интегрирование берется в пределах от 0 до R_0. Поэтому получаем:

$$Q = \frac{\pi (p_1 - p_0)}{8 \mu L} {R_0}^4 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (c)$$

По опытам Пуазёйля, Н. П. Петрова и др. ученых было найдено такое выражение для расхода в трубке диаметром D_0:

$$Q = K \cdot f(T) \cdot \frac{p_1 - p_0}{L} D_0^4 \ldots\ldots\ldots\ldots (d).$$

Из сравнения этих значений для расхода находим величину коэф. μ, равную

$$\mu = \frac{\pi}{128 K f(T)} \ldots\ldots\ldots\ldots (e).$$

Здесь $f(T)$ есть так называемая температурная функция; она имеет вид:

$$f(T) = \alpha + \beta T + \gamma T^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (f).$$

Где α; β; γ — численные коэффициенты равные: $\alpha = 1$; $\beta = 0{,}03368$; $\gamma = 0{,}00022$ и T — температура в градусах; K — численный коэффициент, зависящий от свойств жидкости. Если по оси абсцисс откладывать температуру в градусах C, а по оси ординат соответственные значения для μ, то получим кривую коэф. внутреннего трения (черт. 134). Это кривая третьей степени; вид ее показывает, что с уменьшением T коэф. μ, обусловливающий вязкость жидкости, быстро увеличивается; при высокой температуре μ совершенно ничтожно. Это обстоятельство хорошо известно агентам службы тяги на железных дорогах. Зимою движение поездов требует значительно больших усилий, чем летом. Масло, составляюшее смазку для осей подвижного состава, делается при низких T очень вязким, почему трение осей в смазочных коробках чрезмерно увеличивается и движение вагонов становится очень затруднительным. В нижеследующей таблице IX приведены значения коэф. μ по опытам профес. *Н. П. Петрова* для воды и для разных масл при T от $17{,}^{\circ}{}_5$ C до 55° C; они заимствованы из труда профес. *Н. П. Петрова.* «Практические результаты опытов и гидродинамической теории» 1887 г.

На черт. 134 по оси абсцисс отложены температура в градусах C, а по оси ординат значения коэф. внутреннего трения μ в тысячных долях милиграмма на кв. м. м.; полученные кривыя коэф. μ относятся к следующим маслам: 0 — 0 спермацетовое масло; 1 — 1 оливковое масло; 2 — 2 сурепное масло; 3 — 3 олеонафт завода Бакинского Общества.

Исследования относительно коэф. внутреннего трения μ для различных масл были предприняты с практической целью, а именно для определения, какие именно масла следует брать для смазки трущихся частей в машинах, чтобы в машинах на трение затрачивалось возможно

ТАБЛИЦА IX

Значений коэф. внутреннего трения μ для различных жидкостей при различных температурах (коэф. μ дан в милиграммах на м. м.²).

$T°C$	Масла органического происхождения.			ВОДА.	Минеральные жидкости из бакинской нефти.			Касторовое масло.	Смесь черного масла с вазелином.
	Спермацетовое масло.	Оливковое масло.	Сурепное масло.		Керосин.	Соларное масло.	Нефтяные остатки.		
$17_{,5}$	—	—	—	0,0001095	0,000190	0,000722	0,02075	0,12300	0,41200
20	0,00360	0,00845	0,00937	1030	181	647	1680	9900	28500
25	296	674	750	916	164	559	1215	6720	14100
30	246	541	603	821	150	483	901	4636	8930
35	208	440	495	740	138	421	679	3248	6070
40	177	361	409	677	127	369	525	2331	4240
45	152	304	342	612	119	327	415	1715	3040
50	132	257	290	569	—	292	—	1306	2250
55	116	220	248	—	—	262	—	1018	1680

меньшая сила. Для выяснения роли смазки при вращении шипа A в подшипнике B (черт. 135) представим себе смазку в виде чрезвычайно тонкого концентрического слоя C; разобьем часть этого слоя $mn\,m_1n_1$ на бесконечно тонкие концентрические слои и посмотрим, что с ними делается при вращении шипа. Слой, ближайший к шипу, перемещается больше других; второй слой переместится несколько меньше и т. д.; наконец слой, непосредственно прилегающий к подшипнику, передвинется меньше всех слоев. Часть $mn\,m_1n_1$ примет положение $pq\,p_1q_1$, а поперечные сечения mn и m_1n_1 примут вид поверхностей pq и p_1q_1. Здесь видим, что слой 1 переместится относительно слоя 2; слой 2 — тоже относительно слоя 3 и т. д., почему между этими слоями по поверхностям их соприкасания вызовутся силы трения F, зависящие от коэф. внутреннего трения μ, совершенно так, как это показано на черт. 133. На таком смещении слоев смазки основана гидродинамическая теория трения частей в машинах, изложенная в вышеупомянутом труде профес. Н. П. Петрова. Что касается коэф. внешнего трения k, то при выводе выше приведенной формулы Кирхофа делается *частная* гипотеза, что трение T по площадке $d\omega$ соприкасания при скорости w жидкости у стенки трубки пропорционально этой скорости и выражается так:

$$T = kw \cdot d\omega; \text{ отсюда } \frac{T}{d\omega} = t = kw \text{ и } \frac{t}{\Delta} = \frac{k}{\Delta} w.$$

Скорость w вдоль стенки трубы можно выразить через среднюю скорость V в трубе в таком виде: $w = aV$. Тогда, имея в виду равенство (178), получаем:

$$\frac{t}{\Delta} = Ri = \frac{ka}{\Delta} V; \text{ следов., } i = \frac{ka}{\Delta R} V = bV \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (180).$$

Рав. (180) показывает, что в рассматриваемом случае движения жидкости в капилярах гидравлический уклон i пропорционален *первой* степени средней скорости. Закон движения жидкости, выраженный этим равенством, наз. *линейным* законом.

Движение воды в трубах большого диаметра сделалось предметом опытов уже давно; так *Купле* произвел опыты над трубами Версальского водопровода, опубликованные в 1732 г. Однако как эти опыты, так и опыты последующих экспериментаторов не могли достаточно раз'яснить законы движения в трубах. Лишь опыты французского инженера *Дарси* над трубами Парижского водопровода, произведенные в 1849—1851 г.г., выяснили влияние главных факторов на движение воды в трубах, а именно—диаметра трубы и степени шероховатости стенок трубы. Опыты

Дарси считаются по справедливости наиболее обширными и особенно тщательными и потому заслуживают полного внимания. Испытанные им трубы были: чугунные, железные, свинцовые и стеклянные; всего было испытано 19 труб диаметром от 12 до 500 м/м.; длина труб составляла 100 м.; число всех опытов было около 200. Для выяснения влияния шероховатости стенок испытывались трубы старые, бывшие в службе продолжительное время и потому внутри покрытые осадками; затем эти трубы очищались и вновь испытывались. После Дарси опыты производились очень многими лицами, из числа которых можно отметить следующих: *а*) *Лампе*, производившего опыты над чугунной трубой Данцигского водопровода диаметром $16_{,5}$ д. и длиною $13_{,25}$ верст; *б*) *Г. Смитза*, испытывавшего трубы из различных материалов диаметром до 30 д. и длиною до 12.800 ф.; *в*) *Стирнса*, подвергавшего опыту трубу диаметром 48 д. и длиною 1.747 ф.; *г*) *Фиц-Джеральда*, исследовавшего трубы диаметром 48 д. и 61 д.; *д*) *Общества немецких инженеров и архитекторов*, опыты которых опубликованы *Ибеном*; эти опыты были произведены в Гамбурге, Штутгардте и др. немецких городах над трубами городских водопроводов, диаметром от 100 до 500 м. м. и длиною от 100 до 2.200 м.; *е*) профес. *Мерчинга*, испытывавшего трубы диаметром 380 и 500 м. м. длиною 200 м. и трубы диаметром от 21 до 45 м. м.: в последних трубах опыты производились с водой и с керосином.

Из всех произведенных опытов выяснилось, что сопротивление движению в трубах большого диаметра, т.-е. един. сила трения t пропорциональна *второй* степени средней скорости в трубе; следоват.,

$$\frac{t}{\Delta} = Ri = b_1 V^2 \text{ или } i = \frac{b_1}{R} V^2 \quad \ldots\ldots\ldots (181).$$

где b_1 — коэф. пропорциональности; в дальнейшем он будет играть важную роль: он называется *основным* коэффициентом трения. Закон движения в трубах, выраженный ур. (181), назыв. *гидравлическим* законом.

Два закона движения воды в трубах. Сопоставляя результаты опытов над трубами малого и большого диаметров, выраженные формулами (180) и (181), можно было бы прийти к заключению, что в трубах малого диаметра движение происходит по линейному закону, выраженному форм. (180), а в трубах большого диаметра—по гидравлическому закону, выраженному форм. (181). Такого мнения держались гидравлики долгое время. В действительности такое заключение неверно, как это доказал впервые своими опытами английский профессор *О. Рей-*

нольде в 1883 г. Он раз'яснил, что в одной и той же трубе движение жидкости может совершаться по двум разным законам в зависимости от скорости движения, а именно: при малых скоростях—по закону линейному, а при больших скоростях—по закону гидравлическому. Если по оси абсцисс откладывать гидравлические уклоны i, а по оси ординат—скорости V (черт. 136), то по Рейнольдсу при малых скоростях зависимость между i и V выразится согласно форм. (180) *прямой* OA, а при больших скоростях — согласно форм. (181) *параболой* AB с вершиной в O и с осью OX. Скорость $AC = V_k$, при которой один закон переходит в другой, называется *критической* скоростью. По Рейнольдсу критическая скорость обратно пропорциональна диаметру трубы и температурной функции $f\ (T)$; последняя имеет тот же вид, что и в формуле Пуазёйля (форм. f в § 40). Итак, получаем:

$$V_k = \frac{A}{D \cdot f\,(T)} \qquad (182)$$

где для мер в метрах: $A = 0{,}356$; D—диаметр трубы. При капиллярах V_k получается очень большой величиной, а в трубах с значительным диаметром эта скорость получается малой; напр., при $t^0 = 0$: при $D = 0{,}1$ м. м. имеем $V_k = 35{,}6$ м., а при $D = 356$ м. м. получаем $V_k = 0{,}01$ м. В этом заключается причина, почему никто из экспериментаторов до Рейнольдса не подметил опытным путем двоякого закона движения воды в трубах. Для этого в опытах Пуазёйля нужно было наблюдать весьма большие скорости, что повидимому не входило в его планы, а в опытах Дарси, Вейсбаха и др. с трубами больших диаметров нужно было наблюдать весьма малые скорости, каторые, однако, не наблюдались, так как этими экспериментаторами они считались не имеющими практического значения. В действительности один закон не переходит сразу в другой; движение вблизи критической скорости происходит по некоторому закону промежуточному между первым и вторым законом. Так как в практике скорости в трубах не капиллярных значительно больше критической скорости, то поэтому при определении сопротивления в трубах следует пользоваться гидравлическим законом, т.-е. принимать в основание расчетов формулу (181).

§ 42. Три вида для выражения гидравлических сопротивлений в трубах. Обозрение формул для потери напора в трубах. При помощи форм. (181) можно представить гидравлические сопротивления $(h'' - h_0'')$ на ед. веса и на длину трубы L в следующих трех видах.

По уравн. (177) и (181) имеем:

$$(h'' - h_0'') = \frac{t}{\Delta}\frac{L}{R} \text{ и } \frac{t}{\Delta} = Ri = b_1 V^2$$

Поэтому:

$$(h'' - h_0'') = b_1 V^2 \frac{L}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (a).$$

Умножим и разделим это выражение на $8g$; тогда

$$(h'' - h_0'') = 8 g b_1 \cdot \frac{L}{4R} \cdot \frac{V^2}{2g} = \lambda \cdot \frac{L}{4R} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad \ldots \ldots \quad (183)$$

где обозначено:

$$\lambda = 8 g b_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (183\,a).$$

Это выражение справедливо для *всяких* поперечных сечений. Для *круглых* сечений имеем:

$$\omega = \frac{\pi D^2}{4};\ \chi = \pi D;\ R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{D}{4}.$$

Следоват., для круглых сечений это выражение принимает такой вид:

$$(h'' - h_0'') = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (184).$$

Уравн. (183 и 184) представляют *первый* вид гидравлических сопротивлений; этот вид введен в гидравлику Вейсбахом и очень удобен тем, что высота гидравлических сопротивлений выражается через высоту скорости в трубе.

Выражение (a) можно переписать еще так.

Так как

$$V = \frac{Q}{\omega}, \text{ то } \left(h'' - h_0''\right) = b_1 \frac{L}{R}\left(\frac{Q}{\omega}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (b).$$

Это выражение справедливо для *всяких* сечений. Для *круглых* сечений имеем:

$$R = \frac{D}{4} \text{ и } \omega = \frac{\pi D^2}{4},$$

а потому:

$$(h'' - h_0'') = \frac{64\, b_1}{\pi^2} \frac{Q^2 L}{D^5} = \frac{Q^2 L}{\gamma D^5} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (185)$$

где

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{64\, b_1}{\pi^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (185\,a).$$

Из выражения (185) видим, что гидравлические сопротивления в трубе диаметром D, длиною L и с расходом Q пропорциональны *квадрату* расхода и длине и обратно пропорциональны *пятой* степени диаметра;

поэтому даже небольшое изменение диаметра сильно влияет на величину гидравлических сопротивлений. Форм. (185) применяется очень часто при расчетах городских и др. водопроводов; она представляет *второй* вид гидравлических сопротивлений.

Наконец из уравн. (181) получаем формулу *Шези*:

$$V=\sqrt{\frac{1}{b_1}}\sqrt{Ri}=C\sqrt{Ri} \quad \ldots\ldots\ldots (186).$$

Здесь обозначено:

$$C=\sqrt{\frac{1}{b_1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (186\,a).$$

Формула Шези представляет *третий* вид гидравлических сопротивлений; она применяется преимущественно при рассмотрении вопросов, относящихся к равномерному движению в каналах и реках. Каждому из полученных видов соответствует особый коэффициент: $\frac{1}{\gamma}$, λ и C, которые выражаются через основной коэффициент b_1 при помощи формул (183 a), (185 a) и (186 a). Формула Шези может быть применена к трубе *всякого* поперечного сечения.

Если труба имеет *прямоугольное* поперечное сечение высотою a и шириною b, то первые два вида гидравл. сопротивлений могут быть представлены так. Имеем: $\omega=ab$; $\chi=2(a+b)$; следоват.,

$$R=\frac{\omega}{\chi}=\frac{ab}{2(a+b)}.$$

Тогда для *первого* вида гидравлич. сопротивлений получаем:

$$(h''-h_0'')=\lambda\cdot\frac{L}{4R}\cdot\frac{V^2}{2g}=\lambda\cdot\frac{a+b}{2ab}\cdot L\cdot\frac{V^2}{2g} \quad \ldots\ldots (c)$$

здесь по предыдущему $\lambda=8gb_1$.

Для *второго* вида гидравлич. сопротивлений находим:

$$(h''-h_0'')=b_1\frac{L}{R}\cdot\left(\frac{Q}{\omega}\right)^2=2b_1\frac{a+b}{a^3b^3}Q^2L \quad \ldots\ldots (d).$$

Обозрение наиболее употребительных формул для потери напора в трубах. Многие из гидравликов, производивших опыты над трубами или подвергавшие анализу опыты других ученых, представили результаты этих опытов особыми формулами. Поэтому в настоящее время мы имеем очень много формул для потери напора в трубах или, точнее говоря, для основного коэф. b_1 в уравн. (181) равномерного движения. По известному b_1 тотчас же находим и прочие коэффициенты $\frac{1}{\gamma}$, λ и C. Более известные из этих формул могут быть разделены на *пять* групп.

Заметим, что первой по времени формулой была формула столь известного гидравлика *Дюбюа.*

Первая группа формул содержит формулы для потери напора, в которых коэф. $b_1 = f(V)$; таковы форм. Прони, Эйтельвейна, Вейсбаха, Цейнера, Сен-Венана.

Ко *второй*—относятся формулы, имеющие коэф. $b_1 = f(R)$; таковы формулы Дарси, Леви, Франка, Зонне, Кристена, Горбачева, Базена.

В *третью*—входят формулы с коэф. $b_1 = f(R; V)$; это наиболее многочисленная группа; сюда входят следущие формулы: Гагена, Лампе, Линдлея, Унвинна, Гоклера, Вехаге, О. Рейнольдса, Фламана, Ланга, Биля, Шмира, профес. Максименко и др.

В *четвертую*—входят формулы с коэф. $b_1 = f(R, i)$; это малочисленная группа; сюда относятся формулы Гангилье-Куттера, Невиля.

Пятую группу образуют формулы, в которых коэф. b_1 равен постоянной величине; напр., формулы Дюпюи, Бокса, Бирдмора, Джаксона, Лесли, Фаннинга и др.

При рассмотрении формул нужно обратить особенное внимание на то, введен ли в рассматриваемую формулу коэффициент, характеризующий *шероховатость* стенок трубы. Во многих формулах, более старых по времени появления их в литературе, шероховатость совсем не принята во внимание, почему каждая из таких формул дает потерю одинаковую для труб с различною шероховатостью стенок: старых и новых; керамиковых; деревянных и т. п. В действительности шероховатость этих труб различна, почему и необходимо этот фактор вводить в формулы. Дарси был первым гидравликом, выяснившим путем опыта влияние шероховатости на движение воды в трубах. Формулы более новые учитывают шероховатость стенок и потому в эти формулы или вводится особый *коэффициент шероховатости* или же в основном коэф. трения $b_1 = f(R, V)$, степень при V берется различной для труб с различною шероховатостью, напр., в формуле О. Рейнольдса.

По виду формулы для коэф. b_1 могут быть одночленные или двучленные; в первом случае они часто называются логорифмическими. Из очень большого числа выражений для b_1 приведем только несколько наиболее употребительных или более новых; вместе с тем они являются примерными формулами для вышеупомянутых пяти групп.

1) Формула *Прони* из первой группы. Знаменитый французский физик *Кулон* первый высказал гипотезу, что гидравл. сопротивления в

трубах, выражаемые ед. силой трения t, могут быть представлены целой функцией *второй* степени от V; таким образом по Кулону:

$$\frac{t}{\Delta} = Ri = b_1 V^2 = bV + aV^2 = \left(a + \frac{b}{V}\right) V^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (187)$$

следоват., основной коэффициент

$$b_1 = a + \frac{b}{V}.$$

При составлении этого выражения Кулон полагал, что сопротивления в трубе представляют результат действия двух факторов. Первый фактор — это внешнее трение, т.-е. трение воды о стенки трубы; по Кулону он должен зависеть от первой степени V, т.-е. должен выражаться членом bV. Второй фактор является вследствие того, что частицы движутся в трубе не по прямым линиям, а по пересекающимся кривым, почему постоянно соударяются и живая сила частиц будет уменьшаться от этих ударов; вот почему этот фактор должен зависеть от второй степени V и выражаться членом aV^2. Французский ученый *Прони* воспользовался этой гипотезой Кулона и на основании известных в то время опытов определил численные значения коэффициентов a и b, которые оказались равными:

для метров $\begin{cases} a = 0{,}0003483 \\ b = 0{,}0000173 \end{cases}$ для футов $\begin{cases} a = 0{,}0001061 \\ b = 0{,}0000173 \end{cases}$

Эти коэффициенты постоянные, независящие ни от диаметра, ни от скорости, ни от шероховатости. Это последнее обстоятельство противоречит очевидности и об'ясняется тем, что до Прони, как затем долго и после него, в гидравлике господствовала гипотеза *Дюбюа*, которая отвергала влияние шероховатости на движение воды. По этой гипотезе принимается, что около стенок трубы образуется неподвижный и весьма тонкий слой воды, внутри которого движется остальная масса жидкости, и который таким образом уничтожает всякое влияние шероховатости стенок. Гипотеза Дюбюа удерживалась в науке до вышеупомянутых опытов Дарси, которые показали, как и следовало ожидать, что шероховатость влияет весьма сильно на движение. Гипотеза о существовании неподвижного слоя удерживается и в настоящее время с тем существенным различием, что слой предполагается на столько тонким, что шероховатость может вполне влиять на движение жидкости.

2) Формула *Вейсбаха* (из первой группы) имеет вид:

$$\frac{t}{\Delta} = Ri = b_1 V^2 = \left(a + \frac{b}{\sqrt{V}}\right) V^2 \quad \ldots \ldots \ldots (188).$$

Следовательно,

$$b_1 = a + \frac{b}{\sqrt{V}}.$$

Здесь коэф. a и b постоянные и равные

для метров: $a = 0{,}0001835$; $b = 0{,}0001208$
„ футов: $a = 0{,}0000559$; $b = 0{,}0000667$.

Шероховатость стенок в этой формуле не принята во внимание.

Эта формула часто применяется в России и в Англии, между прочим при расчетах труб для водяного центрального отопления, где диаметры и скорость очень малы, а также при расчетах чугунных труб под железнодорожными насыпями, где диаметры и скорости очень велики.

3) Формула *Дарси* (из второй группы) имеет вид:

$$\frac{t}{\Delta} = Ri = b_1 V^2 = \left(a + \frac{b}{R}\right) V^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (189).$$

Следовательно,

$$b_1 = a + \frac{b}{R}.$$

Здесь коэф. a и b имеют различную величину для новых и старых труб (т.-е. покрытых внутри осадками); для *новых* труб:

для метров: $a = 0{,}0002535$; $b = 0{,}00000162$
„ футов: $a = 0{,}00007726$; $b = 0{,}00000162$.

Эту формулу Дарси составил на основании вышеупомянутых своих опытов. Для *старых* труб Дарси берет значения a и b в *два* раза больше. Однако впоследствии опыты других гидравликов показали, что шероховатость влияет сильнее при трубах с небольшими диаметрами и гораздо слабее при трубах с большими диаметрами, а потому это правило Дарси не вполне точно. При малых D действительно нужно брать a и b для старых труб в два раза больше (и даже более), чем для новых. Но при больших D коэф. a и b для старых труб получим, если коэф. для новых труб увеличим в *полтора* раза, как это было сделано при расчете труб *Московского водопровода*, для которого было принято:

для метров: $a = 0{,}0003747$ $b = 0{,}00000241$
„ футов: $a = 0{,}00011566$ $b = 0{,}00000241$.

Если руководствоваться этими данными, то в вышеприведенной формуле (185):

$$(h'' - h_0'') = \frac{Q^2 L}{\gamma D^5}.$$

коэффициент $\frac{1}{\gamma}$ равен:

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{64b_1}{\pi^2}=0{,}00075\left(1+\frac{1}{12D}\right)\ .\ .\ .\ \text{для футов}$$

$$\text{и}\ \frac{1}{\gamma}=187\left(1+\frac{1}{D}\right),\ \text{если}\ D\ \text{в дюймах, а}\ Q\ \text{и}\ L\ \text{в футах.}$$

4) Формула *Базена* (из второй группы) имеет вид:

$$\frac{t}{\Delta}=Ri=b_1V^2=\alpha^2\left(\beta+\frac{\gamma}{\sqrt{R}}\right)^2V^2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (190)$$

Здесь основной коэффициент:

$$b_1=\alpha^2\left(\beta+\frac{\gamma}{\sqrt{R}}\right)^2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (190a)$$

где $\alpha=0{,}0115$ и $\frac{1}{\alpha}=87$ для всяких мер; коэф. $\beta=1$ для метров и $\beta=0{,}552$ для футов; коэф. γ есть коэф. шероховатости, равный:

$\gamma=0{,}06$ для русел I категории с очень гладкою обделкою (цементная, деревянная гладко-выструганная; трубы новые асфальтированные);

$\gamma=0{,}16$ для русел II категории с гладкою обделкою (кирпичная, тесовая, дощатая; трубы старые асфальтированные);

$\gamma=0{,}46$ для русел III категории каменных с грубою обделкою; трубы неасфальтированные.

Эта формула составлена Базеном на основании измерений в реках и каналах и предназначена им для расчета каналов. В виду тожества закона движения воды в трубах и каналах можно этою формулою пользоваться также для расчета труб.

5) Формула *Лампе* (из третьей группы), полученная им на основании собственных опытов, о которых было упомянуто выше, имеет такой логарифмический вид:

$$\frac{t}{\Delta}=Ri=b_1V^2=a\frac{V^m}{R^n}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (191)$$

Здесь: $m=1{,}802$ и $n=0{,}25$; коэффициент a равен

для метров: $a=0{,}0001336$; для футов: $a=0{,}00006934$.

По Г. Смитзу эта формула хорошо согласуется с опытами при диаметрах труб, как больших, так и малых, почему она пользуется большим доверием; к сожалению, она не заключает в себе коэф. шероховатости.

6) Формула *Линдлея* (из третьей группы). Известный строитель водопроводов и канализаций Линдлей при расчетах водопроводов применяет формулу следующего вида:

$$\frac{t}{\Delta}=Ri=b_1V^2=a\frac{V^m}{R^n}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (192)$$

где: $m=1{,}8$ и $n=0{,}25$; коэфициент a равен

для *новых* труб:

для метров: $a=0{,}00015$; для футов: $a=0{,}00007803$;

для *старых* труб:

для метров: $a=0{,}00018$; для футов: $a=0{,}00009364$.

При расчетах кирпичных каналов, керамиковых труб и ливнеотводов для канализаций Линдлей принимает;

для метров: $a=0{,}00025$; для футов: $a=0{,}00013$.

7) Формула *Фламана* (из третьей группы) имеет вид:

$$\frac{t}{\Delta}=Ri=b_1V^2=a\frac{V^m}{R^n}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (193)$$

где: $m=1{,}75$ и $n=0{,}25$; коэффициент a равен

для труб *чистых*:

для метров: $a=0{,}0001308$; для футов: $a=0{,}00007222$;

для труб с небольшими *осадками*:

для метров: $a=0{,}0001626$; для футов: $a=0{,}00008979$.

8) Формула *проф. Максименко* (из третьей группы) следующего вида:

$$\frac{t}{\Delta}=Ri=b_1V^2=0{,}00004k\left\{\frac{a}{R^{\frac{1}{2}}}+\frac{0{,}35(k-3)^2}{V}\right\}V^2\ \ldots \quad (194)$$

Следоват., основной коэф. b_1 равен:

$$b_1=0{,}00004k\left\{\frac{a}{R^{\frac{1}{2}}}+\frac{0{,}35(k-3)^2}{V}\right\}$$

Здесь коэф. $a=2{,}438$ для метров и $a=1$ для футов. Коэффициент k представляет коэф. шероховатости, изменяющейся в пределах от 0,82 до 3,5; значения k приведены в следующей таблице, в которой помещены также значения коэф. шероховатости n в формуле Гангилье-Куттера, о которой см. ниже.

Таблица X

коэф. шероховатости k в формуле проф. Максименко и коэф. шероховатости n в формуле Гангилье-Куттера для поверхностей с различною шероховатостью.

Поверхность.	Коэффиц.		Поверхность.	Коэффициент.	
	k	n		k	n
1. Поверхность покрытая чистым цементом.	0,82	0,010	8. Новые железные трубы асфальтированные, клепанные. . .	1,04	0,011
2. Стеклянные трубки малого диаметра . .	0,84	—	9. Трубы асфальтированные с небольшими осадками	1,25	0,013
3. Новые чугунные трубы малого диаметра асфальтированные и неасфальтирован. . .	0,85	—	10. Деревянные трубы, составленные из клепок, подобно бочкам .	1,4—1,5	0,012—0,013
4. Новые керамиковые трубы глазурованн. .	0,90	0,010	11. Кирпичная кладка не очень гладкая . .	1,60	0,013
5. Кирпичная кладка очень гладкая. . . .	0,90	—	12. Трубы асфальтированные, с значительными осадками . . .	1,50	0,013
6. Новые чугунные трубы асфальтированн. .	0,96	0,011	13. Деревянные трубы сверленные.	2	—
7. Поверхность покрытая цементным раствором 1:3.	1,02	0,011	14. Старые неасфальтированные чугунные и железные трубы. .	2,5—3	0,014

Итак, в вышеприведенной формуле (194) ед. сила трения t выражена согласно вышеупомянутой гипотезе Кулона двучленом второй степени от V такого вида:

$$\frac{t}{\Delta} = \alpha V + \beta V^2, \quad \text{где } \alpha = f(k) \quad \text{и} \quad \beta = f_1(R\,;k).$$

Эта формула была опубликована автором в 1888 г.

9) Формула *Гангилье-Куттера* (из четвертой группы) следующего вида:

$$\frac{t}{\Delta} = Ri = b_1 V^2 = \left\{ \frac{1 + \frac{cn}{\sqrt{R}}}{c + \frac{l}{n}} \right\}^2 V^2 \qquad (195).$$

Здесь: $c = a + \frac{m}{i}$; a, m и l суть коэф. равные: $a=23$ и $m=0{,}00155$ для всяких мер; $l=1$ для метров; $l=1{,}811$ для футов и $l=1{,}4607$ для саженей; i — гидравлический уклон; n — коэфф. шероховатости для свободных потоков (каналов и рек), изменяющийся от 0,0085 до 0,06; для труб следует брать n согласно вышеприведенной таблице. Эта формула, довольно сложная по виду и не всегда удобная для вычислений, заслуживает особенного внимания, так как заключающийся в ней коэф. n дает возможность расчитывать русла с разнообразною шероховатостью стенок. Надо иметь в виду, что авторы этой формулы не предназначали ее для расчета труб, а ограничивались применением ее к движению в свободных потоках, т.-е. в каналах и реках, следоват., к движению больших масс воды. При выводе ее они пользовались наблюдениями, произведенными в реках и каналах.

По Г. Смитзу эта формула дает хорошие результаты для труб большого диаметра (от 3 ф. и более) при очень малых скоростях.

Для расчетов труб можно вместо предыдущей формулы (195) применять *сокращенную* формулу Гангилье-Куттера, имеющую следующий вид:

$$\frac{l}{\Delta} = Ri = b_1 V^2 = \left(\frac{b + c\sqrt{R}}{a\sqrt{R}} \right)^2 V^2 \qquad (196),$$

где для метров: $a=100$; $c=1$ и b — коэф. шероховатости; для труб новых $b=0{,}15$ и для труб старых $b=0{,}35$. При расчете труб в проэкте нового Петроградского водопровода эта формула применялась с коэф. $b=0{,}25$.

10) Формулы с *постоянным* коэффициентом b_1 составляют *пятую* группу. Сюда относятся очень многие формулы, из них укажем на формулы *Дюпюи*, *Бирдмора* и *Фаннинга.* В нижеследующей таблице XI приведены по этим формулам значения коэф. b_1; $\frac{1}{\gamma}$, λ и C для метров и футов. Формула Дюпюи постоянно применяется при расчете водопроводов.

Таблица XI

коэффициентов b_1, $\frac{1}{\gamma}$; λ *и* C *для метров и футов в формулах Дюпюи, Фаннинга* и *Бирдмора.*

$$\frac{t}{\Delta}=Ri=b_1 V^2; \quad \frac{1}{\gamma}=\frac{64 b_1}{\pi^2}; \quad \lambda=8gb; \quad C=\sqrt{\frac{1}{b_1}}.$$

	Для метров.			Для футов.			λ
	b_1	$\frac{1}{\gamma}$	C	b_1	$\frac{1}{\gamma}$	C	
По *Дюпюи*	0,0003855	0,0025	52,1	0,0001175	0,000762	92,25	0,03025
По *Фаннингу:*							
для новых труб . .	0,0003281	0,00213	55,2	0,0001	0,000648	100	0,02576
„ старых труб. .	0,0004075	0,00264	49,5	0,000127	0,000824	88,7	0,03280
„ ст. труб очень больших диаметров	0,0004423	0,002868	47,5	0,0001451	0,0009409	83	0,03738
для старых труб с осадками	0,0005969	0,00387	40,9	0,0001860	0,001206	73,3	0,04791
По *Бирдмору* или *Джаксону* или *Лесли*	0,0003281	0,00213	55,2	0,0001	0,000648	100	0,02576

Чтобы можно было лучше сравнивать результаты, получаемые по различным формулам, с результатами опытов, приводим диаграмму, представленную на черт. 136 *a*. Эта диаграмма составлена американским гидравликом *Г. Смитзом* на основании всех известных опытов над трубами, внутренняя поверхность которых была довольно гладкой; она приведена в сочинении: *H. Smith*. Hydraulics. 1886. Сюда вошли опыты с трубами, диаметры которых изменялись от 0,04 до 4 ф., а скорости— от 0,5 до 14,5 ф.

Кроме опытов с трубами, где движение воды было под напором, Г. Смитз ввел в диаграмму результаты опытов с каменными трубами, где движение было без напора, так как законы движения воды под напором и без напора одни и те же; размеры же каменных труб значительно больше, чем чугунных. На черт. 136 *a* по оси абсцисс отложены скорости в футах, а по оси ординат—значения коэффициента $C=\sqrt{\frac{1}{b_1}}$, при чем для удобства чертежа значение C в точке O принято

равным 65. На диаграмме показаны кривые коэф. C для труб диаметром 0,1; 1,5; 2; 3; 4 и 5 футов, при скоростях от 0,5 до 14,5 ф. Из обозрения этой диаграммы выводим два следующих важных заключений:

а) Для каждой трубы коэф. C увеличивается с увеличением скорости.

б) При одной и той же скорости коэф. C увеличивается с увеличением диаметра.

В заключение приводим таблицы XII и XIII, в которых приведены результаты вычислений по формулам различных авторов для *новых* и *старых* асфальтированных труб. Для *новых* труб диаметры в таблице XII изменяются от 0,1 до 4 ф. и скорости—от 1 ф. до 15,5 ф. В таблице приведены значения скорости V, когда заданы диаметр трубы D и гидравлический уклон i; тогда из уравнения;

$$Ri = b_1 V^2 \text{ получаем; } V = \sqrt{\frac{1}{b_1}}\sqrt{Ri}.$$

При этом для *новых* труб были взяты следующие значения коэффициентов: в форм. проф. Максименко — $k=1$; в форм. Г. Куттера — $n=0{,}011$; в сокращенной форм. Г. Куттера — $b=0{,}15$; в формуле Базена — I категория; в форм. Фаннинга — $b_1=0{,}0001$. Из обозрения таблицы для новых труб видно, что лучшие результаты получаются по форм. Лампе, проф. Максименко, Фламана.

Для удобства обозрения курсивом набраны числа, отклоняющиеся от результатов опыта не более 10% в ту или другую сторону.

Для *старых* труб диаметры в таблице XIII изменяются от 0,663 ф. (8 д.) до 4 ф. и скорости от 1,69 ф. до 20,14 ф. В таблице приведены значения коэф. $C=\sqrt{\frac{1}{b_1}}$, который определяется по заданным D и V.

При этом для *старых* труб были взяты следующие значения коэффициентов: в форм. Дарси—коэффициенты удвоенные сравнительно с коэф. для новых труб; в форм. Дарси, примененной для Московских водопроводов, коэффициенты в полтора раза более, чем для новых труб; в форм. проф. Максименко — $k=1{,}25$; в форм. Г. и Куттера — $n=0{,}013$; в форм. Базена — II категория; в форм. Фаннинга — $b_1=0{,}000127$; в сокращенной форм. Г. и Куттера — $b=0{,}25$. Как и в предыдущей таблице здесь курсивом набраны числа, отклоняющиеся от результатов опыта не более 10% в ту или другую сторону. Из обозрения этой таблицы видно, что лучшие результаты получаются по форм. Фламана, Линдлея, проф. Максименко, Вейсбаха.

Таблица XII

скоростей (в футах) по опыту и по различным формулам для *новых* асфальтированных труб.

D футы.	Гидравл. уклон i.	1 Смитз (опыт).	2 Прони.	3 Вейсбах.	4 Дарси.	5 Фламан.	6 Лампе.	7 Максименко.	8 Ланг.	9 Билъ.	10 Г.-Куттер.	11 Г.-Куттер сокращ.	12 Базен.	13 Фаннинг.	14 Дюпюи.	15 Линдлей.	16 Бирдмор.
0,1	0,005	0,87	1,01	1,01	0,94	0,80	0,83	0,87	0,16	0,70	0,59	0,75	1,14	1,12	1,03	0,78	1,12
	0,15	6,21	5,86	6,78	5,14	5,60	5,48	5,83	4,00	4, 61	3,24	4,08	5,72	6,12	5,65	5,15	6,12
	0,40	10,46	9,62	11,50	8,39	14,53	9,45	9,70	8,65	7,65	5,29	6,66	9,34	10,00	9,22	8,88	9,99
0,5	0,001	0,99	1,01	1,01	1,18	1,01	1,04	1,01	1,68	0,97	0,98	1,16	1,37	1,12	1,03	0,97	1,12
	0,025	6,04	5,34	6,13	5,89	6,35	6,20	6,41	6,73	5,60	5,02	5.80	6,86	5,59	5,16	5,83	5,59
	0,065	10,10	8,67	10,28	9,49	10,96	10,56	10,58	11,68	9,16	8,10	9,35	11,06	9,01	8,32	9,90	9,02
1,0	0,0004	0,95	0,89	0,89	1,09	0,98	1,01	0,91	0,86	1,02	1,03	1,17	1,29	1,00	0,93	0,95	1,01
	0,025	9,56	7,59	8,94	8,64	10,42	10.03	10,03	10,80	9,18	8,50	9,28	10,24	7,91	7,29	9,42	7,90
	0,10	19,60	15,30	18,70	·17,30	23,01	21,60	20,53	22,36	17,96	17,00	18,56	20,47	15,81	14,59	20,35	15,82
2,0	0,00017	1,00	0,82	0,81	1,03	0,99	1,02	0,87	1,01	1.04	1,08	1,21	1,26	0,92	0,85	0,95	0,92
	0,003	4,90	3,68	4,10	4,32	5,09	5,00	5,05	5,28	4,70	4,83	5,07	5,29	3,87	3,57	4,69	3,87
	0,025	15,43	10,77	12,96	12,46	17,09	16,22	15.63	15,97	13,79	13,99	14,63	15,27	11,18	10,32	15,23	11,19
4,0	0,00007	1,03	0,73	0,72	0,94	0,97	1,01	0,80	1,04	1,03	1,09	1,19	1,19	0,84	0,77	0,94	0,83
	0,0012	4,84	3,28	3,63	3,90	4,95	4,87	4,82	4,88	4,52	4,87	4,93	4,92	3,46	3,20	4,57	3,47
	0,01	15,50	9,63	11,50	11,30	16,62	15,80	15,12	14,44	13,22	14,10	14,24	14,22	10,00	9,22	14,83	9,99

Таблица XIII

коэф. C (для футов) по опыту и по различным формулам для *старых* асфальтированных труб

$$V=C\sqrt{Ri};\quad C=\sqrt{\frac{1}{b_1}}.$$

D футы.	V футы.	1 Смитз (опыт).	2 Вейсбах.	3 Дарси.	4 Дарси Москов. водопр.	5 Фламан.	6 Линдлей.	7 Макси-менко.	8 Ланг.	9 Биль.	10 Г.-Куттер.	11 Г.-Куттер сокращ.	12 Базен.	13 Фаннинг.	14 Бирдмор.	15 Дюпюи.	16 Прони.
0,663	1,69	95,8	96,6	75,8	87,5	89,4	88,5	95,3	83,1	70,2	77,0	85,8	92,1	88,7	100,0	92,2	92,7
0,83	2,68	95,1	101,7	76,7	88,6	97,4	93,8	103,1	97,2	79,7	82,3	90,8	96,3	88,7	100,0	92,2	94,3
0,911	4,71	107,1	107,4	77,0	88,9	105,8	100,4	109,3	102,5	86,9	84,6	92,9	98,1	88,7	100,0	92,2	95,4
0,911	10,02	115,5	114,1	77,0	88,9	116,7	107,9	113,4	107,8	105,2	84,7	92,9	98,1	88,7	100,0	92,2	96,3
1,06	4,60	109,4	107,2	77,4	89,4	107,4	102,0	111,6	103,6	89,4	87,9	96,4	100,8	88,7	100,0	92,2	95,4
1,06	10,71	114,4	114,5	77,4	89,4	120,2	111,0	115,7	107,9	108,0	88,1	96,4	100,8	88,7	100,0	92,2	96,3
1,23	4,38	111,6	106,7	77,8	89,9	108,8	103,5	112,3	104,5	91,0	91,2	99,7	103,5	88,7	100,0	92,2	95,4
1,23	12,09	121,3	115,4	77,8	89,9	124,3	114,4	118,2	109,9	111,0	91,7	99,7	103,5	88,7	100,0	92,2	96,4
1,33	14,50	115,4	116.7	78,0	90,1	128,5	117,7	119,2	110,7	113,2	93,3	102,4	104,9	88,7	100,0	92,2	96,5
1,42	20,14	131,1	119,1	78,2	90,3	135,0	122,6	121,8	111,6	115,1	94,8	102,9	106,0	88,7	100,0	92,2	96,7
2,15	12,61	134.1	115,7	78,9	91,1	134,1	123,2	126,3	111,5	121,0	104,0	112,0	113,0	88,7	100,0	92,2	96,4
2,43	10,78	127,8	102,1	79,1	91,3	133,5	123,2	127,4	111,4	120,4	106,7	114,7	115,0	88,7	100,0	92,2	96,3
4,0	3,46	112,4	104,4	79,6	91,9	122,4	117,1	123,6	109,7	116,9	116,4	124,7	122,2	88,7	100,0	92,2	94,9
4,0	6,20	144,1	110,0	79,6	91,9	132,6	124,0	130,6	111,3	124,7	117,1	124,7	122,2	88,7	100,0	92,2	95,8

Выбор формулы для расчета труб. При выборе формулы для рассчета труб нужно знать цель, с которою производится этот расчет.

1) Чаще всего эта цель может быть следующая. Для проекта водопровода требуется определить диаметры труб по заданным расходам и напорам. Здесь нужно иметь в виду, что водопровод будет существовать неопределенно долгое время и что поэтому водопроводные трубы со временем покроются внутри осадками, т.-е. из новых сделаются старыми, и что в таком виде трубы должны давать требующееся по расчету количество воды. Отсюда следует, что водопроводные трубы нужно всегда расчитывать как *старые.* Затем нужно принять в соображение, что уже с давнего времени трубы при своем изготовлении всегда асфальтируются; эта асфальтировка делает внутреннюю поверхность трубы очень гладкой и защищает эту поверхность от вредного влияния осадков, образующихся от действия воды. Поэтому при расчете труб нужно брать в формулах коэффициенты, соответствующие *старым асфальтированным* трубам.

При рассмотрении таблицы XIII было выше показано, что лучшие, в смысле большой согласованности с опытными данными, результаты для старых асфальтированных труб получаются по форм.: Фламана, Линдлея, проф. Максименко, Вейсбаха.

Полученные по расчету диаметры труб нужно по требованиям практики округлять до ближайшего большего или меньшего диаметра в целых дюймах, согласно русскому сортаменту труб, установленному V русским водопроводным с'ездом в 1901 году. По этому сортаменту трубы могут иметь только следующие диаметры: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36, 40 и 48 дюймов.

Диаметры труб в миллиметрах по этому сортаменту будут следующие: 100, 125, 150, 175, 200, 225, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 750, 800, 900, 1000 и 1200 мм.

По этой причине при расчете труб можно пользоваться, кроме вышеуказанных 4 формул, также и другими; при этом надо иметь в виду и то обстоятельство, что одни формулы дают хорошие результаты для труб небольшого диаметра, а другие наоборот — для труб большого диаметра. На этом основании для расчета труб, диаметром не более 1 ф., кроме указанных 4 формул, можно пользоваться формулами: Дарси с коэфициентами московского водопровода, Фаннинга, Бирдмора, Дюпюи; для труб диаметром от 1 ф. до 4 фут.—сокращенной формулой Г. и Куттера; наконец, для труб большого и малого диаметра — формулами Ланга и Биля.

2) При выборе формулы надо обращать внимание на диаметр трубы, который может быть или очень большим или очень малым.

Если труба должна иметь *очень большой диаметр*, напр., от 3,5 ф. до 5 ф., как это требуется для чугунных труб для пропуска вод под железнодорожными насыпями, то наиболее надежные результаты получаются по форм. Фламана, проф. Максименко, Линдлея и Базена с вышеприведенными коэффициентами, если только эти трубы будут асфальтированными. Если же эти трубы не предполагается асфальтировать, как это делается в настоящее время, то надо пользоваться формулами: Дарси с коэффициентом для старых труб, Фаннинга с коэф. $b_1 = 0{,}0001451$ (для футов), проф. Максименко с коэф. $k = 3$ и Базена с коэф. для III категории.

Для расчета труб с *очень малыми* диаметрами, напр., для труб центрального водяного отопления, применяются формулы Вейсбаха и Биля.

3) При расчете *железо-бетонных* труб нужно иметь в виду их шероховатость при самом их изготовлении; если поверхность труб будет затертой, то такие трубы следует расчитывать как старые асфальтированные по вышеуказанным формулам; если поверхность труб будет незатертой, то трубы нужно расчитывать, как старые неасфальтированные по приведенным в пункте 2 формулам.

4) При расчете труб *деревянных* нужно принимать в соображение, что такие трубы могут быть из досок или гладко выстроганных или нестроганных. Для расчета их можно применять формулы: Базена (I категория для первых труб и II категория—для вторых); проф. Максименко ($k = 1{,}5$ — для труб из клепок; $k = 2$ — для труб сверленых); Г. и Куттера ($n = 0{,}011$—для гладко выстроганных досок, $n = 0{,}013$— для досок нестроганных).

§ 43. Местные сопротивления в трубах.

В предыдущих §§ рассматривались *общие* гидравлические сопротивления, т.-е. сопротивления, проявляющиеся по длине трубы, которая предполагается прямой. Они выражались величиной гидравлического уклона i, т.-е. величиной гидравлических сопротивлений на ед. длины трубы L; следовательно, для всей трубы общие гидравлические сопротивления равны

$$(h'' - h_0'')_L = Li.$$

Кроме этих сопротивлений могут быть еще *местные* сопротивления, а именно: 1) при входе в трубу из резервуара; 2) в закруглениях; 3) в коленах; 4) в ответвлениях; 5) в задвижках; 6) в кранах; 7) в вентилях

8) в клапанах разного устройства и разного назначения; 9) при внезапном увеличении диаметра трубы; 10) при внезапном уменьшении диаметра трубы; 11) в диафрагмах и т. п.

При всех этих устройствах гидравлическия сопротивления проявляются или вследствие изменения направления движения жидкости, или вследствие быстрого уменьшения скорости жидкости, или вследствие той и другой причины, действующих совместно.

При рассмотрении местных гидравлических сопротивлений необходимо решать *две* задачи: 1) требуется определить величину местного сопротивления, вызываемого постановкой на трубе: крана, вентиля, клапана, закругления и т. п.; эта задача решается помощью особых эмпирических формул; 2) требуется построить линии давлений и скоростей для той части трубы, на которой проявляется местное сопротивление; построение этих линий делается согласно с изложенным в § 15.

1) **Сопротивление при входе в трубу.** Струя, входя в трубу из резервуара, сжимается и в небольшом расстоянии от входа имеет в M_1 сжатое сечение $\alpha\omega$ (черт. 137); затем струя быстро расширяется и в M наполняет все сечение трубы ω. Гидравлические сопротивления проявляются на линии M_1M, т.-е. между сжатым и расширенным сечениями и определяются по теореме Борда (§ 23).

Если рассматривать часть трубы от начала лишь на протяжении $4D$, то движение воды в этой части трубы, очевидно, тожественно с тем, что происходит в цилиндрической насадке такой же длины, а потому гидравлические сопротивления в них будут также тожественны. В § 27 было найдено, что для цилиндрической насадки, длиною около $4D$, гидравл. сопротивления равны

$$\Sigma(h''-h_0'')=\zeta_1\frac{V_p^2}{2g}=\left(\frac{1}{\mu^2}-1\right)\frac{V^2}{2g}\quad\ldots\ldots(115),$$

где $\mu=0{,}80-0{,}82$ есть коэф. расхода для такой насадки. Это выражение представляет высоту гидравлических сопротивлений при входе в трубу. Приблизительно

$$\Sigma(h''-h_0'')=0{,}5\,\frac{V_p^2}{2g}\,.$$

Построим теперь линии скоростей и давлений, соответствующих этому местному сопротивлению. Пусть на траектории M_0M_1M скорость изменяется таким образом: в части M_0m скорость постоянная и равная V_0; в части mM_1 скорость увеличивается от V_0 до V_1; в части M_1M скорость уменьшается от V_1 до V_p. Сообразно с этим изменением

скорости, строим линию скоростей так. От горизонта воды в резервуаре отложим вверх высоту $\frac{V_0^2}{2g}$ и проводим горизонтальную плоскость NN, которая представляет плоскость напора. От этой плоскости откладываем вниз отрезок $gb=\frac{V_1^2}{2g}$ равный высоте скорости в сжатом сечении, т.-е. в точке M_1, и отрезок $hc=\frac{V_p^2}{2g}$ равный высоте скорости в точке M. Соединяя точки a, b и c плавной кривой, получаем линию скоростей $abcmd$. На протяжении M_0M_1 гидравл. сопротивления можно выразить через $\zeta\frac{V_1^2}{2g}$, т.-е. как при вытекании струи на воздух, и на длине M_0M — через $\zeta_1\frac{V_p^2}{2g}$, т.-е. как при вытекании через цилиндрическую насадку. Отложим вниз от линии скоростей отрезки:

$$be=\zeta\frac{V_1^2}{2g} \text{ и } cf=\zeta_1\frac{V_p^2}{2g}$$

получим кривую давлений aef; приблизительно $cf=0{,}5\frac{V_p^2}{2g}=0{,}5hc$.

От точки f проводим прямую fk под углом α к горизонту; этот угол определяется из выше найденного равенства (179):

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\beta=i,$$

где i — гидравлический уклон трубы и β — угол, составляемый продольною осью трубы с горизонтом. Так как

$$(h''-h_0'')=\frac{Q^2L}{\gamma D^5}, \text{ то } i=\frac{h''-h_0''}{L}=\frac{Q^2}{\gamma D^5}.$$

Какое-либо вертикальное расстояние mm_1 между кривой скоростей и кривой давлений равно высоте гидравлических сопротивлений на длине M_0M'.

2) **Сопротивления** при внезапном *увеличении диаметра*, при внезапном *уменьшении диаметра*, а также сопротивления при проходе воды через *диафрагму* были разобраны в § 23 и показаны на черт. 89—92.

3) **Сопротивление в закруглении трубы.** Гидравлические сопротивления в закруглении проявляются вследствие того, что частицы в точке a (черт. 138), двигаясь по инерции, срываются со стенки трубы и описывают траекторию abc; в точке c частицы вновь движутся по стенке. Между линией abc и стенкой adc образуется полость, наполненная жидкостью, находящеюся в состоянии близком к покою; частицы, лежащие в этой полости, не принадлежат к струе. В be получается сжатое сечение струи, которая затем быстро расширяется и в ef на-

полняет все сечение трубы. На протяжении M_1M проявляются гидравлические сопротивления, определяемые по теореме Борда, так как здесь происходит быстрое расширение струи при существовании полости bd. Скорость V_1 в сечении be переходит в V_p, при чем угол между направлениями скоростей равен ε. Итак, здесь имеет место быстрое изменение не только величины скорости, но также и направления. Высоту гидравлических сопротивлений на длине M_0M можно выразить так:

$$(h'' - h_0'') = \zeta \frac{V_p^2}{2g}.$$

Построим для этого случая линии скоростей и давлений. Плоскость напора NN получим, если от горизонта воды в напорном резервуаре отложим вверх высоту $\frac{V_0^2}{2g}$ начальной скорости V_0 и проведем горизонтальную плоскость. От этой плоскости вниз по вертикалям, восставленным из точек M_0, M_1 и M, откладываем высоты:

$$\frac{V_p^2}{2g};\ \frac{V_1^2}{2g}\ \text{ и }\ \frac{V_p^2}{2g}.$$

Соединяя полученные точки h, i, k плавной кривой и проводя gh и kl параллельно плоскости напора, получаем кривую скоростей.

Пусть mn представляет линию давлений для части трубы, лежащей влево от M_0; следовательно, отрезок hn представляет высоту гидравлических сопротивлений для трубы от напорного резервуара до M_0. Если бы на протяжении M_0M вовсе не было гидравлических сопротивлений, то линия давлений для этой части трубы представилась бы линией $np'q'$ параллельной линии скоростей hik; но так как закругление вызывает гидравлические сопротивления, высота которых равна $\zeta \frac{V_p^2}{2g}$, то отложив от q' вниз отрезок $qq' = \zeta \frac{V_p^2}{2g}$ и проведя кривую npq, получим линию давлений для закругления. Вертикальные расстояния между обеими полученными кривыми представляют высоты гидравлических сопротивлений, начиная от M_0 до рассматриваемой точки на линии тока. От точки q идет линия давлений qr, составляющая с горизонтом угол α_1, определяемый из равенства: $\operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \cos\beta_1 = i$; линия давлений mn составляет с горизонтом угол α, который определяется из равенства: $\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\beta = i$; здесь β и β_1 суть углы, составляемые продольною осью трубы с горизонтом, а i — гидравлический уклон трубы, при чем:

$$i = \frac{Q^2}{\gamma D^5}.$$

Определением гидравлических сопротивлений в закруглениях занимались *Дюбюа*, *Вейсбах* и в последнее время *Александер*.

Если закругление описано радиусом ρ и имеет при центре угол β, то, обозначая через r радиус сечения трубы, при $\frac{r}{\rho}$ довольно малом, напр. меньших 0,05, можно вычислять ζ по следующей формуле *Грасхофа*:

$$\zeta = a\beta\left(1-\frac{r}{\rho}\right)\sqrt{\frac{r}{\rho}} \qquad (197),$$

где $a = 0{,}00416$ и β, угол выраженный в градусах.

Для закругления в 90° Вейсбах на основании опытов своих и Дюбюа дает выражение для ζ:

$$\zeta = a + b\left(\frac{r}{\rho}\right)^{7/2} \qquad (198),$$

где для труб круглого поперечного сечения: $a = 0{,}131$ и $b = 1{,}847$ и для труб прямоугольного поперечного сечения: $a = 0{,}124$ и $b = 3{,}104$.

Выражением (198) лучше пользоваться при $\frac{r}{\rho} \leqq 0{,}2$; тогда получим следующую таблицу для ζ:

При $\left(\frac{r}{\rho}\right) =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Для круглого сечения $\zeta =$	0,131	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440	0,661	0,977	1,408	1,978
Для прямоугольного сечения $\zeta =$	0,124	0,135	0,180	0,250	0,398	0,643	1,015	1,546	2,271	3,228

Для труб прямоугольного поперечного сечения принимается, что стороны, параллельные плоскости закругления, равны $2r$.

По опытам Александера коэфф. ζ получается значительно меньше исчисляемых по вышеприведенным формулам.

В обыкновенных случаях практики скорость a, следовательно, и высота ей соответствующая не велика, напр.:

при $V = 2$, 3, 4 фут.

высота $\frac{V^2}{2g} = 0{,}062$, 0,140, 0,248 фут.,

так что высоты гидравлических сопротивлений в закруглениях получаются незначительными. Но при большом числе закруглений на водо-

проводной линии общая сумма подобных сопротивлений может сделаться заметной. Если закругление расположено в вертикальной плоскости и обращено выпуклостью вверх, то в этом месте может скопляться воздух, выделяющийся из воды; это скопление, уменьшая поперечное сечение трубы, уменьшает также расход и в крайнем случае может даже совсем приостановить течение. В виду этого в таких местах необходимо устанавливать *вантузы*, т.-е. приборы, автоматически выпускающие воздух из трубы по мере его накопления.

4) **Сопротивление в колене.** Это сопротивление происходит вследствие причин аналогичным тем, которые были только что об'яснены. Частицы, двигающиеся вдоль стенки, дойдя до точки a (черт. 139), срываются со стенки и движутся по линии abd, образуя в bc сжатое сечение; в de струя наполняет все сечение трубы: полость $abdf$ наполнена жидкостью, находящеюся в состоянии, близком к покою. Для построения кривых скоростей и давлений следует поступать так, как и в случае закругления. Найдя положение плоскости напора NN, откладываем от нее вниз по вертикалям, проведенным через точки M_0, M_1, M, высоты скоростей:

$$\frac{V_p^2}{2g};\ \frac{V_1^2}{2g};\ \frac{V_p^2}{2g}$$

и строим линию скоростей $ghikl$. Пусть mn есть линия давлений для части трубы, лежащей влево от M_0; она составляет с горизонтом угол α, определяемый из равенства:

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\beta = i = \frac{Q^2}{\gamma D^5}.$$

Если бы на длине M_0M не было вовсе гидравлических сопротивлений, то линия давлений представилась бы кривой $np'q'$ параллельной hik; но так как в колене проявляются гидравлические сопротивления, высота которых равна qq', то, откладывая эту высоту, как показано на чертеже, строим линию давлений npq, и затем проводим прямую qr, составляющую с горизонтом угол α_1, определяемый из равенства: $\operatorname{tg}\alpha_1\cdot\cos\beta_1 = i$.

Также как и для закругления гидравлические сопротивления в колене можно представить так:

$$(h''-h_0'') = \zeta\frac{V_p^2}{2g}.$$

Для случая колен *Вейсбах* на основании своих опытов над трубами малого диаметра дает для ζ такое выражение:

$$\zeta = a\sin^2\tfrac{1}{2}\delta + b\sin^4\tfrac{1}{2}\delta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (199),$$

где δ — угол, на который изменяется направление продольной оси трубы; $a = 0{,}95$ и $b = 2{,}05$; напр.:

при	$\delta = 20^\circ$	40°	60°	80°	90°	100°	120°
„	$\zeta = 0{,}046$	0,139	0,364	0,740	0,984	1,260	1,861.

Для труб *большого* диаметра ζ значительно меньше.

5) **Сопротивление в задвижке или створном кране.** При устройстве водопроводов устанавливаются на трубах задвижки или створные краны, посредством которых можно выделить любую линию из водопроводной сети и исправить ее без перерыва водоснабжения в остальных местах. Если Ω — полное сечение трубы, ω — ее сечение при несколько поднятой задвижке, и x — часть диаметра трубы, занятая задвижкой (черт. 140), то по опытам *Вейсбаха* и *Грасхофа* получаются следующие значения для коэфф. ζ в общей формуле для сопротивления:

$\frac{x}{D} =$	$^1/_8$	$^1/_4$	$^3/_8$	$^1/_2$	$^5/_8$	$^3/_4$	$^7/_8$
$\frac{\omega}{\Omega} =$	0,948	0,856	0,740	0,609	0,466	0,315	0,159
$\zeta =$	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8

Отсюда видно, что при значениях $\frac{x}{D}$, близких к единице, сопротивление становится очень большим.

На черт. 140 показан вид струи при проходе жидкости через задвижку; bc — сжатое сечение; abd — полость с жидкостью, находящеюся почти в покое. Сопротивления проявляются вследствие быстрого расширения струи при переходе из сечения bc в сечение de и при существовании полости abd. Построение кривых скоростей и давлений делается во всем согласно с предыдущими построениями. Линия $ghikl$ представляет линию скоростей, линия $mnpqr$ — линию давлений, при чем отрезок qq' равен высоте гидравлических сопротивлений в задвижке, т.-е.

$$qq' = \zeta \frac{V_p^2}{2g}.$$

6) **Сопротивление в клапанах.** В насосах и в водопроводах постоянно употребляются клапаны различного устройства, напр., на *всасывающих* трубах, посредством которых вода забирается насосами из колодцев, резервуаров и т. п., также на трубах *напорных*, по которым вода

нагнетается насосами в вышерасположенный бак, и в других подобных случаях, где требуется воспрепятствовать току воды.

Вейсбах исследовал сопротивление в шарнирных клапанах, имеющих устройство, показанное на черт. 141, при различных углах δ поднятия клапана. Здесь струя претерпевает изменение в направлении движения, сжатие в ab и a_1b_1, и расширение в cd и c_1d_1. На основании этих опытов *Грасхоф* дает следующее выражение для коэффициента ζ:

$$\zeta = \left(\frac{\Omega}{\omega}x - 1\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (200),$$

где x зависит от угла δ; в нижеследующей таблице показаны значения x при различных δ и значения ζ — в предположении, что $\omega = 0{,}535\Omega$.

δ	x	ζ	δ	x	ζ	δ	x	ζ
15°	5,61	90	35°	2,93	20	55°	1,68	4,6
20°	4,75	62	40°	2,54	14	60°	1,49	3,2
25°	4,00	42	45°	2,18	9,5	65°	1,35	2,3
30°	3,47	30	50°	1,91	6,6	70°	1,23	1,7

Если клапан имеет устройство, показанное на черт. 142, то вода на своем пути от ω до Ω проходит три уменьшенных сечений: круглое $ab = \Omega_1$; цилиндрическое ae, bd равное Ω_2, и кольцевое fc, de равное Ω_3; при этом струя разделяется и претерпевает значительное изменение в своем направлении; в m—получается полость с почти неподвижною жидкостью. Сечение Ω_2 зависит от высоты h поднятия клапана. Опыты над клапанами подобного устройства были произведены *Вейсбахом* и *Бахом*. Бах определял сопротивления в под'емных клапанах семи различных типов, а именно: 1) с плоским гнездом и с плоской лицевой стороной (черт. 143 *a*, 143 *b*); 2) с плоским гнездом и с сферической вогнутой стороной (черт. 143 *c*); 3) с плоским гнездом и с лицевой стороной в виде конуса, уширяющегося к основанию и выступающего навстречу движению (черт. 143 *d*); 4) с плоским гнездом и с хвостом, состоящим из трех направляющих ветвей (черт. 143 *e*, 143 *f*); 5) с коническим гнездом и с плоской лицевой стороною (черт. 143 *g*); 6) с коническим гнездом и с лицевой стороной в виде конуса, выступ-

пающего навстречу движению (черт. 143 h), и 7) с коническим гнездом и с шаровой выпуклой лицевой стороной (черт. 143 i).

Бах на основании своих опытов дает для ζ выражение троякого вида: для клапанов по черт. 143 a, b, c, d, h:

$$\zeta = \alpha + \beta \left(\frac{d}{h}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (201\,a);$$

для клапанов по черт. 143 e, f:

$$\zeta = \alpha_1 + \beta_1 \left(\frac{d}{h}\right)^2 \left(\frac{1}{\pi d - is}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (201\,b);$$

для клапанов по черт. 143 g, i:

$$\zeta = \alpha_2 + \beta_2 \left(\frac{d}{h}\right) + \gamma \left(\frac{d}{h}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (201\,c).$$

В этих выражениях обозначают: d — диаметр отверстия, закрываемого клапаном; h — высота поднятия клапана; i — число направляющих ветвей в клапанах с хвостом; s — ширина направляющей ветви, считая эту ширину по окружности отверстия, закрываемого клапаном; b — ширина клапанного гнезда; α, β . . . . суть численные коэффициенты равные:

для клапанов по черт. 143 a, b, c, d

$\alpha = 0{,}55 + 4\left(\frac{b - 0{,}1d}{d}\right)$; $\beta = 0{,}15$ до $0{,}16$; $b = (0{,}1 - 0{,}25)d$;

для клапана по черт. 143 h : $\alpha = 0{,}6$; $\beta = 0{,}15$,

„ „ „ 143 e : $\alpha_1 = 1{,}35$; $\beta_1 = 1{,}7 - 1{,}75$,

„ „ „ 143 f : $\alpha_1 = 2{,}15$; $\beta_1 = 1{,}7 - 1{,}75$;

наконец, $\alpha_2 = 2{,}6 - 2{,}7$; $\beta_2 = -0{,}8$; $\gamma = 0{,}14$; $b = 0{,}1\,d$.

Вышеприведенные значения коэффициентов справедливы при высоте под'ема $h = (0{,}1 - 0{,}25)\,d$.

Из опытов Баха заключаем: 1) что при плоском гнезде на величину сопротивлений влияет ширина гнезда b; влияние же обделки лицевой стороны оказывается незначительным; 2) что сопротивление клапанов с хвостом значительно больше, чем без хвоста; и 3) что из клапанов с коническим гнездом большее сопротивление соответствует клапану с конической лицевой стороной.

§ 44. Простой водопровод, состоящий из одной прямолинейной трубы. Простым водопроводом называется труба постоянного диаметра D, по которой выпускается вода из какого-либо резервуара или прямо на воздух или в другой резервуар, при чем выходное отверстие является

затопленным. Сперва рассмотрим трубу с прямолинейною продольною осью и предположим, что вода вытекает прямо на воздух.

Определение скорости и расхода. Рассмотрим линию тока M_0M (черт. 144), совпадающую с продольною осью трубы; пусть для точки $M_0 : z_0, p_0, V_0$ и для точки $M : z, p = p_0, V_p$. Тогда уравн. Бернулли дает нам:

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g} + (h'' - h_0'') = \left(z_0 + \frac{p_0}{\triangle}\right) - \left(z + \frac{p}{\triangle}\right) = H \ldots (202).$$

Здесь H — напор и представляет вертикальное расстояние от центра тяжести выходного отверстия трубы до горизонта воды в резервуаре. Гидравлические сопротивления на пути M_0M состоят из двух сопротивлений. *Первое* сопротивление проявляется на пути от M_0 до сечения ab; это сопротивление называется местным и было подробно рассмотрено в § 43; оно равно сопротивлению в короткой цилиндрической насадке и выражается так:

$$(h'' - h_0'')_{M_0b} = \zeta_1 \frac{V_p}{2g} = \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\frac{V_p^2}{2g} = \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\frac{Q^2}{2g\omega^2} \ldots (115),$$

где ω — поперечное сечение трубы; μ — коэфф. расхода для цилиндрической насадки равный 0,80 — 0,82; ζ_1 = коэфф. сопротивления для такой насадки равный 0,5; это сопротивление относится к длине трубы L'' равной около $4D$.

Второе сопротивление на пути bM называется общим сопротивлением и выражается по § 42 так:

$$(h'' - h_0'')_{bM} = \lambda \frac{L'}{D} \frac{V_p^2}{2g} = \frac{Q^2 L'}{\gamma D^5}.$$

Здесь L' длина трубы bM; коэффициенты γ и λ зависят от основного коэфф. b_1 и выражаются, как показано в § 42, следующим образом:

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{64 b_1}{\pi^2}, \qquad \lambda = 8 g b_1.$$

Для основного коэфф. b_1 нужно взять одно из выражений, перечисленных в § 42. Складывая оба сопротивления — местное и общее, находим:

$$(h'' - h_0'')_{M_0M} = \left\{\left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right) + \lambda \frac{L'}{D}\right\}\frac{V_p^2}{2g} = \zeta_0 \frac{V_p^2}{2g} = \left[\left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right) + \lambda \frac{L'}{D}\right]\frac{Q^2}{2g\omega^2} \ldots (203);$$

здесь

$$\zeta_0 = \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right) + \lambda \frac{L'}{D}$$

представляет *коэфф. сопротивления* для простого водопровода. Подставим это выражение в уравн. (202), тогда получим:

$$(1+\zeta_0)\frac{V_p^2}{2g}=H+\frac{V_0^2}{2g};\text{ отсюда } V_p=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta_0}}\sqrt{2g\left(H+\frac{V_0^2}{2g}\right)}.$$

Так же как и в случае отверстий и насадок найдем, что

$$\frac{1}{\sqrt{1+\zeta_0}}=\varphi_0,$$

где φ_0 — *коэфф. скорости* для простого водопровода; так как струя выходит из трубы без сжатия, то $\varphi_0=\mu_0=$ *коэфф. расхода* для простого водопровода. Следовательно, можно написать так:

$$V_p=\mu_0\sqrt{2g\left(H+\frac{V_0^2}{2g}\right)}\quad\ldots\ldots\ldots(204).$$

Если Ω_0 — поперечное сечение резервуара, то из равенства

$$Q=\Omega_0 V_0=\omega V_p\text{ находим: } V_0=\frac{\omega}{\Omega_0}V_p.$$

Помощью этого равенства исключаем в предыдущем уравнении член $\frac{V_0^2}{2g}$ и тогда получаем окончательно:

$$V_p=\mu_0\sqrt{\frac{2gH}{1-\left(\frac{\mu_0\omega}{\Omega_0}\right)^2}}\quad\ldots\ldots\ldots(204\,a).$$

Мы принимаем скорость одинаковую для всего поперечного сечения, а потому можем для расхода трубы написать такое выражение:

$$Q=\omega_0 V_p=\mu_0\omega\sqrt{2g\left(H+\frac{V_0^2}{2g}\right)}=\mu_0\omega\sqrt{\frac{2gH}{1-\left(\frac{\mu_0\omega}{\Omega_0}\right)^2}}\quad\ldots\ldots(205).$$

В выражениях для V_p и Q коэфф. μ_0 выражается так:

$$\mu_0=\varphi_0=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta_0}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\mu^2}-1\right)+\lambda\frac{L'}{D}}}\quad\ldots\ldots(206).$$

Найденные выражения для скорости и расхода в трубе тожественны по виду с полученными ранее для отверстий и насадок с тем только важным различием, что для трубы коэфф. расхода μ_0 есть величина, изменяющаяся в очень широких пределах в зависимости от длины L'. Если L' очень велико сравнительно с D, то ζ_0 также велико, а φ_0 или

μ_0 очень мало; при очень малом L', напр., когда $L'=0$, т.-е., когда труба обращается в насадку длиною $L''=4D$, то $\mu_0=\mu=0{,}80-0{,}82$; итак коэфф. μ_0 изменяется в пределах от 0 до 0,82.

Если величина $\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2$ очень мала сравнительно с 1 или, что все равно, величина $\frac{V_0^2}{2g}$ мала сравнительно с H, то предыдущие выражения можно представить в таком простейшем виде:

$$V_p=\mu_0\sqrt{2gH},\qquad Q=\mu_0\omega\sqrt{2gH}\;.\;.\;.\;.\;.\;(207).$$

Найденные выражения для V_p (204 *a*) и (207) будут необходимы для нас при расчете простого водопровода с переменным напором. Для решения задач, относящихся к простому водопроводу, удобнее пользоваться следующей формулой, которую получим, заменив в выражении для местного и общего сопротивлений величину

$$\frac{V^2}{2g}\text{ через }\frac{Q^2}{2g\omega^2}\text{ и величину }\frac{V_0^2}{2g}\text{ через }\frac{Q^2}{2g\Omega_0^2}.$$

Тогда из уравн. (202) получаем:

$$\left[1-\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2+\left(\frac{1}{\mu^2}-1\right)+\lambda\frac{L'}{D}\right]\frac{Q^2}{2g\omega^2}=H\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(208).$$

Помощью этого уравнения можно решать следующие три задачи, относящиеся к простому водопроводу.

Первая задача — определить напор H по заданным: длине трубы L, диаметру трубы D и расходу Q.

Вторая задача — определить расход Q по известным: длине трубы L, диаметру трубы D и напору H.

Третья задача — определить диаметр D по заданным остальным величинам.

При решении этих задач нужно выбрать для основного коэфф. b_1 одно из выражений, приведенных в § 42 и по выбранному b_1 определить коэфф. λ, входящий в уравн. (208). Первые две задачи решаются просто; третья же задача более сложная, так как диаметр D входит в высоких и иногда в дробных степенях в зависимости от выбора формулы для b_1.

В приложениях часто можно сделать упрощения в общем выражении (208), если пренебрегать членами, имеющими малую величину, сравнительно с членами остающимися.

1) Прежде всего можно пренебречь членом

$$\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2\frac{Q^2}{2g\omega^2}=\frac{V_0^2}{2g},$$ т.-е. высотой начальной скорости.

2) Затем можно пренебрегать местным сопротивлением при входе, т.-е. величиной:

$$\left(\frac{1}{\mu^2}-1\right)\frac{Q^2}{2g\omega^2}=\left(\frac{1}{\mu^2}-1\right)\frac{V_p^2}{2g}=0{,}5\ \frac{V_p^2}{2g}\ \text{(приблиз.)}.$$

3) Наконец, можно пренебречь членом:

$$\frac{Q^2}{2g\omega^2}=\frac{V_p^2}{2g}.$$

Мы остановимся на случае, когда всеми перечисленными членами можно пренебречь по их малости, и когда, следовательно, весь напор H тратится только на общее сопротивление. Тогда можем уравн. (208) переписать так, заменяя L' через L, ω через $\frac{\pi D^2}{4}$ и, имея в виду, что $\lambda=8gb_1$ и что $\frac{1}{\gamma}=\frac{64b_1}{\pi^2}$:

$$H=\lambda\frac{L}{D}\cdot\frac{Q^2}{2g\omega^2}=8gb_1\frac{L}{D}\cdot\frac{16Q^2}{2g\pi^2D^4}=\frac{64b_1}{\pi^2}\cdot\frac{Q^2L}{D^5}=\frac{Q^2L}{\gamma D^5}\ \ldots\ (209).$$

При помощи этого уравнения можно решать вышеприведенные три задачи, при чем определение D здесь производится проще, чем в общем случае по уравн. (208). В виде примера покажем, какой вид принимает уравн. (209), когда выбрано одно из выражений для b_1; с этою целью выбираем для b_1 два наиболее характерные выражения.

1) Пусть b_1 равно постоянной величине (из пятой группы формул для b_1), напр., по Дюпюи:

$$b_1=0{,}0003855\ \text{для метров}\quad\text{и}\quad b_1=0{,}0001175\ \text{для футов.}$$

Следовательно, получаем:

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{64}{\pi^2}b_1=0{,}0025\ \text{для метров};\quad \frac{1}{\gamma}=0{,}000762\ \text{для футов.}$$

Подставляя эти значения в уравн. (209), находим, что по Дюпюи:

$$H=0{,}0025\,\frac{Q^2L}{D^5}\ \text{для метров};\quad H=0{,}000762\,\frac{Q^2L}{D^5}\ \text{для футов}\ \ldots\ (210).$$

В очень многих случаях практики эта формула дает вполне удовлетворительные результаты при решении выше перечисленных трех задач.

2) Если требуется более точное решение тех же задач, то для этой цели лучше всего воспользоваться логарифмическим выражением для b_1 (из третьей группы формул), напр., формулой Фламана (193); тогда имеем:

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{64}{\pi^2}b_1=\frac{64}{\pi^2}\frac{a}{R^n V^{2-m}},$$

где $n=0{,}25$ и $m=1{,}75$; для мер в футах: $a=0{,}00007222$ для труб новых асфальтированных и $a=0{,}00008979$ для труб старых асфальтированных. Так как

$$R=\frac{1}{4}D \quad \text{и} \quad V=\frac{4Q}{\pi D^2},$$

то выражение (209) принимает такой вид:

$$H=\frac{64a}{\pi^{7/4}}\cdot\frac{Q^{7/4}L}{D^{19/4}}=\frac{AQ^{7/4}L}{D^{19/4}} \quad \ldots\ldots\ldots (211);$$

здесь для мер в футах: $A=0{,}0006235$ для труб новых и $A=0{,}0007752$ для труб старых.

Численные примеры. *a*) Определить напор H, при котором труба диаметром $D=6$ д. $=0{,}5$ ф. и длиною $L=5000$ ф., будет давать расход $Q=1{,}5$ куб. ф. после многих лет службы.

По формуле Фламана (211) находим:

$$H=\frac{0{,}0007752(1{,}5)^{7/4}\,5000}{(0{,}5)^{19/4}}=212 \text{ ф.}$$

По формуле Дюпюи (210) получаем:

$$H=\frac{0{,}000762\,.\,(1{,}5)^2\,.\,5000}{(0{,}5)^5}=274 \text{ ф.}$$

Если в той же задаче требуется, чтобы *новая* труба давала указанный расход, то по форм. Фламана получается:

$$H=\frac{0{,}0006235(1{,}5)^{7/4}\,.\,5000}{(0{,}5)^{19/4}}=170 \text{ ф.},$$

что на 24,5% меньше, чем для старой трубы. По форм. Дюпюи для новых труб получается тот же результат, что для старых, так как в ней коэфф. b_1 постоянный.

b) Определить расход Q, который будет давать *старая* труба диаметром $D=4$ д. $=0{,}33$ ф. и длиною $L=1000$ ф., если напор $H=85$ ф.

По формуле Фламана находим:

$$Q=\sqrt[7]{\left[\frac{(0{,}33)^{19/4}\,.\,85}{0{,}0007752\,.\,1000}\right]^4}=0{,}742 \text{ куб. ф.}$$

По формуле Дюпюи получается:

$$Q=\sqrt{\frac{(0{,}33)^5\,.\,85}{0{,}000762\,.\,1000}}=0{,}678 \text{ куб. ф.}$$

Если труба новая, то по формуле Фламана получаем $Q=0{,}841$ куб. ф., что на 13,4% больше, чем для старой трубы.

c) Найти диаметр трубы, которая после многих лет службы будет давать расход $Q = 2$ куб. ф. при длине $L = 3000$ фут и при напоре $H = 100$ ф.

По формуле Фламана находим:

$$D = \sqrt[19]{\left[\frac{0{,}0007752 \cdot (2)^{7/4} 3000}{100}\right]^4} = 0{,}58 \text{ ф.} = 7 \text{ д.}$$

По формуле Дюпюи получается:

$$D = \sqrt[5]{\frac{0{,}000762 \cdot (2)^2 3000}{100}} = 0{,}62 \text{ ф.} = 7{,}46 \text{ д.; округляем до 8 д.}$$

Если определить диаметр трубы, предполагая ее новой, то по форм. Фламана вычислим:

$$D = \sqrt[19]{\left[\frac{0{,}0006235 \cdot (2)^{7/4} 3000}{100}\right]^4} = 0{,}56 \text{ ф.} = 6{,}71 \text{ д. округляем до 7 д.}$$

Отсюда видно, что при существовании сортамента для чугунных труб часто может получаться по точным формулам, как напр. по форм. Фламана, одинаковый диаметр для старых и новых труб.

Определение давлений в трубе. Для определения давления p' в какой-либо точке трубы M' рассмотрим линию тока M_0M' (черт. 144); тогда имеем:

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g} + \left(h'' - h_0''\right) = \left(z_0 + \frac{p_0}{\Delta}\right) - \left(z' + \frac{p'}{\Delta}\right) = y - \frac{p' - p_0}{\Delta}$$

где $y = (z_0 - z')$ представляет вертикальное расстояние точки M' от горизонта в резервуаре. Сопротивление $(h'' - h_0'')$ состоит из двух сопротивлений: из местного сопротивления при входе в трубу равного

$$\left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\frac{V_p^2}{2g}$$

и из общего сопротивления по длине трубы $bM' = l$; оно равно

$$\frac{Q^2 l}{\gamma D^5} = \lambda \frac{l}{D} \frac{V_p^2}{2g}$$

Тогда из предидущего уравнения получается высота *свободного* давления, т.-е. за вычетом атмосферного давления

$$\frac{p' - p_0}{\Delta} = y + \frac{V_0^2}{2g} - \left[\frac{V_p^2}{2g} + (h'' - h_0'')\right] = y + \frac{V_0^2}{2g} - \left[\frac{V_p^2}{2g\mu^2} + \lambda \frac{l}{D} \frac{V_p^2}{2g}\right] \quad (212).$$

Отсюда видно, что высота свободного давления равна ординате y, увеличенной на высоту начальной скорости и за вычетом высоты скорости в рассматриваемой точке M' и высоты гидравл. сопротивлений по пути

от M_0 до M'. Высоту $\frac{p'-p_0}{\Delta}$ можем найти таким путем. От горизонта воды в резервуаре откладываем вертикально вверх высоту начальной скорости и проводим горизонтальную плоскость, которая представляет плоскость напора. От этой плоскости будем откладывать вертикально вниз высоты соответственных скоростей, т.-е.

$$a'a'' = \frac{V_1^2}{2g} \qquad b'b'' = \frac{V_p^2}{2g}.$$

Тогда получается линия скоростей $M_0\,Ba''\,b''\,c''\,d''$. Затем от этой линии по вертикали вниз откладываем высоты гидр. сопротивлений:

$$a''a''' = \zeta\frac{V_1^2}{2g} = \frac{\zeta}{\alpha^2}\frac{V_p^2}{2g};\ b''b''' = \left(\frac{1}{\mu^2}-1\right)\frac{V_p^2}{2g};\ c''c''' = \left(\frac{1}{\mu^2}-1\right)\frac{V_p^2}{2g} + \lambda\frac{l}{D}\frac{V_p^2}{2g}$$

и т. д.

Получаем таким образом линию давлений $M_0\,Ba'''\,b'''\,c'''\,M$. Вертикальные расстояния между продольной осью трубы abM и найденною линией давления суть искомые высоты

$$\frac{p'-p_0}{\Delta};\ \text{напр. для точки } M' \text{ имеем: } \frac{p'-p_0}{\Delta} = M'c'''.$$

Вертикальные расстояния между кривой скоростей и кривой давлений представляют высоты соответственных гидравл. сопротивлений; напр., $b''b'''$ представляет высоту гидравл. сопротивлений от M_0 до b на линии тока M_0b; $c''c'''$ — представляет высоту гидр. сопротивлений от M_0 до M' на линии тока M_0M' и т. д.

Кривые скоростей и давлений в начале трубы имеют тот же вид, что в цилиндрических насадках, и были рассмотрены в § 43 (см. сопротивление при входе в трубу черт. 137). Линия давлений $b'''M$ на длине трубы bM представляет прямую линию; угол α, составляемый этой линией с горизонтом, определяется из равенства:

$$tg\alpha \cdot Cos\beta = i = \frac{Q^2}{\gamma D^5} = \lambda\frac{1}{D}\frac{V_p^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (179)$$

где β—угол, составляемый с горизонтом продольною осью трубы.

Линии давлений в частных случаях. Если в ур. (202) можно пренебречь величиной

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g}$$

и местным сопротивлением при входе в трубу, то во всех таких случаях получим:

$$(h'' - h_0'') = \frac{Q^2L}{\gamma D^5} = \lambda\frac{L}{D}\frac{V_p^2}{2g} = H.$$

Тогда линию давлений найдем, соединив точки B' и M (черт. 144) прямой линией. При таком упрощенном способе построения линии давлений, высоту свободного давления в M' (т.-е. за вычетом атмосферного) найдем из подобия Δ-ков $MM'c'''$ и MKB'; именно:

$$M'c''' = KB' \cdot \frac{M'M}{MK} = (H - KM \cdot Sin\,\beta)\frac{M'M}{MK}.$$

или

$$\frac{p' - p_0}{\Delta} = (H - L\,Sin\,\beta)\frac{M'M}{L}.$$

Из этого построения видно, что свободное давление в каком-либо сечении трубы зависит от H; L; β и от расстояния этого сечения до конца трубы, но не зависит ни от диаметра, ни от расхода.

Начало линии давлений B' представляет подошву перпендикуляра, опущенного из K на горизонт воды в резервуаре.

Сравним линии давлений для труб KM; $K'M$ и $K''M$, сходящихся в одной точке (черт. 145); длины и диаметры их могут быть различными. Опустим на горизонт воды в резервуаре перпендикуляры KB, $K'B'\ldots$; тогда прямые MB; $MB'\ldots$ представят линии давлений для рассматриваемых труб. Высота свободного давления $M'a$ в трубе MK'' определится из подобия Δ-ков $MM'a$ и $MK''B''$:

$$M'a = B''K'' \cdot \frac{MM'}{MK''} \text{ или } \frac{p' - p_0}{\Delta} = (H + L\,Sin\,\beta)\frac{MM'}{L}.$$

Рассмотрим теперь трубу KM (черт. 146), которая при напоре H дает расход Q. Линия давлений для этой трубы представляется прямой BM. Положим, что горизонт воды в резервуаре поднялся на h. Определим новый расход Q_1 и положение новой линии давлений.

Расход Q_1 определим из равенства

$$\frac{Q_1^2 L}{\gamma D^5} = H + h.$$

Новая линия давлений представляется прямой $B'M$. В какой-либо точке M' трубы давление aM' изменится в $a'M'$, т.-е. увеличится на aa'; это увеличение найдем из подобия Δ-ков Maa' и MBB':

$$aa' = BB' \cdot \frac{MM'}{MK} = h \cdot \frac{MM'}{L}.$$

Итак, при поднятии горизонта воды в резервуаре давления в трубе увеличиваются пропорционально расстоянию рассматриваемого сечения до конца трубы и пропорционально величине поднятия h горизонта в резервуаре. Пусть труба $KM = L$ продолжена до M_1 (черт. 147); тогда

новая длина трубы $KM_1 = L_1$ и новый напор $= H_1$. Новый расход Q определим из равенства

$$\frac{Q_1^2 L_1}{\gamma D^5} = H_1.$$

Линии давлений для этих труб представляются прямыми BM и BM_1; таким образом от увеличения длины трубы давление в какой-либо точке M' увеличивается на величину aa', которая определится из подобия Δ-ков BbM и Baa':

$$aa' = Mb \cdot \frac{KM'}{KM}.$$

Но, очевидно

$$Mb = H_2 \frac{MM_1}{L_1}; \text{ следоват., } aa' = \frac{H_2}{L_1} \cdot \frac{L_1 - L}{L} \cdot KM'$$

здесь

$$H_2 = H - L \, Sin \, \beta.$$

Итак, увеличение давления в сечении M' пропорционально расстоянию этого сечения от начала трубы.

Водопровод с задвижкой на конце. Всякая водопроводная труба имеет на конце задвижку в виде вентиля или крана. Рассмотрим случай, когда задвижка стесняет только часть сечения трубы, как это показано на черт. 140, при чем для большего упрощения задвижку представляем в виде диафрагмы с отверстием O. При выходе из этого отверстия струя сжимается и получается сжатое сечение $\Omega = \alpha O$, где α — коэф. сжатия струи. Рассматривая линию тока M_0M, где M — представляет центр тяжести сжатого сечения, получаем (черт. 148):

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g} + (h'' - h_0'') = \left(z_0 + \frac{p_0}{\Delta}\right) - \left(z + \frac{p}{\Delta}\right) = z_0 - z = H.$$

Здесь давление p в M равно p_0 и H — представляет расстояние центра сжатого сечения до горизонта воды в резервуаре. Если V — скорость в трубе, то имеем:

$$Q = \alpha O \cdot V_p = \omega V; \text{ следов., } V = \frac{\alpha O}{\omega} \cdot V_p.$$

Так как задвижка на конце трубы не только уменьшает поперечное сечение трубы, а следоват. и расход, но также вызывает особое сопротивление на конце трубы равное $\zeta \frac{V_p^2}{2g}$, как при вытекании через отверстие в стенке, то величину $(h'' - h_0'')$ получим, если сложим местные сопротивления при входе и на конце и общее сопротивление; они дают сумму:

$$\left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right) \frac{V^2}{2g} + \lambda \frac{L'}{D} \frac{V^2}{2g} + \zeta \frac{V_p^2}{2g} = \left\{\left[\left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right) + \lambda \frac{L'}{D}\right]\left(\frac{\alpha O}{\omega}\right)^2 + \zeta\right\} \frac{V_p^2}{2g} = \zeta_0 \frac{V_p^2}{2g}$$

Тогда предидущее равенство представится в таком виде:

$$\frac{V_p^2}{2g}\left\{1+\zeta+\left[\left(\frac{1}{\mu^2}-1\right)+\lambda\frac{L'}{D}\right]\left(\frac{\alpha O}{\omega}\right)^2\right\}=(1+\zeta_0)\frac{V_p^2}{2g}=H+\frac{V_0^2}{2g}=h.$$

Отсюда находим:

$$V_p=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta_0}}\sqrt{2gh}=\varphi_0\sqrt{2gh}.$$

Расход получаем так же, как и выше:

$$Q=\Omega V_p=\alpha O\cdot\varphi_0\sqrt{2gh}=\mu_0 O\sqrt{2gh}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(212)$$

здесь коэф. ζ_0 φ_0 и μ_0 суть коэф. сопротивления, скорости и расхода для водопровода; их значения следующие:

$$\zeta_0=\left[\left(\frac{1}{\mu^2}-1\right)+\lambda\frac{L'}{D}\right]\left(\frac{\alpha O}{\omega}\right)^2+\zeta\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(212a)$$

$$\varphi_0=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta_0}};\ \mu_0=\alpha\varphi_0.$$

Во многих случаях можно пренебрегать скоростью V_0 и принимать $h=H$: равенство (212) служит для определения или Q или H или O по заданным прочим величинам.

Построение линий скоростей и давлений производится во всем согласно с изложенным в § 44. На конце трубы нужно отложить от плоскости напора высоту $e'e''=\frac{V_p^2}{2g}$; тогда кривая $d''e''$ представит кривую скоростей от точки M_1 до M, где M_1 взято в небольшом расстоянии от задвижки. Следоват., линия скоростей для всей трубы представится линией $M_0a''b''d''e''$, а линия давлений—линией $M_0a'''b'''d'''M$. Отсюда видно, что при задвижке давления в трубе увеличиваются сравнительно со случаем, когда задвижки нет. Чем больше закрыта задвижка, тем меньше скорость V в трубе, тем больше давления в трубе. При полном закрытии задвижки давления делаются наибольшими и равны давлениям гидростатическим, как в сообщающихся сосудах; в этом случае горизонты в пьезометрах, поставленных в разных сечениях трубы будут лежать на одном уровне с горизонтом воды в резервуаре.

Водопровод с задвижкой где-либо на середине трубы. Этот случай трактуется совершенно так, как случай водопровода, имеющего кроме местного сопротивления при входе, еще местное сопротивление от задвижки; оно подробно разобрано в § 43 и показано на черт. 140. Это сопротивление, в зависимости от большей или меньшей степени открытия задвижки, может быть весьма значительным. Задвижка, поставленная на середине трубы, не только уменьшает скорость и расход в трубе,

но также увеличивает сопротивление движению. Определение скорости и расхода в данном случае производится во всем согласно с изложенным выше в этом §. Также производится и построение линий скоростей и давлений. На черт. 149 показаны обе эти кривые; линия $M_0a''b''e''f''g''d''$ представляет линию скоростей, а линия $M_0a'''b'''e'''f'''g'''M$ — линию давлений. Построение обеих этих линий в том месте трубы, где поставлена задвижка, показано подробно на черт. 140. Здесь было предположено, что движение по трубе *ниже* задвижки совершается *полным* сечением. Если задвижка закрывает большую часть сечения трубы, то струя по выходе из задвижки может не заполнить всего сечения трубы. Тогда движение по этой части трубы происходит, как в канале круглого поперечного сечения, вследствие существования продольного уклона в этой части трубы; в первой же части трубы движение будет происходить под напором; линии давлений и скоростей для нея получатся такими, как это показано на черт. 148.

§ 45. Простой водопровод, состоящий из прямолинейных частей, соединенных закруглениями или коленами. Рассмотрим водопровод, состоящий из нескольких прямолинейных частей одного и того же диаметра D, соединенных закруглениями или коленами; таким образом продольная ось водопровода может иметь перегибы в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Расчет водопровода, изложенный в предыдущем §, вполне применяется и к настоящему случаю; необходимо только к вышерассмотренным гидравл. сопротивлениям еще прибавить местные сопротивления, проявляющиеся в закруглениях и коленах; эти сопротивления были подробно рассмотрены в § 43.

Определение скорости и расхода. Струя при входе в трубу претерпевает такое же изменение, как и в предыдущем случае (см. § 43, черт. 137); затем в местах закруглений или колен получаются сжатия струи и быстрые расширения ее, как это было показано на черт. 138 и 139. Применим теорему Д. Бернулли к линии тока M_0M (черт. 150); тогда получаем:

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g} + (h'' - h_0'') = (z_0 - z) = H \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

Гидравл. сопротивления по линии M_0M состоят из следующих сопротивлений:

1) из местного сопротивления при входе в трубу, т.-е. на длине M_0ab; оно равно

$$\left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\frac{V_p^2}{2g} = \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\frac{Q^2}{2g\omega^2}$$

2) из местных сопротивлений в закруглениях и коленах; они представятся так:

$$\text{на пути } de\text{: } \zeta_1 \frac{V_p^2}{2g} = \zeta_1 \frac{Q^2}{2g\omega^2} \text{ и на пути } gk'\text{: } \zeta_2 \frac{V_p^2}{2g} = \zeta_2 \frac{Q^2}{2g\omega^2}$$

3) из общих сопротивлений в отдельных частях водопровода, а именно:

$$\text{на пути } bcd\text{: } \frac{Q^2L_1}{\gamma D^5} = \lambda \cdot \frac{L_1}{D} \cdot \frac{V_p^2}{2g}\text{; на пути } efg\text{: } \frac{Q^2L_2}{\gamma D^5} = \lambda \cdot \frac{L_2}{D} \cdot \frac{V_p^2}{2g}\text{;}$$

$$\text{на пути } k'M\text{: } \frac{Q^2L_3}{\gamma D^5} = \lambda \cdot \frac{L_3}{D} \frac{V_p^2}{2g}.$$

Здесь $L_1 = bcd$; $L_2 = bfg$; $L_3 = k'M$. Коэффициенты λ и γ будут одинаковыми для всех трех выражений, так как в общем случае они зависят от D и V_p, которые постоянны. Складывая все сопротивления, находим:

$$\left(h'' - h_0''\right) = \left\{\left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right) + \Sigma\zeta + \lambda \frac{\Sigma L}{D}\right\} \frac{V_p^2}{2g} = \zeta_0 \frac{V_p^2}{2g}$$

здесь

$$\zeta_0 = \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right) + \Sigma\zeta + \lambda \frac{\Sigma L}{D}\text{, где } \Sigma\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 \text{ и } \Sigma L = L_1 + L_2 + L_3,$$

представляет ***коэф. сопротивления*** для рассматриваемого водопровода. Подставим это выражение в уравн. (a) и получим

$$\left(1 + \zeta_0\right) \frac{V_p^2}{2g} = H + \frac{V_0^2}{2g}\text{; отсюда } V_p = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_0}} \sqrt{2g\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)}$$

Так же, как и в случае отверстий и насадок, найдем, что

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_0}} = \varphi_0$$

где φ_0 — ***коэф. скорости*** для нашего водопровода; так как струя выходит из трубы без сжатия, то $\varphi_0 = \mu_0 =$ ***коэф. расхода*** для этого водопровода. Итак получается:

$$V_p = \mu_0 \sqrt{2g\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (213)$$

Если Ω_0—поперечное сечение резервуара, то из равенства

$$Q = \Omega_0 V_0 = \omega V_p \text{ находим } V_0 = \frac{\omega}{\Omega_0} V_p.$$

Тогда помощью этого выражения можем из предидущего равенства исключить высоту начальной скорости, и получается

$$V_p = \mu_0 \sqrt{\frac{2gH}{1 - \left(\frac{\mu_0 \omega}{\Omega_0}\right)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (213\,a).$$

Мы принимаем скорость V_p одинаковою во всех точках выходного отверстия; поэтому расход можно представить так:

$$Q = \omega V_p = \mu_0 \omega \sqrt{2g\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (214).$$

В выражениях для V_p и Q коэф. μ_0 выражается так:

$$\mu_0 = \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_0}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\mu^2}-1\right)+\Sigma\zeta+\lambda\frac{\Sigma L}{D}}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (215).$$

Выражения для V_p и Q тожественны по виду с полученными выражениями для отверстий и насадок. Относительно величины коэф. μ_0 следует повторить сказанное в предидущем §.

Если величина $\frac{V_0^2}{2g}$ мала сравнительно с H или, что все равно, величина $\left(\frac{\mu_0\omega}{\Omega_0}\right)^2$ мала сравнительно с 1, то во всех таких случаях можно предидущие выражения представить в таком простейшем виде:

$$V_p = \mu_0 \sqrt{2gH} \qquad Q = \mu_0 \omega \sqrt{2gH} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (216)$$

Полученные выражения для V_p будут нам необходимы при рассмотрении этого водопровода для случая переменного горизонта. Для решения задач, относящихся к настоящему случаю, удобнее пользоваться следующей формулой, которую получим, заменив в выражении для местных и общих сопротивлений величину

$$\frac{V_p^2}{2g} \text{ через } \frac{Q^2}{2g\omega^2} \text{ и величину } \frac{V_0^2}{2g} \text{ через } \frac{Q^2}{2g\Omega_0^2}.$$

Тогда из уравн. (a) получаем:

$$\left[1-\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2+\left(\frac{1}{\mu^2}-1\right)+\zeta_1+\zeta_2+\frac{\lambda}{D}\left(L_1+L_2+L_3\right)\right]\frac{Q^2}{2g\omega^2} = H \; . \; . \; . \; (b).$$

Помощью этого уравнения можем решать следующие *три* задачи, подобно тому, что было показано в предидущем случае.

Первая задача заключается в определении напора H; вторая — в определении расхода Q, и третья — в определении диаметра D. Первые две задачи решаются весьма просто; третья же задача получается более сложной, так как D входит в высоких степенях и иногда в дробных. Значения коэф. ζ_1 и ζ_2 приведены в § 43; для коэф. b_1, обусловливающего значение коэф. γ, надо выбрать одно из выражений, приведенных в § 42.

Здесь, как и в предидущем случае простого водопровода, нередко в приложениях можно сделать следующие упрощения в полученном

общем выражении (b), если пренебречь членами, имеющими довольно малую величину сравнительно с остающимися членами.

1) Прежде всего можно пренебречь членом

$$\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2 \frac{Q^2}{2g\omega^2} = \frac{V_0^2}{2g}, \text{ т.-е. высотой начальной скорости.}$$

2) Затем можно пренебречь местным сопротивлением при входе т.-е. величиной

$$\left(\frac{1}{\mu^2}-1\right)\frac{Q^2}{2g\omega^2} = \left(\frac{1}{\mu^2}-1\right)\frac{V_p^2}{2g} = 0{,}5\frac{V_p^2}{2g} \text{ (приблиз.)}.$$

3) Далее можно пренебречь членом

$$\frac{Q^2}{2g\omega^2} = \frac{V_p^2}{2g}.$$

4) Наконец, если местные сопротивления в закруглениях и коленах имеются в небольшом числе, то можно также пренебречь и этими сопротивлениями.

Мы рассмотрим случай, когда всеми перечисленными членами можно пренебречь по их малости, и когда, следов., весь напор H тратится только на общие сопротивления. Тогда в уравн. (b) можно всеми членами в скобках пренебречь, кроме последнего; заменяя ω через $\frac{\pi D^2}{4}$ и имея в виду, что

$$\lambda = 8gb_1 \text{ и что } \frac{1}{\gamma} = \frac{64b_1}{\pi^2}$$

получаем:

$$\frac{Q^2\Sigma L}{\gamma D^5} = \lambda\frac{\Sigma L}{D}\frac{V_p^2}{2g} = H \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (c).$$

Здесь под ΣL надо разуметь полную длину всей трубы. При помощи этого уравнения можно решать вышеприведенные три задачи, при чем определение D здесь производится проще, чем в общем случае.

Определение давлений в трубе. Определим давление p' в сечении M' (черт. 150); для этой цели рассмотрим линию тока M_0M': для нее имеем:

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g} + \left(h'' - h_0''\right) = \left(z_0 + \frac{p_0}{\Delta}\right) - \left(z' + \frac{p'}{\Delta}\right) = y - \frac{p' - p}{\Delta}$$

здесь $(z_0 - z') = y$. Отсюда получаем:

$$\frac{p' - p_0}{\Delta} = y + \frac{V_0^2}{2g} - \left[\frac{V_p^2}{2g} + (h'' - h_0'')\right]$$

где

$$\left(h'' - h_0''\right) = \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\frac{V_p^2}{2g} + \zeta_1\frac{V_p^2}{2g} + \lambda\frac{L_1}{D}\frac{V_p^2}{2g} + \lambda\frac{L_2}{D}\frac{V_p^2}{2g}$$

при чем $L'_2 = cM'$. Следоват., предидущее уравнение можно переписать так:

$$\frac{p'-p_0}{\Delta} = y + \frac{V_0^2}{2g} - \left[\left(\frac{1}{\mu^2} + \zeta_1\right) + \lambda \cdot \frac{L_1 + L'_2}{D}\right]\frac{V_p^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (d).$$

Покажем построение линий скоростей и давлений. От горизонта воды в резервуаре откладываем вертикально вверх высоту $\frac{V_0^2}{2g}$ и проводим горизонтальную плоскость NN, которая представит плоскость напора. От этой плоскости по вертикали вниз в точках $a'; b'; c'; d' \ldots$ откладываем высоты скоростей в точках трубы $a; b; c; d \ldots$ т.-е.

$$\frac{V_1^2}{2g};\ \frac{V_p^2}{2g} \ldots$$

Тогда получим линию скоростей $M_0Ba''b''c''d''e'' \ldots$ Она состоит из криволинейных частей $M_0Ba''b''$; $c''d''e'' \ldots$ соответствующих местным сопротивлениям, и из прямых горизонтальных линий $b''c''$; $e''f'' \ldots$ соответствующих прямым частям трубы. От линии скоростей по вертикали вниз откладываем $a''a'''$ и $b''b'''$ высоты гидрав. сопротивлений на пути M_0a и M_0b; затем откладываем $d''d'''$ высоту гидрав. сопротивлений на пути M_0d и т. д. Получаем линию $M_0Ba'''b'''d''' \ldots M$; это будет линия давлений. Она также состоит из криволинейных частей $M_0Ba'''b'''$; $c'''d'''e''' \ldots$ соответствующих местным сопротивлениям в частях трубы kab; $cde \ldots$ и из прямых линий $b'''c'''$; $e'''f'''$; $h'''M$, которые соответствуют общим сопротивлениям в прямых частях трубы bc; ef; $k'M$. Уклоны прямых $b'''c''' \ldots$ можно определить следующим образом. Если обозначить $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots$ углы, составляемые этими прямыми с горизонтом, а $\beta_1\ \beta_2 \ldots$ углы составляемые продольною осью трубы также с горизонтом, то, как известно, имеем:

$$tg\alpha_1 \cdot Cos\,\beta_1 = tg\alpha_2 \cdot Cos\,\beta_2 = \ldots = i = \frac{Q^2}{\gamma D^5} = \frac{\lambda}{D}\frac{V_p^2}{2g}$$

Таким образом уклоны прямолинейных участков линии давлений тем больше, чем больше уклоны соответственных линий трубы. Наименьший уклон соответствует горизонтальным частям трубы.

Если, как это было предположено выше, можно пренебречь членом

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g}$$

а также всеми местными сопротивлениями по их малости сравнительно с общими сопротивлениями, то уравн. (d) примет такой вид:

$$\frac{p'-p_0}{\Delta} = y - \lambda \cdot \frac{L_1 + L'_2}{D} \cdot \frac{V_p^2}{2g} = y - \frac{Q^2(L_1 + L'_2)}{\gamma D^5}$$

В этом случае линия давлений представляется ломаной линией $B_0 d'' n'' q M$ (черт. 151). Для точки M' имеем: $M'b = y$; затем

$$d'd'' = \frac{Q^2 L_1}{\gamma D^5};\ b'b'' = \frac{Q^2 L'_2}{\gamma D^5};\ \text{следоват.},\ \frac{p' - p_0}{\Delta} = M'b''.$$

Для отдельных линий $L_1 L_2 \ldots$ имеем следущие сопротивления:

$$\text{для } L_1\text{: } d'd'' = \frac{Q^2 L_1}{\gamma D^5};\ \text{для } L_2\text{: } n'n'' = \frac{Q^2 L_2}{\gamma D^5}$$

$$\text{для } L_3\text{: } qq' = \frac{Q^2 L_3}{\gamma D^5};\ \text{для } L_4\text{: } Mc''' = \frac{Q^2 L_4}{\gamma D^5}.$$

Отсюда видно, что эти потери напора пропорциональны длинам труб L_1 $L_2 \ldots$; сумма же этих потерь, очевидно, равна H согласно уравн. (a). Поэтому величины $d'd''$; $n'n'' \ldots$ можно найти геометрически, если разделить H на отрезки cc'; $c'c'' \ldots$ пропорциональные L_1; $L_2 \ldots$; тогда $d'd'' = cc'$; $n'n'' = c'c''$ и т. д. Отсюда видно, что найденная линия давлений не зависит от диаметра трубы, а потому останется без изменения при всяком диаметре.

Водопровод, в котором линия давления пересекает трубу. Построим линию давления $AceM$ (черт. 152) для водопровода $abcdefM$ по только что изложенному способу; пусть эта линия пересекает трубу в точках c и e. Тогда труба разделяется на 3 части; в первой abc и в третьей efM — давление *больше* атмосферного; если где-либо в этих трубах сделать отверстие, то вода будет бить фонтаном. В средней части cde давление *меньше* атмосферного; из отверстия где-либо в этой трубе вода не будет вытекать; наоборот, воздух с шипением будет всасываться в трубу. Всосанный воздух будет скопляться в наиболее повышенных частях трубы и стеснять поперечное сечение трубы и тем уменьшать расход трубы; в крайнем случае движение в трубе может совсем прекратиться. Если же труба уложена в землю в пределах грунтовой воды, то эта вода будет всасываться в трубу и портить воду, протекающую по трубе. В виду этого необходимо избегать укладки трубы в таких местах, где давление в трубе становится меньше атмосферного. Если на конце трубы имеется задвижка, то, приводя ее в действие, заставим линию давления подниматься все выше и выше, и таким образом линия давлений может подняться выше трубы. Тогда во всей трубе давления будут больше атмосферного. Наибольшее понижение линии давлений под линией трубы равное dd' не может быть равным или быть большим высоты атмосферного давления, т.-е. 34 ф. или 10,33 м.

§ 46. Простой водопровод, соединяющий два резервуара.

Рассмотрим случай, когда труба соединяет два резервуара A и A', разность горизонтов которых равна H (черт. 153).

Определение скорости и расхода. Для этого рассмотрим линию тока M_0kabM, которая начинается на поверхности резервуара A и кончается в выходном отверстии трубы; пусть она совпадает с продольною осью трубы. Для этой линии имеем:

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g} + (h'' - h_0'') = \left(z_0 + \frac{p_0}{\Delta}\right) - \left(z + \frac{p}{\Delta}\right) = \left(z_0 + \frac{p_0}{\Delta}\right) - \left(z_0' + \frac{p_0}{\Delta}\right) =$$
$$= H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a).$$

Давления в выходном отверстии трубы изменяются по гидростатическому закону, так как скорости параллельны между собою; по тому же закону изменяются давления в жидкости, окружающей струю, так как эту жидкость мы принимаем находящеюся в покое.

Поэтому $\left(z + \frac{p}{\Delta}\right) = \left(z_0' + \frac{p_0}{\Delta}\right)$, согласно закону Паскаля. Гидравлические сопротивления по линии M_0M состоят из местного сопротивления при входе в трубу и из общего сопротивления на длине трубы $bM = L'$; сумма их равна:

$$(h' - h_0'') = \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\frac{V_p^2}{2g} + \lambda\frac{L'}{D}\frac{V_p^2}{2g} = \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\frac{Q^2}{2g\omega^2} + \frac{Q^2L'}{\gamma D^5} = \zeta_0\frac{V_p^2}{2g}.$$

Тогда предидущее уравнение принимает такой вид:

$$\left\{1 + \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right) + \lambda\frac{L'}{D}\right\}\frac{V_p^2}{2g} = H + \frac{V_0^2}{2g} = h.$$

Обозначим $\zeta_0 = \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right) + \lambda\frac{L'}{D}$,

где ζ_0 — *коэфф. сопротивления* водопровода; тогда получаем такое выражение:

$$V_p = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_0}}\sqrt{2gh} = \varphi_0\sqrt{2gh} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (216).$$

Расход равен:

$$Q = \omega V_p = \varphi_0\omega\sqrt{2gh} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (216\,a).$$

Здесь сжатия струи в выходном отверстии нет, а потому $\varphi_0 = \mu_0$; так как:

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_0}}, \text{ то } \zeta_0 = \frac{1}{\varphi_0^2} - 1.$$

Если высотою начальной скорости можно пренебречь по ее малости сравнительно с H, то получаем такие простейшие выражения:

$$V_p = \varphi_0\sqrt{2gH}, \qquad Q = \mu_0\omega\sqrt{2gH} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (217).$$

Из выражений для V_p и Q видим, что они имеют совершенно тот же вид, как и в случае вытекания из отверстий и насадок.

Этим выражением для скорости V_p мы воспользуемся при рассмотрении водопровода, соединяющего два резервуара при переменном горизонте. Для решения относящихся сюда задач удобнее пользоваться, так же как и в предыдущих случаях, выражением, которое получим из уравн. (a), выразив все члены через расход Q, т.-е. заменив

$$\frac{V_p^2}{2g} = \frac{Q^2}{2g\omega^2} \quad \text{и} \quad \frac{V_0^2}{2g} = \frac{Q^2}{2g\Omega_0^2}.$$

Тогда имеем такое же выражение, как и при вытекании на воздух:

$$\left[1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right) + \frac{2g\omega^2 L'}{\gamma D^3}\right] \frac{Q^2}{2g\omega^2} = H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Здесь, как и в предидущих случаях, приходится решать *три* следующие задачи: a) определить расход Q; b) определить напор H и c) определить диаметр трубы D. Решение первых двух задач производится на основании уравн. (b) весьма просто, если задаться выражением для основного коэфф. b_1 или 1) постоянным (напр., по формуле Дюпюи), или 2) зависящим только от R, т.-е. от D (напр., форм. Базена)—при определении Q или 3) зависящим от R и V (напр., форм. Фламана) — при определении H.

Решение третьей задачи несколько сложнее, так как D входит в уравн. (b) в высоких степенях a, иногда в дробных в зависимости от выражения, выбранного для коэфф. b_1.

Во многих случаях практики можно решать эти задачи при значительных упрощениях в уравн. (b), пренебрегая в нем членами, величина которых мала сравнительно с остающимися членами.

1) Прежде всего можно пренебречь высотою начальной скорости, т.-е. членом

$$\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2 \cdot \frac{Q^2}{2g\omega^2} = \frac{V_0^2}{2g}.$$

2) Затем можно пренебречь местным сопротивлением при входе в трубу, т.-е. членом

$$\left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\frac{Q^2}{2g\omega^2} = \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\frac{V_p^2}{2g} = 0{,}5\,\frac{V_p^2}{2g}.$$

3) Далее можно пренебречь членом

$$\frac{Q^2}{2g\omega^2} = \frac{V_p^2}{2g}.$$

Мы рассмотрим теперь случай, когда всеми перечисленными членами можно пренебречь по их малости и когда, следовательно, весь-

напор H тратится только на общие сопротивления. В этом случае в уравн. (b) можно всеми членами в скобках пренебречь, кроме последнего. Тогда, заменяя ω через $\frac{\pi D^2}{4}$ и имея в виду, что $\lambda = 8gb_1$ и что $\frac{1}{\gamma} = \frac{64b_1}{\pi^2}$, получаем:

$$\lambda \frac{L}{D}\frac{V_p^2}{2g} = \frac{Q^2L}{\gamma D^5} = H. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

При помощи этого уравнения можем решать вышеприведенные три задачи, при чем определение D производится здесь проще, чем в общем случае по уравн. (b). Если в виде примера выбрать для коэфф. b_1 два наиболее характерные выражения, а именно, по Дюпюи $b_1 =$ = постоян. и по Фламану $b_1 = f(R; V)$, то получим выражения (210 и 211), найденные нами в § 44.

Определение давлений в трубе. Это определение делается во всем согласно с изложенным в § 44 для случая простого водопровода при вытекании воды на воздух, а именно следующим образом. Для определения давления p' в какой-либо точке M' рассмотрим линию тока M_0M' (черт. 153), для которой получаем:

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g} + (h'' - h_0'') = \left(z_0 + \frac{p_0}{\Delta}\right) - \left(z' + \frac{p'}{\Delta}\right) = y - \frac{p' - p_0}{\Delta},$$

где $y = (z_0 - z')$ представляет вертикальное расстояние точки M' от горизонта воды в резервуаре. Сопротивление состоит из двух: местного сопротивления при входе, равного

$$\left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\frac{V_p^2}{2g}$$

и из общего сопротивления по длине трубы $bM' = l$; оно равно

$$\lambda \frac{l}{D}\frac{V_p^2}{2g} = \frac{Q^2 l}{\gamma D^5}.$$

Тогда из предидущего равенства находим:

$$\frac{p' - p_0}{\Delta} = y + \frac{V_0^2}{2g} - \left[\frac{V_p^2}{2g} + (h'' - h_0'')\right] = y + \frac{V_0^2}{2g} - \left[\frac{V_p^2}{2g\mu^2} + \frac{Q^2 l}{\gamma D^5}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (d).$$

Следовательно, высота свободного давления равна ординате y, увеличенной на высоту начальной скорости и за вычетом высоты скорости в рассматриваемой точке M' и высоты гидравлических сопротивлений на пути M_0M'. Линия скоростей построится таким образом. От горизонта воды в резервуаре откладываем по вертикали вверх высоту начальной скорости и проводим горизонтальную плоскость NN, которая

представит плоскость напора. От этой плоскости вертикально вниз откладываем высоты соответственных скоростей, т.-е.

$$a'a'' = \frac{V_1^2}{2g}; \quad b'b'' = \frac{V_p^2}{2g}.$$

Тогда получается линия скоростей $M_0Ba''b''c''d''$. Далее по вертикали вниз от линии скоростей откладываем высоты гидравлических сопротивлений:

$$a''a''' = \zeta\frac{V_1^2}{2g} = \frac{\zeta}{\alpha^2}\frac{V_p^2}{2g}; \quad b''b''' = \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\frac{V_p^2}{2g}; \quad c''c''' = \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\frac{V_p^2}{2g} +$$

$$+ \lambda\frac{l}{D}\frac{V_p^2}{2g} \text{ и т. д.}$$

Таким образом находим линию давлений $M_0Ba'''b'''c'''d'''$, которая оканчивается на горизонте нижнего резервуара. Вертикальные расстояния между продольною осью трубы abM и найденною линиею давления суть искомые высоты свободного давления $\frac{p' - p_0}{\Delta}$; напр., для точки M' получаем: $\frac{p' - p_0}{\Delta} = M'c'''$.

Вертикальные расстояния между кривой скоростей и кривой давления представляют высоты соответственных гидравлических сопротивлений; напр., $b''b'''$ представляет высоту сопротивлений на пути $M_0\,b$; $c''c'''$ представляет высоту сопротивлений на пути M_0M'; $d''d'''$ — высоту сопротивлений на пути M_0M. Кривые скоростей и давлений в начале трубы были подробно рассмотрены в § 43 и показаны на черт. 137. Линия давлений $b'''d'''$ на длине трубы bM представляет прямую линию; угол α, составляемый этою линией с горизонтом, найдем из равенства:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\beta = i = \frac{Q^2}{\gamma D^5} = \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{V_p^2}{2g},$$

где β — угол, составляемый продольною осью трубы с горизонтом.

Приближенную линию давлений получим, если допустим упрощения, указанные выше, а именно, если пренебрежем членом

$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g}$, а также местным сопротивлением при входе.

Тогда уравн. (d) примет такой вид:

$$\frac{p' - p_0}{\Delta} = y - \lambda\frac{l}{D}\frac{V_p^2}{2g}.$$

Если соединить точки B и C (черт. 154), лежащие на поверхности воды в резервуарах, прямой BC, то она представит приближенную

линию давлений. Эта линия давлений одинакова для всяких прямолинейных труб, соединяющих эти два резервуара, каков бы ни был их диаметр.

Простой водопровод, соединяющий два резервуара и состоящий из нескольких прямолинейных частей одного и того же диаметра (черт. 155).

Предположим, что прямолинейные части водопровода соединены между собою закруглениями и коленами; пусть они имеют длину L_1, L_2... и составляют с горизонтом углы β_1, β_2... Если длина этих частей настолько значительна, что можно пренебречь членом

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g},$$

а также всеми местными сопротивлениями (при входе в трубу, в закруглениях и коленах), то для решения задач, относящихся к этому водопроводу, получим выражение:

$$\lambda \frac{\Sigma L}{D} \cdot \frac{V_p^2}{2g} = \frac{Q^2 \Sigma L}{\gamma D^5} = H,$$

где $\Sigma L = L_1 + L_2 + \cdot \cdot \cdot$. Как и во всех предыдущих случаях, здесь приходится решать задачи троякого рода, а именно: определять расход Q, напор H и диаметр D.

Линию давлений найдем помощью следующего геометрического построения совершенно так же, как это было сделано в § 45.

Разность горизонтов H разделим на части ce', $c'c''$, $c''c'''$ и $c'''f$ пропорциональные длинам L_1, L_2... Проводя затем через точки c', c''... горизонтальные линии, а через точки d, g, i — вертикальные линии до взаимного пересечения их и, соединяя прямыми точки B, d'', g''..., получим искомую линию давлений $Bd''g''i''f$. В настоящем случае вся линия давлений лежит выше водопроводных труб, а потому давление в них больше атмосферного. Но могут быть случаи, когда линия давлений лежит частью ниже линии труб. На черт. 156 показан случай, когда линия давлений $Bd''g''f$ лежит ниже труб на протяжении $md''g''n$, а на протяжении Bm и nf — лежит выше. Следовательно, в частях трубы Bm и ni давления больше атмосферного, а в части $mdgn$ — меньше атмосферного. Как было об'яснено выше в § 45, при проектировании водопроводов подобные случаи не должны допускаться.

§ 47. Примерные расчеты простых водопроводов.

Первый пример. Этот случай часто встречается при проектировании городских, заводских и железнодорожных водопроводов. При городских водопроводах часто вода берется из реки трубой abc (черт. 157), уло-

женной частью по дну реки, частью — в земле. Труба оканчивается в колодце A, из которого вода берется паровыми насосами помощью всасывающей трубы d; эти насосы поставлены в особом водопод'емном здании. Затем вода из насосов направляется по нагнетательной или напорной трубе в город, на завод, на железнодорожную станцию. По мере выкачивания воды из колодца, горизонт в нем понижается; тогда вследствие разности H горизонтов воды в реке и в колодце устанавливается приток воды из реки в колодец. Рассмотрим случай установившегося движения. Пусть расход всасывающей трубы равен Q; вместе с тем это будет расход трубы abc; длину и диаметр этой последней трубы обозначим L и D. Пренебрегая членом

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g},$$

а также местным сопротивлением при входе в трубу и, предполагая размеры колодца довольно значительными, находим известное выражение:

$$\lambda \frac{L}{D} \frac{V_p^2}{2g} = \frac{Q^2 L}{\gamma D^5} = H \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a).$$

Помощью этого уравнения решаются все вопросы, относящиеся к этому водопроводу.

а) Пусть дано: $Q = 5$ куб. фут.; $L = 200$ фут.; $H = 0{,}5$ ф. По этим данным вычислить диаметр D трубы, предполагая, что она после многих лет службы должна удовлетворять поставленным условиям.

Предположим сперва, что коэфф. b_1 постоянный и, по Дюпюи, равный 0,0001175 для футов, тогда $\lambda = 0{,}03025$ и $\frac{1}{\gamma} = 0{,}000762$.

Из уравн. (a) находим:

$$D = \sqrt[5]{\frac{Q^2 L}{\gamma H}} = \sqrt[5]{\frac{5^2 . 200 . 0{,}000762}{0{,}5}} = 1{,}50 \text{ ф.} = 18 \text{ д.}$$

Если взять коэфф. b_1 переменным, напр., по форм. Фламана для старых асфальтированных труб, то получим по ф. (211) в § 44:

$$D = \sqrt[19]{\left[\frac{AQ^{7/4}L}{H}\right]^4} = \sqrt[19]{\left[\frac{0{,}0007752 . 5^{7/4} . 200}{0{,}5}\right]^4} = 1{,}34 \text{ ф.} = 16 \text{ д.}$$

Итак, здесь пользование более точной формулой привело к чувствительному уменьшению диаметра трубы. Для железнодорожных водоснабжений забор воды производится приблизительно таким же образом; только конец трубы в реке устанавливается в особом деревянном ограждении с каменною наружною отсыпью (черт. 158). Труба ab

иногда делается деревянной из пластин, квадратного поперечного сечения; сторона квадрата для удобства работы берется в 1 арш.=2,33 ф.

При таком большом сечении трубы и при прежних значениях для Q и L получается разность горизонтов H весьма малой, как это видно из нижеследующего примера.

b) Определить разность горизонтов H в реке и в колодце, если дано: $Q=5$ куб. ф.; $L=200$ ф.; труба деревянная из пластин, квадратного поперечного сечения; сторона квадрата $a=1$ арш. $=2,33$ ф.

Пренебрегая всеми местными сопротивлениями, находим по форм. (d) в § 42 при $a=b$:

$$(h''-h_0'')=H=\frac{4b_1Q^2L}{a^5}\,.$$

Коэфф. b_1 берем по формуле Базена для русел II категории с коэфф. шероховатости $\gamma=0,16$; получаем по форм. (190 a):

$$b_1=\alpha^2\left(\beta+\frac{\gamma}{\sqrt{R}}\right)^2=(0,0115)^2\left(0,552+\frac{0,16}{\sqrt{0,58}}\right)^2=0,0000768\,.$$

Здесь гидравлический радиус $R=\frac{\omega}{\chi}=\frac{a^2}{4a}=\frac{a}{4}=0,58$ ф.

Теперь имеем:

$$H=\frac{4.0,0000768.5^2.200}{(2,33)^5}=0,022\ \text{ф.}=0,27\ \text{д.}$$

Итак, действительно, разность горизонтов H получается весьма малой.

Второй пример. Рассмотрим наполнение водою паровозного тендера из путевого гидравлического крана на станции железной дороги. На верху водоемного здания A (черт. 159) располагается железный бак B приблизительно таких размеров: диаметр 20 ф., высота цилиндрической части 16,6 ф., стрела сферического дна бака 2,5 ф. Из этого бака вода распределяется по станции разводящими трубами. Для наполнения паровозных тендеров устанавливаются на станции две или более гидравлических колонн или кранов C; выпускное отверстие колонны возвышается над головкой рельса на 11,8 ф. Возвышение низа сферического дна бака над рельсами равно 31,5 ф. По этим данным решим следующие задачи.

a) *Определить время t наполнения тендера* по следующим заданиям: об'ем тендера равен 500 куб. ф., длина разводящей трубы $abc=L=$ $=400$ ф. и диаметр этой трубы $D=6$ д. $=0,5$ ф. Горизонт воды в баке колеблется в пределах цилиндрической части его. Следовательно, самый высокий горизонт воды в баке возвышается над выпускным

отверстием путевого крана на $(16,6+2,5+31,5)-11,8=38,80$ ф., а самый низкий горизонт на $38,80-16,6=22,2$ ф. Нетрудно вычислить, что при наполнении всего тендера вода в баке понижается приблизительно на 1,6 ф. Очевидно, самый неблагоприятный случай будет тот, когда наполнение тендера начнется при возвышении горизонта воды в баке над выпускным отверстием крана равном $22,2+1,6=$ $=23,8$ ф., а окончится при возвышении этого горизонта в 22,2 ф. Следовательно, возвышение среднего горизонта над c равно $\frac{1}{2}$ $(22,2+$ $+23,8)=23$ ф.

Тогда за средний напор H, под которым вытекает вода из бака, можно принять значение 23 ф. По форм. Дюпюи (210) при вышеуказанных данных находим расход:

$$Q=\sqrt{\frac{\gamma HD^5}{L}}=\sqrt{\frac{23.(0,5)^5}{0,000762.400}}=1,54 \text{ куб. ф.}$$

Отсюда время наполнения тендера:

$$t=\frac{500}{1,54}=326 \text{ сек.}=5 \text{ м. } 26 \text{ сек.}$$

Пользуясь форм. Фламана (193 и 211) с коэфф. для старых асфальтированных труб, находим:

$$Q=\sqrt[7]{\left[\frac{HD^{19/4}}{AL}\right]^4}=\sqrt[7]{\left[\frac{23\ (0,5)^{19/4}}{0,0007752.400}\right]^4}=1,78 \text{ куб. ф.}$$

Время наполнения тендера:

$$t=\frac{500}{1,78}=280 \text{ сек.}=4 \text{ м. } 40 \text{ сек.}$$

b) Определим *диаметр* трубы по заданному времени наполнения тендера. Пусть время $t=5$ минут, об'ем тендера 500 к. ф., длина трубы 400 ф.; возвышение среднего горизонта воды в баке над выпускным отверстием крана $H=23$ фут. Расход трубы равен:

$$Q=\frac{500}{5.60}=1,667 \text{ к. ф.}$$

Применяя формулу Дюпюи, находим:

$$D=\sqrt[5]{\frac{Q^2L}{\gamma H}}=\sqrt[5]{\frac{0,000762(1,667)^2 400}{23}}=0,517 \text{ ф.}=6,2 \text{ д.}$$

Округлием этот результат и берем по сортаменту $D=7$ д. $=0,583$ ф.

c) Найдем высоту расположения бака по условию, чтобы тендер емкостью в 500 куб. ф. наполнялся в 4 минуты при диаметре трубы в 7 д. и при длине ее в 400 ф. Находим расход

$$Q = \frac{500}{4.60} = 2{,}08 \text{ к. ф.}$$

Затем, пользуясь форм. Дюпюи, имеем;

$$H = \frac{Q^2 L}{\gamma D^5} = \frac{0{,}000762(2{,}08)^2 400}{(0{,}583)^5} = 19{,}5 \text{ ф.}$$

Эта величина представляет возвышение среднего горизонта воды в баке над выпускным отверстием крана. Возвышение низа цилиндрической части бака dd над c равно: $19{,}5 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}6 = 18{,}7$ ф. Прибавим к этому числу 11,8 ф. и получим возвышение над рельсами низа цилиндрической части бака равным 30,5 ф. Следовательно, возвышение над рельсами низа сферической части бака равно 28 ф.

Третий пример. Расчет чугунной трубы под полотном железной дороги. Для пропуска вод под полотном железной дороги устраиваются чугунные трубы диаметром от 0,5 до 0,75 сажени (черт. 160). Наибольший приток воды Q к трубе, на который она должна быть расчитана, определяется по нормам Кестлина. Техническими условиями установлено, что наибольшая скорость в трубе V_p не должна превосходить 10 ф. при устройстве основания для трубы из мятой глины со щебнем — и не более 20 ф. при устройстве основания из бетона или каменной кладки; по тем же техническим условиям требуется, чтобы напор H над центром выходного отверстия не превосходил известного предела H_1, при этом вода идет полным сечением. Когда приток воды к трубе мал, то вода идет не полным сечением, как по каналу кругового поперечного сечения; следовательно, труба должна быть уложена с некоторым продольным уклоном.

Труба расчитывается как простой водопровод с напором H, расходом Q и диаметром D; этот напор представляет вертикальное расстояние от центра выходного отверстия трубы до самого высокого горизонта воды перед трубой. При этом расчете будем пользоваться форм. (202 и 203) в § 44, в которой будем пренебрегать начальной скоростью. т.-е. членом

$$\frac{Q^2}{2g\Omega_0^2} = \frac{V_0^2}{2g}.$$

Итак, получаем:

$$\left(\frac{1}{\mu^2} + \lambda \frac{L'}{D}\right)\frac{Q^2}{2g\omega^2} = H \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (217).$$

Здесь μ — коэфф. расхода для цилиндрической насадки; при малых диаметрах насадки $\mu = 0{,}82$; для очень больших диаметров, каковы

диаметры чугунных труб под насыпями, следует принимать $\mu = 0{,}78$. Затем, как известно, коэфф. $\lambda = 8gb_1$. Для основного коэфф. b_1 здесь следует пользоваться формулой *Дарси* с коэффициентами a и b для *старых* труб в виду того, что до настоящего времени чугунные трубы под насыпями железных дорог укладывались неасфальтированные. Если же предположено укладывать трубы асфальтированные, то для коэфф. b_1 следует брать форм. *Фламана* с коэффициентом для старых асфальтированных труб:

Первый член в предидущей формуле можно переписать так:

$$\frac{1}{\mu^2}\;\frac{Q^2}{2g\omega^2} = \frac{8}{g\pi^2\mu^2}\,\frac{Q^2}{D^4} = A_1\,\frac{Q^2}{D^4},\ \text{где}\ A_1 = \frac{8}{g\pi^2\mu^2} = 0{,}0414.$$

Второй член той же формулы представится так:

$$\lambda\,\frac{L'}{D}\,\frac{Q^2}{2g\omega^2} = 8gb_1\cdot\frac{L'}{D}\cdot\frac{16Q^2}{2g\pi^2D^5} = \frac{64}{\pi^2}\,b_1\,\frac{Q^2L'}{D^5} = Bb_1\,\frac{Q^2L'}{D^5},$$

где $B = \frac{64}{\pi^2} = 6{,}486$.

По формуле (189) Дарси: $b_1 = a + \frac{b}{R} = a + \frac{4b}{D}$;

здесь для старых труб неасфальтированных (меры в футах)

$$a = 0{,}00007726\cdot 2,$$
$$b = 0{,}00000162\cdot 2.$$

Теперь окончательно получаем:

$$A_1\frac{Q^2}{D^4} + B\left(a + \frac{4b}{D}\right)\frac{Q^2L'}{D^5} = H \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (217\,a);$$

здесь L' — длина трубы, на которой проявляются общие сопротивления; можно принять, что местное сопротивление при входе в трубу распространяется на длину $4D$; тогда $L' = L - 4D$. При помощи уравн. (217 a) решим следующий численный пример.

Численный пример. При высоте насыпи в 5 саж. уложена чугунная труба диаметром 0,75 $c. = 5{,}25$ ф., на бетонном основании. Определить наибольший расход Q, который может пропустить такая труба, если известно, что по техническим условиям наибольший напор H при такой высоте насыпи не должен быть больше 1,75 саж. $= 12{,}25$ ф., а скорость в трубе не должна превосходить 20 ф.

Сперва определим расчетную длину L' трубы, считая, что ширина полотна по верху равна 2,60 саж. $=$ **18,2** ф. и что откосы насыпи полуторные.

Тогда $L = 18{,}2 + 3\cdot 35 = 123{,}2$ ф.; $L' = L - 4D = 123{,}2 - 21 = {}$ $= 102{,}2$ ф.

Вычислим теперь коэффициенты при Q^2 в предидущем уравнении. Имеем:

$$\frac{A_1}{D^4} = \frac{0,0414}{(5,25)^4} = 0,00005449,$$

$$B\left(a + \frac{4b}{D}\right)\frac{L'}{D^3} = 6,486\left(0,00015452 + \frac{0,00000324.4}{5,25}\right) \quad \frac{102,2}{(5,25)^3} = 0,00002609\,.$$

Тогда получаем:

$$Q^2(0,00005449 + 0,00002609) = H_1 = 12,25.$$

Следовательно,

$$Q = \sqrt{\frac{12,25}{0,00008058}} = 390 \text{ к. ф.}$$

Тогда скорость в трубе равна:

$$V_p = \frac{Q}{\omega} = \frac{390}{21,65} = 18 \text{ ф.}$$

что меньше предела 20 ф., установленного техническими условиями.

Если предположить, что применяется труба асфальтированная, то, как указано выше, следует применять формулу Фламана для старых асфальтированных труб. В выражении (217) первый член, представляющий сумму высот: скорости $\frac{V_p^2}{2g}$ и сопротивления при входе $\left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\frac{V_p^2}{2g}$, остается без изменения, а второй член, представляющий общее сопротивление в трубе, выразится форм. (211), данной в § 44. Тогда получаем:

$$\frac{A_1 Q^2}{D^4} + \frac{A Q^{7/4} L'}{D^{19/4}} = H,$$

где $A_1 = 0,0414$ и $A = 0,0007752$. Подставляя сюда значения для D и для L', находим окончательное выражение:

$$0,00005449\, Q^2 + 0,00003007\, Q^{7/4} = 12,25.$$

Это уравнение высокой степени относительно Q и его решить удобнее всего попытками. Возьмем, напр., $Q_1 = 400$ к. ф. и затем $Q_2 = 450$ к. ф.; находим для $Q_1 = 400$ к. ф.:

$$8,72 + 1,08 = 9,80 \text{ ф.} < H$$

далее для $Q_2 = 450$ к. ф.:

$$11,03 + 1,32 = 12,35 \text{ ф.} > H;$$

наконец, полагаем $Q_3 = 448$ к. ф.:

$$10,94 + 1,31 = 12,25 \text{ ф.} = H.$$

Итак окончательно получаем $Q = 448$ к. ф., что на 15% *больше* полученного нами ранее расхода 390 к. ф. при употреблении неасфальтированной трубы. Отсюда видна практическая выгода применения асфальтированных труб. Кроме того, такие трубы лучше сохраняются и не так скоро портятся от влияния воды и атмосферных деятелей. При $Q = 448$ к. ф. находим скорость:

$$V_p = \frac{Q}{\omega} = \frac{448}{21,65} = 20,7 \text{ ф.}$$

В настоящее время для расчета чугунных неасфальтированных труб под железнодорожными насыпями применяется формула *Вейсбаха* (188), имеющая такой вид:

$$b_1 = a + \frac{b}{\sqrt{V}},$$

где для футов: $a = 0,0000559$ и $b = 0,0000667$. Так как $V = \frac{4Q}{\pi D^2}$, то, подставляя, получаем:

$$b_1 = a + \frac{b\sqrt{\pi}D}{2\sqrt{Q}} = 0,0000559 + \frac{0,00031034}{\sqrt{Q}}.$$

Тогда уравн. (217) можно переписать так:

$$0,00005449\,Q^2 + 6,486\,\frac{Q^2 L'}{D^5}\left(0,0000559 + \frac{0,00031034}{\sqrt{Q}}\right) = H.$$

Подставляя сюда численные значения для L' и D, находим окончательно:

$$0,00006378\,Q^2 + 0,000051578\,Q^{3/2} = H = 12,25.$$

Это уравнение высокой степени относительно Q и решить его удобнее всего попытками. Подставим, напр., $Q = 430$ к. ф. и получим:

$$11,79 + 0,46 = 12,25.$$

Тогда
$$V = \frac{Q}{\omega} = \frac{430}{21,65} = 19,95 \text{ ф.}$$

Итак, по формуле Вейсбаха получаем для настоящего случая $Q = 430$ к. ф., что на 10% *больше* результата, найденного по форм. Дарси. Так как формула Дарси дает для старых неасфальтированных труб результаты, наиболее согласующиеся с действительностью, то отсюда заключаем, что, применяя форм. Вейсбаха для определения расхода Q, получаем для него величину несколько преувеличенную.

Если же применять ту же формулу Вейсбаха для определения диаметра трубы по заданному расходу ее, то получается для D величина несколько преуменьшенная.

Определение продольного уклона чугунной трубы. Чугунные трубы всегда укладываются с продольным уклоном i для того, чтобы они могли действовать и неполным сечением, без напора. Этот уклон определяется по условию, чтобы скорость протекания воды по трубе не превосходила предела, указанного в технических условиях, т.-е. чтобы в трубе на бетонном основании скорость была не больше $V_1 = 20$ ф., а в трубах на глиняном основании — не больше $V_2 = 10$ ф.

Если вода идет по круглой трубе неполным сечением, то, как будет указано ниже, наибольшая скорость течения соответствует глубине (черт. 97):

$$h_1 = 0{,}813\, D$$

или центральному углу $\alpha = 257°26'40''$. Тогда гидравлический радиус:

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{0{,}684 D^2}{2{,}247 D} = 0{,}304\, D.$$

Эта наибольшая скорость V равная или меньшая V_1 или V_2 определяется по формуле *Шези* (186):

$$V = C\sqrt{Ri} = C\sqrt{0{,}304\, Di} = 0{,}552 C\sqrt{Di}\,.$$

Отсюда находим искомый уклон

$$i = \left(\frac{V}{0{,}552 C}\right)^2 \frac{1}{D} = \left(\frac{V}{0{,}552}\right)^2 \frac{b_1}{D}\,.$$

Для коэфф. $C = \sqrt{\frac{1}{b_1}}$ или точнее для коэфф. b_1 целесообразнее брать форм. *Базена* (190) с коэфф. шероховатости $\gamma = 0{,}06$, соответствующим руслам I категории, как более других приспособленную к движению воды в открытых руслах.

Столь малое значение для коэфф. γ берется потому, что в начале существования трубы шероховатость ее будет наименьшей, и потому скорость протекания по трубе будет наибольшей.

Так как по Базену (форм. 190 a):

$$b_1 = \left[\alpha\left(\beta + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}\right)\right]^2,$$

то

$$i = \left[\frac{V\alpha\left(\beta + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}\right)}{0{,}552}\right]^2 \frac{1}{D}\,.$$

Здесь $\alpha = 0{,}0115 = \frac{1}{87}$; $\beta = 0{,}552$ для футов; $R = 0{,}813\, D$, то поэтому получаем в окончательном виде следующее выражение:

$$i = \left[\frac{(0{,}3045\sqrt{D} + \gamma) V}{48 D}\right]^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (217\, b).$$

Так как диаметр трубы D берется в пределах от 3,5 ф. до 5,25 ф., а предельная скорость V равна 10 ф. или 20 ф., то по форм. (217 b) получаем значения для наибольших уклонов, приведенные в следующей таблице:

	Глиняное основание $V = 10$ ф.		Бетонное основание $V = 20$ ф.	
	$D = 3,5$ ф.	$D = 5,25$ ф.	$D = 3,5$ ф.	$D = 5,25$ ф.
Наибольший уклон трубы i	0,001407	0,000904	0,005627	0,003617

Отсюда видно, что для труб диаметром от 3,5 ф. до 5,25 ф. наибольший уклон лежит в пределах от 0,0009 до 0,0056, в зависимости от диаметра трубы и предельной скорости V.

Четвертый пример. Расчет дюкера для перевода коллектора канализации под рекой. При устройстве канализации в городах часто бывает необходимо проводить под рекой главные каналы или коллекторы. При проведении железных дорог в Азии также нередки случаи проводки оросительных каналов под полотном железной дороги. Устройства, служащие для подобных целей, наз. переводами или *дюкерами*. Обыкновенно дюкер состоит из одной или нескольких железных клепанных труб, укладываемых поперек реки в особых выемках; эти трубы примыкают к каменным колодцам b и b' (черт. 161), устроенных на берегу реки. Сточная жидкость, притекающая по каналу a, проходит по дюкеру и далее движется по каналу a'. Для возможности такого движения необходимо, чтобы горизонт жидкости в колодце b был выше горизонта в b' на определенную величину H; это и есть напор, под которым происходит движение жидкости по дюкеру. Величина H небольшая и потому необходимо определить его возможно точнее, принимая во внимание все сопротивления. Каждая труба дюкера состоит из нескольких прямолинейных частей длиною L_1, L_2..., соединенных в A, B... закруглениями; подобные же закругления помещены в соединениях трубы с колодцами. Пусть V_0 и V_0' скорости в каналах a и a', Q, V_p, ω, D — суть расход, скорость, поперечное сечение и диаметр трубы. Тогда для линии тока M_0M получаем по уравнению Д. Бернулли

$$\frac{V_0'^2 - V_0^2}{2g} + \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\frac{V_p^2}{2g} + \frac{V_p^2}{2g}\Sigma\zeta + \frac{(V_p - V_0')^2}{2g} + \lambda\frac{\Sigma L}{D}\,\frac{V_p^2}{2g} = H \ldots (218).$$

Здесь второй член представляет местное сопротивление при входе в трубу; третий член — сумму местных сопротивлений в закруглениях; четвертый — местное сопротивление при выходе воды из трубы, определяемое по теореме Борда, и последний член—сумму общих сопротивлений. Это уравнение перепишем так, имея в виду, что обыкновенно $V_0 = V_0'$:

$$\left[\left(\frac{1}{\mu^2}-1\right)+\Sigma\zeta+\left(1-\frac{V'_0}{V_p}\right)^2+\lambda\frac{\Sigma L}{D}\right]\frac{V_p^2}{2g}=H \quad . \quad . \quad . (218a).$$

В этом выражении все величины, кроме H, известны. Сопротивления в закруглениях определим по форм. (197).

Численный пример. Один из коллекторов Московской канализации пересекает р. Москву у Новоспасского монастыря; для перевода его через реку устроен дюкер, показанный на черт. 161.

Для него имеются следующие данные: расход $Q = 10{,}529$ к. ф., диаметр $D = 2{,}5$ ф., $L_1 = 101{,}5$ ф., $L_2 = 343{,}7$ ф., $L_3 = 140$ ф., $V_0' = 2$ ф., $V_p = 2{,}145$ ф. Закругления описаны следующими радиусами: $\rho_1 = 441$ д., $\rho_2 = 609$ д., $\rho_3 = 255$ д. и $\rho_4 = 304$ д.; углы при центре для этих закруглений равны: $\beta_1 = 5{,}5°$, $\beta_2 = 4°$, $\beta_3 = 9{,}5°$, $\beta_4 = 8°$.

На основании этих данных по вышеуказанной формуле получаем значения коэфф. ζ в закруглениях: для первого закругления

$$\zeta_1 = 0{,}00416 \cdot 5{,}5\left(1-\frac{15}{441}\right)\sqrt{\frac{15}{441}} = 0{,}001368.$$

Также находим: $\zeta_2 = 0{,}00083$, $\zeta_3 = 0{,}002558$, $\zeta_4 = 0{,}002318$. Тогда

$\Sigma\zeta = 0{,}007074$. Затем $\left(\frac{1}{\mu^2}-1\right) = \left(\frac{1}{0{,}78^2}-1\right) = 0{,}6423$. Наконец,

$$\left(1-\frac{V_0'}{V_p}\right) = \left(1-\frac{2}{2{,}145}\right)^2 = 0{,}00457.$$

Для определения общих сопротивлений нужно иметь в виду, что железная клепанная труба Дюкера может быть и не асфальтированной, а потому для коэфф. b_1 при вычислении коэф. λ нужно пользоваться формулой Дарси (189) с коэффициентами a и b для старых неасфальтированных труб. Тогда для λ имеем выражение:

$$\lambda = 8gb_1 = 8g\left(a+\frac{4b}{D}\right)$$

где для футов: $a = 0{,}0000\ 7726.2$; $b = 0{,}00000\ 162.2$.

Следоват., для общих сопротивлений получаем:

$$\lambda\frac{\Sigma L}{D} = 8 \cdot 32{,}2.\ 0{,}0001597.\ 585{,}2.\frac{1}{2{,}5} = 9{,}630.$$

В окончательном результате находим:

$$(0{,}654+9{,}630)\frac{V_p^2}{2g}=10{,}284.\frac{(2{,}145)^2}{2.32{,}2}=0{,}735\ \text{ф.}=H.$$

Итак, разность горизонтов жидкости в колодцах или, что все равно, напор, под которым совершается движение жидкости в трубе, равен 0,735 ф. = 8,8 д.

Пятый пример. Определение силы паровых насосов, накачивающих воду из колодца в водоемное здание. Этот пример относится одинаково как к городским, так и к заводским и железнодорожным водопроводам. Из колодца A (черт. 162) вода берется паровыми насосами, расположенными в водопод'емном (машинном) здании B, помощью всасывающей трубы a. В этот колодец вода притекает из реки так, как показано было в первом примере (черт. 157 и 158), или же этот колодец получает грунтовую воду, собранную горизонтальными трубами или другими колодцами. Всосанная из колодца вода гонится насосами по нагнетательной (напорной) трубе bbb в бак D водоемного здания C, которое в городских водопроводах называется водонапорной башней. Насосы должны поднимать воду с самого низкого горизонта воды mm в колодце до самого высокого горизонта nn в баке, т.-е. на высоту $h+h'$, где h' — глубина всасывания и h — высота нагнетания. Высота $h+h'$ — называется геометрической высотой под'ема. Действительная высота под'ема будет больше, так как насосы должны преодолеть гидравлические сопротивления во всасывающей и нагнетательной трубах, а также сопротивления в самих насосах. Высота гидравлич. сопротивлений в нагнетательной трубе представится отрезком $ce=H$. Если пренебрегать гидравл. сопротивлениями во всасывающей трубе, которые вообще довольно малы, так как эта труба делается всегда короткой, то можно сказать, что насосы должны поднимать воду с горизонта m до горизонта e, т.-е. на высоту $h+h'+H$. При этом высота расположения насосов не имеет значения, лишь бы глубина всасывания h' не превосходила некоторого предела (23 ф. или 7 м.); если h' будет более этого предела, то насосы не могут всасывать воду. Вода из насосов поступает прежде всего в воздушный колпак a; в нем около половины об'ема занимает сжатый воздух, который своею упругостью умеряет толчки, являющиеся вследствие не вполне равномерного притока воды из насосов, и который таким образом играет роль упругой подушки. Упругость воздуха соответствует водяному столбу высотою $h+H$. Если поставить на воздушном колпаке открытый сверху пьезометр, то вода в нем поднимется до горизонта e, т.-е. на высоту $h+H$.

В этой задаче даются: расход трубы Q; длины L' и L всасывающей и нагнетательной труб; высоты h и h'. Диаметры этих труб D и D' неизвестны наперед и подлежат определению. Определение диаметра D производится или приблизительно по скорости движения воды в трубе (от 1,75 ф. до 2,25 ф.) или точнее по особому так называемому *экономическому* способу, основанному на условии *наименьшей* стоимости: *а)* нагнетательной трубы; *б)* паровых насосов с котлами и со всеми к ним принадлежностями; и *в)* издержек эксплоатации насосов, т.-е. топлива и смазки. Решения этой задачи мы не приводим, а заметим только, что диаметр нагнетательной трубы D не зависит ни от длины трубы L ни от высоты под'ема воды h, а зависит только от расхода Q и от цен: на трубы, машины, топливо. Определив D, берут диаметр всасывающей D' несколько больше по сортаменту. Здесь мы предположим D и D' известными и решим следующие *две* задачи.

а) Определим потери напора H и H' в нагнетательной и во всасывающей трубах по данному расходу Q, диаметрам D и D' и по длинам труб L и L'. Эта задача решается или приблизительно по формуле *Дюпюи* (210) или точнее — по форм. *Фламана* (211), принимая в последней коэфф. шероховатости для старых асфальтированных труб.

б) По найденным значениям H и H' и по заданным прочим величинам определим силу N насосов в паровых лошадях. Действительная высота под'ема равна $h+h'+H+H'$; вес воды соответствующий расходу Q равен ΔQ, а потому работа T в пудофутах или килограммометрах равна

$$T=\Delta Q(h+h'+H+H')$$

Разделим T на 15 пудофутов или на 75 килограммометров, получим туже работу в паровых лошадях N'. Действительная (индикаторная) сила машины N будет больше, так как паровая машина должна преодолеть все сопротивления в самой машине и в насосах; поэтому

$$N'=\frac{T}{15} \text{ и } N=\frac{N'}{\lambda_1}$$

где λ_1 — коэфф. полезного действия паровых насосов; для насосов большой силы (300 паров. лошадей и более) $\lambda_1=0{,}80-0{,}85$; для насосов средней силы (100 — 300 пар. лош.) $\lambda_1=0{,}77-0{,}80$; и для насосов малой силы (50 — 100 пар. лош.) $\lambda_1=0{,}75-0{,}77$

Итак получаем:

$$N=\frac{1}{15\lambda_1}\Delta Q(h+h'+H+H').$$

Вся высота под'ема может быть весьма значительной и доходит до 400 фут. или 12 атмосфер. Величина потери напора h' во всасываю-

щей трубе при ее малой длине и при малой скорости получается очень незначительной.

§ 48. Водопровод с переменным диаметром и с постоянным расходом. (Общий случай простого водопровода.) Покажем расчет водопровода следующего устройства; он состоит из труб I, II и III, имеющих диаметры D_1; D_2; D_3; (черт. 163); на трубе II поставлена диафрагма (кран или вентиль) с отверстием O; на трубе III имеется закругление и колено, а в выходном конце трубы поставлена диафрагма (кран или вентиль) с отверстием O_1.

Определение скоростей и расхода. Расход водопровода Q постоянный по всей длине его; скорости в трубах равны V_1; V_2 и V_3. Равенство расходов следующее:

$$Q = \omega_1 \; V_1 = \omega_2 \; V_2 = \omega_3 \; V_3 = \alpha O_1 V_p$$

где V_p — скорость в сжатом сечении выходного отверстия, равном αO_1 (α — коэфф. сжатия струи). Отсюда выводим:

$$V_1 = \frac{Q}{\omega_1} = \frac{\alpha O_1}{\omega_1} V_p; \; V_2 = \frac{\alpha O_1}{\omega_2} V_p; \; V_3 = \frac{\alpha O_1}{\omega_3} V_p$$

Струя при входе в трубу сжимается, образуется сжатое сечение a; затем струя на протяжении ab быстро расширяется и получается то же явление, как и в простом водопроводе. При переходе из трубы I в трубу II струя быстро расширяется на длине cd. При проходе через диафрагму на трубе II струя, выйдя из отверстия, сжимается в e и затем на длине ef быстро расширяется. Далее при переходе из трубы II в III струя сперва сжимается в g, а затем быстро расширяется на длине gh. Наконец в закруглении и в колене струя сжимается в i и в l и затем быстро расширяется на длине ik и lm. Выйдя из отверстия, струя сжимается и в M получается сжатое сечение. Во всех поименованных местах проявляются местные сопротивления, определяемые по теореме Борда, так как быстрое расширение струи происходит в этих местах при наличии полости с почти покоющеюся жидкостью. Для определения скоростей и расхода рассматриваем линию тока $M_0 ab \cdots iklM$ и пишем для нее ур. Д. Бернулли:

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g} + \left(h'' - h_0''\right)_{M_0 M} = \left(z_0 + \frac{p_0}{\Delta}\right) - \left(z + \frac{p_0}{\Delta}\right) = z_0 - z = H \ldots (219).$$

Гидравлические сопротивления здесь, как и в других рассмотренных случаях, состоят из местных и общих сопротивлений; их можно выразить через высоту скорости $\frac{V_p^2}{2g}$ или через расход Q.

Местные сопротивления уже перечислены выше и, применяя теорему Борда, можем выразить следующим образом:

a) при входе в трубу I на длине ab:

$$h_1=\left(\frac{1}{\mu^2}-1\right)\frac{V_1^2}{2g}=\left(\frac{1}{\mu^2}-1\right)\left(\frac{\alpha O_1}{\omega_1}\right)^2\frac{V_p^2}{2g}=\left(\frac{1}{\mu^2}-1\right)\frac{Q^2}{2g\omega_1^2}$$

b) при переходе из узкой трубы I в широкую II на длине cd:

$$h_2=\frac{(V_1-V_2)^2}{2g}=\left(\frac{1}{\omega_1}-\frac{1}{\omega_2}\right)^2(\alpha O_1)^2\frac{V_p^2}{2g}=\left(\frac{1}{\omega_1}-\frac{1}{\omega_2}\right)^2\frac{Q^2}{2g}$$

c) при проходе через диафрагму на трубе II на длине ef:

$$h_3=\frac{(V'_2-V_2)^2}{2g}=\left(\frac{1}{\alpha O}-\frac{1}{\omega_2}\right)^2(\alpha O_1)^2\frac{V_p^2}{2g}=\left(\frac{1}{\alpha O_1}-\frac{1}{\omega_2}\right)^2\frac{Q^2}{2g}$$

d) при переходе из широкой трубы II в узкую III на длине gh:

$$h_4=\frac{(V'_3-V_3)^2}{2g}=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2\left(\frac{\alpha O_1}{\omega_3}\right)^2\frac{V_p^2}{2g}=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2\frac{Q^2}{2g\omega_3^2}$$

e) при проходе через закругление на длине ik:

$$h_5=\zeta_1\frac{V_3^2}{2g}=\zeta_1\left(\frac{\alpha O_1}{\omega_3}\right)^2\frac{V_p^2}{2g}=\zeta_1\frac{Q^2}{2g\omega_3^2}$$

f) при проходе через колено на длине lm:

$$h_6=\zeta_2\frac{V_3^2}{2g}=\zeta_2\left(\frac{\alpha O_1}{\omega_3}\right)^2\frac{V_p^2}{2g}=\zeta_2\frac{Q^2}{2g\omega_3^2}$$

g) при проходе через диафрагму в конце III трубы, как при вытекании из сосуда через отверстие на воздух:

$$h_7=\zeta\frac{V_p^2}{2g}=\zeta\frac{Q^2}{2g(\alpha O_1)^2}$$

Общие сопротивления найдем по известным формулам, обозначив длины труб за вычетом мест занятых местными сопротивлениями через l_1; l_2 и l_3, и полагая, что γ может быть различным для различных труб:

$$h_{\rm I}=\frac{Q^2l_1}{\gamma_1D_1^5};\qquad h_{\rm 1}=\frac{Q^2l_2}{\gamma_2D_2^5};\qquad h_{\rm III}=\frac{Q^2l_3}{\gamma_3D_3^5}.$$

Сумма их равна:

$$h_{\rm I}+h_{\rm II}+h_{\rm III}=\frac{Q^2}{2g}\sum\frac{2gl_i}{\gamma_iD_i^5}=\frac{V_p^2}{2g}(\alpha O_1)^2\sum\frac{2gl_i}{\gamma_iD_i^5}.$$

Здесь значек i нужно принять равным 1; 2 и 3.

Найденные значения сопротивлений выразим через высоту $\frac{V_p^2}{2g}$ и вставим в уравн. (219); тогда получаем:

$$\frac{V_p^2}{2g}\left[1+\zeta+\left(\alpha O_1\right)^2\left\{\left(\frac{1}{\mu^2}-1\right)\frac{1}{\omega_1^2}+\left(\frac{1}{\omega_1}-\frac{1}{\omega_2}\right)^2+\cdots+\sum\frac{2g\,l_i}{\gamma_i D_i^5}\right\}\right]=$$

$$=H+\frac{V_0^2}{2g}=h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (219a)$$

Обозначим выражение в больших скобках через $1+\zeta_0$, где

$$\zeta_0=\zeta+\left(\alpha O_1\right)^2\left\{\left(\frac{1}{\mu^2}-1\right)\frac{1}{\omega_1^2}+\left(\frac{1}{\omega_1}-\frac{1}{\omega_2}\right)^2+\cdots+\sum\frac{2g\,l_i}{\gamma_i D_i^5}\right\} \; . \; . \; . \; (22$$

Величина ζ_0 называется *коэфф. сопротивления* данного водопрово[да]. Тогда из выражения (219 a) выводим:

$$\frac{V_p^2}{2g}(1+\zeta_0)=h; \quad \text{отсюда} \quad V_p=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta_0}}\sqrt{2gh}=\varphi_0\sqrt{2gh} \; . \; . \; . \; (221).$$

Так же, как и во всех предидущих случаях, выведем, что

$$\frac{1}{\sqrt{1+\zeta_0}}=\varphi_0 \quad \text{и, следов.,} \quad \zeta_0=\frac{1}{\varphi_0^2}-1 \; . \; . \; . \; . \; . \; (221\,a),$$

где φ_0 — *коэфф. скорости* водопровода.

Для расхода Q получается такое простое выражение:

$$Q=\alpha O_1 V_p=\alpha O\;\varphi_0\sqrt{2gh}=\mu_0 O_1\sqrt{2gh} \; . \; . \; . \; . \; . \; (221\,b);$$

здесь $\mu=\alpha\varphi_0$ называется *коэфф. расхода* водопровода.

В выражениях для скорости и расхода величину $\frac{V_0^2}{2g}$ можем исключить на основании равенства:

$$Q=\Omega_0 V_0=\alpha O_1 V_p; \quad \text{откуда:} \quad \frac{V_0^2}{2g}=\left(\frac{\alpha O_1}{\Omega_0}\right)^2\frac{V_p^2}{2g}.$$

Подставим это значение в формулу (221); тогда имеем:

$$V_p=\varphi_0\sqrt{2g\left[H+\left(\frac{\alpha O_1}{\Omega_0}\right)^2\frac{V_p^2}{2g}\right]}; \; \text{отсюда} \; V_p=\varphi_0\sqrt{\frac{2gH}{1-\left(\frac{\mu_0 O_1}{\Omega_0}\right)^2}} \ldots (221c)$$

Затем получаем прямо:

$$Q=\alpha O_1 V_p=\mu_0 O_1\sqrt{\frac{2gH}{1-\left(\frac{\mu_0 O_1}{\Omega_0}\right)^2}} \; . \; . \; . \; . \; . \; (221\,d).$$

Найденные выражения для V_p и Q тожественны с теми, которые были выведены для отверстий и насадок. Отсюда видно, что законы

движения жидкости по трубам по существу тожественны с законами вытекания жидкости через отверстия и насадки; различие будет количественное. Действительно, коэфф. μ для отверстий заключается между 0,59 и 0,67, а для насадок между 0,25 и 0,95; для труб он изменяется в более широких пределах, именно от 0 до 0,8. Первая величина получается тогда, когда длина водопровода чрезвычайно велика; тогда $\zeta_0 = \infty$ и $\varphi_0 = 0$; следовательно, $\mu_0 = 0$. Вторая величина относится к случаю, когда, наоборот, длина водопровода очень мала и когда водопровод обращается в цилиндрическую насадку длиною $4D$.

Найденным выражением для V_p будем пользоваться при рассмотрении этого водопровода в случае, когда вытекание происходит при переменном горизонте. Для решения относящихся сюда задач удобнее пользоваться, так же как и в других рассмотренных случаях, следующим выражением, которое получим из уравн. (219), заменяя

$$\frac{V_p^3}{2g} \text{ через } \frac{Q^2}{2g(\alpha O_1)^2} \text{ и } \frac{V_0^2}{2g} = \frac{Q^2}{2g\Omega_0{}^2} \text{ чероз } \left(\frac{\alpha O_1}{\Omega_0}\right)^2 \frac{Q^2}{2g(\alpha O_1)^2}.$$

Тогда получается такое равенство:

$$\frac{Q^2}{2g(\alpha O_1)^2}\left[1 - \left(\frac{\alpha O_1}{\Omega_0}\right)^2 + \zeta + (\alpha O_1)^2 \left\{\left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\frac{1}{\omega_1{}^2} + \ldots\ldots + \sum \frac{2gl_i}{\gamma_i D_i{}^5}\right\}\right] =$$
$$= H \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (222).$$

Подобно предидущим случаям, здесь приходится решать *три* следующие задачи: *a*) определить расход Q; *b*) определить напор H; и *c*) определить диаметр *одной* какой-либо трубы. Решение первых двух задач производится по уравн. (222) довольно просто, если задаться выражением для основного коэфф. b_1: или 1) постоянным (напр. по формуле Дюпюи); или 2) зависящими только от R, т.-е. от D (напр. форм. Базена)— при определении Q; или 3) зависящим от R и V (напр., форм. Фламана) — при определении H. Решение третьей задачи несколько сложнее, так как D входит в уравнение (222) в высоких степенях, а иногда в дробных, в зависимости от выражения, выбранного для основного коэфф. b_1.

Во многих случаях практики можно решать эти задачи при значительных упрощениях в уравн. (222), если в нем пренебрегать членами, величина которых мала сравнительно с остающимися членами.

1) Прежде всего можно пренебречь высотою начальной скорости, т.-е. членом в больших скобках, равном:

$$\left(\frac{\alpha O_1}{\Omega_0}\right)^2.$$

2) Затем можно пренебречь местными сопротивлениями в закруглении и колене, т.-е. членами ζ_1 и ζ_2.

3) Далее можно пренебречь сопротивлением при вытекании через последнюю диафрагму, т.-е. членом ζ.

4) Наконец, можно пренебрегать и другими местными сопротивлениями, в зависимости от размеров и устройства заданного водопровода.

Определение давления. Определим давление p' в какой-либо точке M' на трубе II. Для этого берем линию тока M_0M'; для нее имеем следующее уравнение:

$$\frac{V_2^2 - V_0^2}{2g} + (h'' - h_0'') = \left(z_0 + \frac{p_0}{\Delta}\right) - \left(z + \frac{p'}{\Delta}\right) = y + \frac{p_0 - p'}{\Delta}.$$

Отсюда находим высоту свободного давления или *свободный напор*, т.-е. высоту давления за вычетом атмосферного давления:

$$\frac{p' - p_0}{2g} = y + \frac{V_0^2}{2g} - \left[\frac{V_2^2}{2g} + (h'' - h_0'')\right].$$

Здесь гидравлические сопротивления на пути M_0M' равны:

$$(h'' - h_0'') = h_1 + h_2 + h_3 + h_1 + \frac{Q^2 l}{\gamma D_2^5},$$

где $l = de + fM'$. Покажем теперь построение линий скоростей и давлений. От горизонта воды в резервуаре A вертикально вверх откладываем высоту $\frac{V_0^2}{2g}$ и проводим горизонтальную плоскость NN, которая представляет плоскость напора. Для точки M' нужно затем отложить вертикально вниз

$$mn = \frac{V_2^2}{2g} \quad \text{и} \quad nq = (h'' - h_0'');$$

тогда отрезок

$$M'q = \frac{p' - p_0}{\Delta}.$$

Подобным образом найдем все точки линии скоростей и линии давлений. Линия скоростей состоит из 6 горизонтальных прямых, именно: 1, 2, 3, 4, 5 и 6, сопряженных некоторыми кривыми в местах, соответствующих местным сопротивлениям, и из одной (7) наклонной прямой $m'n'$. Эта наклонная линия соответствует струе на протяжении от отверстия в диафрагме до сжатого сечения.

Линия давлений состоит из 7 прямых: 1', 2', 3', 4', 5', 6' и 7', наклонных к горизонту и сопряженных кривыми, соответствующими местным сопротивлениям. Если обозначить через α угол, составляемый

с горизонтом какою-либо из этих прямых, и через β угол, составляемый с горизонтом продольною осью трубы, то, как известно, существует такое равенство:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\beta = i = \frac{Q^2}{\gamma D^5}.$$

Следовательно, чем меньше диаметр трубы, тем больше уклон прямой.

§ 49. Неравномерное движение в трубах.

Неравномерное движение в трубах существует тогда, когда изменяются непрерывно или диаметр трубы, или расход, или одновременно диаметр и расход. Во всех этих случаях скорость изменяется непрерывно от одного поперечного сечения к другому. Рассмотрим случай *переменного расхода* при постоянном диаметре трубы; такой случай постоянно встречается при расчете труб городских водопроводов. Здесь от уличных водопроводных труб идут отростки в дома; в виду большого числа отростков и с целью упрощения расчетов принимается, что расход в таких уличных трубах уменьшается равномерно по их длине и в сторону течения воды. В случае сбора грунтовой воды горизонтальными трубами (чугунными или бетонными) вода из грунта поступает через узкие прямоугольные щели или через круглые отверстия, сделанные в стенках этих труб. Расход такой водосборной трубы увеличивается равномерно в сторону течения воды.

1) **Вывод уравнения неравномерного движения в трубах.** Рассмотрим трубу $C_0C = L$ между сечениями mn и $m'n'$ (черт. 164); пусть скорость, ордината и ед. давление в точках C_0 и C будут V_0, z_0, p_0 и V_1, z_1, p_1. Для линии тока C_0C имеем уравнение Д. Бернулли:

$$\frac{V_1^2 - V_0^2}{2g} + (h'' - h_0'') = \left(z_0 + \frac{p_0}{\triangle}\right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\triangle}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a).$$

Ближайшая задача наша заключается в определении гидравлических сопротивлений, представленных членом $(h' - h_0'')$. Согласно изложенному в § 15, этот член равен:

$$(h'' - h_0'') = -\frac{1}{g}\int\limits_{s_0}^{s} \varphi\, ds \cos(\varphi, ds) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (223)$$

и представляет высоту гидравлических сопротивлений на ед. веса жидкости при перемещении равном C_0C. Здесь φ — сила трения на ед. массы частицы; ds — элементарное перемещение этой частицы; $\cos(\varphi, ds)$ — косинус угла между направлением силы φ и перемеще-

нием частицы. Так как этот угол тупой, то *Cos* отрицательный. Пределы s_0 и s суть расстояния AC_0 и AC точек C_0 и C от произвольно выбранной точки A на той же линии тока. Определим силу трения φ. С этою целью проведем два сечения ab и $a'b'$ в расстоянии ds друг от друга и рассмотрим бесконечно тонкий слой $aba'b'$ движущейся жидкости.

Скорости всех частиц этого слоя можно принять равными между собою и параллельными оси трубы. Тогда, как и в случае равномерного движения в трубах, трение будет проявляться лишь между стенкой трубы и боковою поверхностью рассматриваемого жидкого слоя. Если t — сила трения на ед. площади и $d\Omega$ — боковая поверхность слоя, то вся сила трения для слоя равна

$$t d\Omega = t \cdot \chi \cdot ds,$$

где χ — периметр поперечного сечения трубы. Масса жидкости в слое равна

$$\rho \cdot \omega \cdot ds = \frac{\Delta}{g} \omega \cdot ds;$$

здесь ρ и ω — плотность жидкости и площадь поперечного сечения трубы. Следовательно, сила трения φ на единицу массы равна:

$$\varphi = \frac{t.\chi.ds}{\frac{\Delta}{g}.\omega.ds} = g \cdot \frac{t}{\Delta} \cdot \frac{1}{R},$$

где

$$R = \frac{\omega}{\chi}$$

представляет гидравлический радиус, равной $\frac{1}{4}D$ для трубы круглого сечения, работающей под напором.

Затем величину перемещения ds полагаем равным толщине рассматриваемого слоя; направления силы трения t и перемещения частиц прямо противоположны и потому

$$\cos(\varphi' ds) = -1.$$

При рассмотрении равномерного движения воды в трубах было выведено на основании опытных данных О. Рейнольдса, что в трубах не капиллярных и при скоростях не очень малых движение происходит по гидравлическому закону, который выражается так:

$$\frac{t}{\Delta} = Ri = b_1 V^2,$$

т.-е. ед. сила трения t пропорциональна квадрату скорости V.

Сделаем частную гипотезу, что этот закон справедлив также и для неравномерного движения. Тогда уравнение (223) принимает такой вид:

$$(h'' - h_0'') = \int_{s_0}^{s} \frac{t}{\Delta} \frac{1}{R} ds = \int_{s_0}^{s} \frac{b_1 V^2}{R} ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (223\,a).$$

Это выражение применяется также и при неравномерном движении в реках и каналах, т.-е. в потоках без напора. Если q — расход трубы в каком-либо сечении ab, то

$$V = \frac{q}{\omega} = \frac{4q}{\pi D^2}.$$

Также имеем для круглого сечения трубы $R = \frac{1}{4} D$; далее известно, что

$$b_1 = \frac{\pi^2}{64} \frac{1}{\gamma}.$$

Следовательно, можно выражение (223 a) переписать еще так:

$$(h'' - h_0'') = \int_{s_0}^{s} \frac{q^2 ds}{\gamma D^5} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (223\,b).$$

Итак, уравнение Д. Бернулли (a) для линии C_0C можно написать в следующем виде:

$$\frac{V_1^2 - V_0^2}{2g} + \int_{s_0}^{s} \frac{q^2 ds}{\gamma D^5} = \left(z_0 + \frac{p_0}{\Delta}\right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\Delta}\right) = \text{напор} \ldots (224).$$

Это выражение представляет уравнение неравномерного движения в трубах. Оно показывает, что при неравномерном движении напор тратится на гидравлические сопротивления и на изменение скорости V_0 в V_1; при равномерном движении напор расходуется только на гидравлические сопротивления.

2) Предыдущее уравнение выведено в предположении, что расход q изменяется между сечениями mn и $m'n'$ по некоторому закону.

Рассмотрим простейший закон такого изменения, а именно, когда q изменяется *линейным образом*. Пусть расходы в сечениях mn и $m'n'$ равны $Q + P$ и Q; здесь Q — представляет *постоянный* расход по всей длине трубы, а P — равномерный расход по пути $C_0C = L$, убывающий от C_0 к C. Величина

$$p = \frac{P}{L}$$

есть расход по пути на ед. длины. Найдем расход q для какого-либо сечения ab в расстоянии $C_0C' = \xi$ от сечения mn; очевидно

$$q = (Q + P) - \frac{P}{L}\xi = Q + \frac{P(L - \xi)}{L} = f(\xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b).$$

Дифференцируя q по ξ, находим:

$$dq = -\frac{P}{L}d\xi \qquad \text{или} \qquad d\xi = ds = -\frac{L}{P}dq.$$

Подставим в уравн. (b) вместо ds найденное значение; так как интегрирование теперь будет производиться по q, то пределы s_0 и s_1, соответствующие сечениям mn и $m'n'$, нужно заменить расходами $Q+P$ и Q. Таким образом из (223 b) получаем, полагая γ = постоян.:

$$(h''-h_0'') = \int_{s_0}^{s} \frac{q^2 ds}{\gamma D^5} = -\frac{L}{\gamma P D^5}\int_{Q+P}^{Q} q^2 dq = \frac{L}{3\gamma P D^5}\left[(Q+P)^3 - Q^3\right] \ldots (225).$$

Это будет искомое выражение для потери напора в трубе длиною L с переменным расходом при постоянном диаметре трубы. Если требуется определить потерю напора не для всей трубы длиною L, а только для части ее между mn и ab для длины ξ, то называя $AC' = s'$ и имея в виду, что расход в сечении ab равен

$$q = Q + \frac{P}{L}(L-\xi),$$

получим:

$$(h''-h_0'') = \int_{s_0}^{s'} \frac{q^2 ds}{\gamma D^5} = -\frac{L}{\gamma P D^5}\int_{Q+P}^{q} q^2 dq = \frac{L}{3\gamma P D^5}\left[(Q+P)^3 - \left(Q+\frac{P}{L}(L-\xi)\right)^3\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots (225\,a).$$

При $\xi = L$ это равенство обращается в (225). Для исследования уравнения (225) удобнее придать ему следующий вид. Имеем тожество:

$$(Q+P)^3 - Q^3 = P(3Q^2 + 3QP + P^2) = P[(Q+P)^2 + Q(Q+P) + Q^2]$$
$$= P(Q+P)^2\left[1 + \frac{Q}{Q+P} + \left(\frac{Q}{Q+P}\right)^2\right] = P(Q+P)^2(1+\beta+\beta^2),$$

где для краткости положено:

$$\beta = \frac{Q}{Q+P}.$$

В таком случае уравнение (225) можно переписать так:

$$(h''-h_0'') = \frac{(Q+P)L}{3\gamma D^5}(1+\beta+\beta^2) \ldots\ldots (225\,b).$$

Это выражение дал *Грасхоф*; исследуем его. Положим, что расход в трубе постоянный; тогда $P = 0$ и $\beta = 1$; в этом случае последняя формула дает известное уже выражение для гидравлических сопротивлений в трубе длиною L и диаметром D при расходе Q:

$$(h''-h_0'') = \frac{Q^2 L}{\gamma D^5}.$$

Если существует только расход по пути, то $Q=0$ и $\beta=\theta$; следовательно,

$$(h''-h_0'')=\frac{P^2L}{3\gamma D^5}.$$

Если бы тот же расход P был постоянным по всей длине трубы, то потеря напора в этом случае была бы равна:

$$(h''-h_0'')=\frac{P^2L}{\gamma D^5}.$$

Итак, если существует только равномерный расход по пути равный P в начале трубы и равный нулю в конце трубы, то потеря напора получается в *три раза менее* сравнительно с тем случаем, когда тот же расход P будет постоянным по всей длине трубы. Уравн. (225) можно придать еще такой вид:

$$(h''-h_0'')=\frac{Q^2L}{\gamma D^5}+\frac{P^2L}{3\gamma D^5}+\frac{(\sqrt{PQ})^2L}{\gamma D^5} \quad \ldots\ldots (225\,c).$$

Это выражение показывает, что при существовании в трубе постоянного расхода Q и расхода по пути P потеря напора равна сумме трех потерь соответствующих: постоянному расходу Q, равномерному расходу по пути P и воображаемому постоянному расходу $\sqrt{PQ}$, равному средней геометрической величине из расходов P и Q.

3) **Правило Дюпюи.** Предложим себе задачу отыскать такой постоянный расход T, при котором получается в конечном сечении $m'n'$ потеря напора, равная той, которая получается при совместном существовании расходов Q и P. Так как при расходе T потеря напора равна:

$\frac{T^2L}{\gamma D^5}$, то величину T найдем из равенства:

$$(h''-h_0'')=\frac{L}{3\gamma PD^5}\left[(Q+P)^3-Q^3\right]=\frac{T^2L}{\gamma D^5}.$$

Отсюда находим:

$$T^2=Q^2+PQ+{}^1/_3P^2.$$

Определяемое этим равенством количество T можно представить двояким образом:

$$T=\sqrt{\left(Q+\sqrt{\frac{1}{3}}P\right)^2-\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}PQ},$$

или

$$T=\sqrt{\left(Q+\frac{1}{2}P\right)^2+\frac{1}{12}P^2}.$$

Отсюда видно, что величина T заключается в следующих пределах

$$T > Q + 0{,}5P \quad \text{и} \quad T < Q + \sqrt{\tfrac{1}{3}}P = Q + 0{,}577\,P.$$

Следовательно, с достаточною в приложениях точностью можно принять

$$T = Q + 0{,}55\,P \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (226).$$

В этом равенстве заключается правило *Дюпюи* для замены переменного расхода постоянным расходом T. Это равенство постоянно применяется при расчете городских водопроводов. Оно показывает, что расход T очень мало отличается от среднего расхода, равного $Q + 0{,}5P$ для начального и конечного сечений трубы.

Необходимо заметить, что воображаемый расход T дает потерю напора одинаковую с Q и P только в конце трубы; для промежуточных же сечений это равенство потерь напоров не существует и потеря напора при Q и P, равная df, больше, чем потеря de при T. Это следует из того, что при T линия давлений — прямая ab, а при Q и P линия давлений—кривая acb, лежащая ниже этой прямой (черт. 164 a).

§ 50. Экономический расчет трубы, подводящей воду к тюрбине. Этот случай может представиться в городских водоснабжениях тогда, когда для накачивания воды в город применяются насосы не с паровыми машинами, а насосы, приводимые в действие водяными тюрбинами; он представляется также еще при устройстве силовых гидравлических станций; на этих станциях водяные тюрбины приводят в действие генераторы постоянного или переменного тока. В том и другом случае тюрбины работают под напором воды, приводимой трубой (металлической или железобетонной) из какого-либо вышерасположенного водоема: озера или чаще всего из реки. Для поднятия горизонта воды в реке, на сей последней часто устраивается водопод'емная плотина (глухая водосливная или разборчатая). Для подведения из реки напорной воды к тюрбинам на берегу выше плотины A_0 (черт. 165) устраивается водоприемный колодец A, из которого вода по трубе AB идет к тюрбинам. Вода движется в трубе AB под напором, который получается вследствие того, что вода в реке поднята плотиной на высоту ξ, а также вследствие того, что река на протяжении изгиба $abc = l$ имеет уклон i_0, почему и получается разность горизонтов реки в a и c, т.-е. падение реки, равное $h_0 = i_0 l$. Полученный таким образом напор $(\xi + h_0)$ расходуется следующим образом (черт. 166): 1) на гидравлические сопротивления в трубе AB; высота их равна H; 2) на рабочий

напор в тюрбине, равный H_1; 3) на падение H_2 в канале CD, отводящем отработавшую воду из-под тюрбин в реку, и 4) на напор H_3, необходимый для притекания воды из реки в водоприемный колодец. Итак,

$$\xi + h_0 = H + H_1 + H_2 + H_3.$$

Силу тюрбин N паров. лошадей предполагаем известной.

Напор H_1, под которым работает тюрбина, равен:

$$H_1 = (\xi + h_0) - (H + H_2 + H_3) = (\xi + h_0 - H_2 - H_3) - H = H_0 - H,$$

где сделано обозначение:

$$H_0 = (\xi + h_0) - (H_2 + H_3).$$

В отличие от напора H_1 величину H_0 будем называть располагаемым напором.

Пусть Q — расход трубы AB; λ — коэфф. полезного действия тюрбины; тогда получаем такое равенство (при мерах в пудах и футах):

$$N = \frac{\lambda . \triangle Q (H_0 - H)}{15}.$$

Если диаметр трубы и длина ее равны D и L, то потеря напора в трубе равна, если пренебречь всеми местными сопротивлениями:

$$H = \frac{Q^2 L}{\gamma D^5}.$$

Тогда предидущее равенство можно переписать в таком виде:

$$N = \frac{\lambda \triangle Q}{15}\left(H_0 - \frac{Q^2 L}{\gamma D^5}\right) = f(Q, D) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (227).$$

Это уравнение заключает величины Q и D, а так как ни расход, ни диаметр неизвестны, а для определения их мы имеем только одно это уравнение, то задача об определении диаметра и расхода получается неопределенной. Можно задаться каким-либо значением D и затем определить Q из уравн. (227). Эта неопределенность исчезнет, если введем требование, чтобы стоимость трубы R была наименьшей. Стоимость металлической трубы диаметром D и длиною L с доставкою и укладкою, включая земляные работы при обыкновенных условиях, определяется следующим образом. Пусть ρ обозначает стоимость трубы длиною 1 ф.; если по оси абсцисс откладывать D, а по оси ординат — соответственные ρ, то получим кривую ad (черт. 167), уравнение которой можно представить трехчленом 2-й степени такого вида:

$$\rho = a + bD + cD^2.$$

Здесь член a представляет стоимость работ, независящих от диаметра трубы, т.-е. стоимость преимущественно земляных работ; по-

стоянные коэффициенты b и c зависят от цен на чугун или железо, от дальности и трудности доставки труб, от цен на рабочие руки и т. п.; они определяются по данным инженерной практики. Для первого приближения можно заменить эту кривую ломаной линией ab, bc... В таком случае стоимость ρ выразится двучленом такого вида:

$$\rho = a + bD,$$

где коэфф. a и b имеют различную величину, смотря по тому, к какой из означенных прямых они относятся; в этом случае коэфф. a не имеет более прежнего значения. Таким образом стоимость R трубы для первого приближения можно выразить так:

$$R = \rho L = (a + bD)L = f_1(D).$$

Теперь наша задача получает такую формулировку: определить диаметр трубы D по условию, чтобы ее стоимость R была наименьшей. и чтобы при этом было удовлетворено уравн. (227).

Определение *minimum*'а какой-либо величины при выполнении условия, выраженного данным уравнением, называется в анализе определением *относительного minimum*'а этой величины. Итак, нужно найти, при каком D будет иметь место относительный minimum стоимости R. В анализе задача об определении относительного minimum'а R приводится к задаче абсолютного minimum'а, но не величины R, а новой функции, составленной из R и из заданного условного уравнения. В нашем случае эта новая функция имеет такой вид:

$$R + \mu f(Q,\ D) = F(Q,\ D) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (a),$$

где μ — постоянный коэффициент, который будет определен впоследствии. Для определения абсолютного minimum'а F нужно приравнять нулю ее производные; тогда получим:

$$\frac{\partial F}{\partial Q} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial D} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b).$$

Теперь мы имеем для решения нашей задачи три уравнения: два уравнения (b) и одно уравн. (227), из которых найдем D, Q и μ. Для первого приближения, достаточного во всех практических приложениях, можно коэфф. γ считать постоянным; тогда, дифференцируя уравн. (a) сперва по D, а затем по Q, получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial D} = \frac{\partial R}{\partial D} + \mu \frac{\partial f}{\partial D} = bL - \mu\lambda \cdot \frac{5\triangle Q^3 L}{\gamma D^6} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{\mu\lambda\triangle}{15}\left(H_0 - \frac{3Q^2 L}{\gamma D^5}\right) = 0.$$

Отсюда находим:

$$\mu = \frac{b\gamma D^6}{5\Delta\lambda Q^3}, \qquad H_0 = \frac{3Q^2L}{\gamma D^5} \quad \ldots \ldots \ldots (c).$$

Так как потеря напора в рассматриваемой трубе равна

$$H = \frac{Q^2L}{\gamma D^5},$$

то следовательно,

$$H = \frac{1}{3} H_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (d).$$

Итак, наименьшая стоимость R трубы получится тогда, когда диаметр ее определим по условию, чтобы потеря напора в ней была равна одной трети всего располагаемого напора H_0, равного:

$$H_0 = (h_0 + \xi) - (H_2 + H_3).$$

Тогда рабочий напор H_1, под которым работает тюрбина, равен:

$$H_1 = {}^2/_3 H_0.$$

Теперь уравн. (227) перепишем в таком виде:

$$N = \frac{\lambda\Delta Q}{15} \cdot \frac{2}{3} H_0; \quad \text{откуда} \quad Q = \frac{3.15N}{2\Delta\lambda H_0} \quad \ldots \ldots (e)$$

При помощи равенств (c и e) находим окончательно:

$$D = \sqrt[5]{\frac{3Q^2L}{\gamma H_0}} = \sqrt[5]{\left(\frac{45N}{2\Delta\lambda}\right)^2 \frac{3L}{\gamma H_0^3}} \quad \ldots \ldots (f)$$

Отсюда видно, что D зависит от длины L, но не зависит от коэф b, т.-е. не зависит от цен на металл, доставку и т. п. в противоположность случаю нагнетательной трубы в водопроводах, диаметр которой не зависит от L, но зависит от коэфф. b. Уравнения (e и f) решают поставленную задачу; они дают значения Q и D по заданной силе тюрбины N и по заданному располагаемому напору H_0.

Численный пример. Определить диаметр D и расход Q для железной клепанной трубы длиною $L = 5000$ ф., доставляющей напорную воду для тюрбины силою 200 паров. лошадей с коэфф. полезного действия $\lambda = 0{,}75$. Вода берется из реки, горизонт которой подперт каменной глухой водосливной плотиной на высоту $\xi = 15$ ф.; уклон реки $i_0 = 0{,}0005$; расстояние плотины до машинного здания $l = 15000$ ф. Падение канала, отводящего воду в реку из-под тюрбины $H_2 = 0{,}5$ ф. Напор необходимый для притока воды из реки в водоприемник $H_3 = 1$ ф.

По этим данным делаем следующие вычисления.

Падение реки $h_0 = li_0 = 15000 \cdot 0{,}0005 = 7{,}5$ ф.

Располагаемый напор

$$H_0 = (h_0 + \xi) - (H_2 + H_3) = (7{,}5 + 15) - (0{,}5 + 1) = 21 \text{ ф.}$$

Потеря напора в трубе $H = {}^1/_3 H_0 = 7$ ф.

Рабочий напор тюрбины $H_1 = {}^2/_3 H_0 = 14$ ф.

Расход трубы

$$Q = \frac{45N}{2\Delta H_0} = \frac{45.200}{2.1{,}73.0{,}75.21} = 165{,}15 \text{ куб. ф.}$$

Диаметр трубы

$$D = \sqrt[5]{\frac{3Q^2L}{\gamma H_0}} = \sqrt[5]{\frac{3.(165{,}15)^2.5000.0{,}000762}{7}} = 6{,}83 \text{ ф.}$$

За округлением принимаем $D = 7$ ф.

Экономическая скорость V в трубе при $D = 6{,}83$ ф. равна

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = 4{,}51 \text{ ф.}$$

§. 51. Экономический расчет труб, подводящих воду из нескольких бассейнов в сборный резервуар. Положим, что из бассейнов или ключевых колодцев A, B, C (черт. 168) вода проводится чугунными трубами $acdb$, ec и fd в сборный резервуар D. Расстояния горизонтов воды в бассейнах B и C и в резервуаре D до горизонта воды в самом высоком бассейне A обозначим H_0, H_1, H_2. Диаметры, длины и расходы труб обозначим: D_1, L_1, Q_1; D_2, L_2, Q_2 и т. д. По известным расходам из бассейнов Q_1, Q_4, Q_5 требуется определить диаметры всех 5-ти труб, считая, что длина труб а также все вертикальные расстояния H известны.

Очевидно, что расход в трубе cd равен $Q_2 = Q_1 + Q_4$; расход в трубе db равен $Q_3 = Q_2 + Q_5$. Если в точках c и d пересечения труб вообразить пьезометры, как показано на чертеже, то расстояния горизонтов воды в них до горизонта в бассейне A будут равны y_1 и y_2. Гидравлическое сопротивление в трубе ac можно принять приближенно равным y_1; тогда

$$y_1 = \frac{Q_1^2 L_1}{\gamma D_1^5}.$$

Также можно считать, что $y_1 - H_1$ представляет гидравлическое сопротивление в трубе ec; следовательно,

$$y_1 - H_1 = \frac{Q_4^2 L_4}{\gamma D_4^5};$$

из этих уравнений получаем:

$$\frac{Q_1^2 L_1}{\gamma D_1^5} - \frac{Q_4^2 L_4}{\gamma D_4^5} = H_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Сумму гидравлических сопротивлений в трубах *ac* и *cd* можно принять равной y_2; следовательно,

$$y_2 = \frac{Q_1^2 L_1}{\gamma D_1^5} + \frac{Q_2^2 L_2}{\gamma D_2^5}; \quad \text{также} \quad y_2 - H_2 = \frac{Q_5^2 L_5}{\gamma D_5^5}.$$

Из этих 2-х уравнений получается:

$$\frac{Q_1^2 L_1}{\gamma D_1^5} + \frac{Q_2^2 L_2}{\gamma D_2^5} - \frac{Q_5^2 L_5}{\gamma D_5^5} = H_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b).$$

Наконец сумма гидравлических сопротивлений в трубах *ac*, *cd* и *db* равна

$$\frac{Q_1^2 L_1}{\gamma D_1^5} + \frac{Q_2^2 L_2}{\gamma D_2^5} + \frac{Q_3^2 L_3}{\gamma D_3^5} = H_0 = F(D_1,\ D_2,\ D_3) \quad \ldots\ldots \quad (c).$$

Таким образом мы получили *три* уравнения (*a*, *b*, *c*) с *пятью* неизвестными диаметрами; следовательно, задача получается неопределенной и диаметры двух каких-либо труб можно выбрать по произволу. Отсюда видно, что общая стоимость всех труб будет различна в зависимости от назначенных нами величин для этих диаметров. Эта неопределенность исчезнет, если расчёт диаметров будет сделан на экономических основаниях. Именно определим диаметры труб по условию, чтобы их общая стоимость была наименьшей и чтобы при этом уравн. (*a*, *b*, *c*) были удовлетворены. Как уже было об'яснено в § 50, стоимость ρ трубы диаметром D и длиною 1 ф. можно представить приблизительно так:

$$\rho = a + bD + cD^2,$$

где коэфф. *a* представляет расходы, независящие от диаметра, напр., выемка земли в траншеях, засыпка и замощение; коэфф. *b* и *c* представляют стоимость собственно трубы диаметром 1 ф. и зависят от цен на чугун, от дальности перевозки, от стоимости укладки труб и т. п. Для первого приближения можно положить:

$$\rho = a + bD.$$

Тогда стоимость трубы длиною L выразится так:

$$R = \rho L = (a + bD)L.$$

Мы рассмотрим сперва линию труб *acdb*, имеющую диаметры D_1, D_2, D_3. Стоимость этой линии труб равна:

$$R=(a+bD_1)L_1+(a+bD_2)L_2+(a+bD_3)L_3=f(D_1,\ D_2,\ D_3).$$

Определим, при каких значениях диаметров величина R будет наименьшей при условии, что уравн. (c) будет удовлетворено.

Определение minimum'а какой-либо величины при выполнении условия, выраженного заданным уравнением, называется в анализе определением *относительного minimum*'а этой величины.

Следовательно, нужно найти, при каких D будет иметь место относительный minimum стоимости R. В анализе задача об определении относительного minimum'а R приводится к задаче об определении абсолютного minimum'а, но не величины R, а новой функции, составленной из R и из заданного условного уравнения. В нашем случае эта новая функция имеет такой вид:

$$R+\mu F(D_1,\ D_2,\ D_3)=\Phi(D_1,\ D_2,\ D_3),$$

где μ — постоянный множитель, который определится впоследствии.

Для определения абсолютного *maximum*'а функции Φ нужно приравнять нулю производные Φ по диаметрам; тогда получим три уравнения, а вместе с уравн. (c) — всего четыре уравнения, которые послужат для определения этих трех диаметров и множителя μ. Итак, полагая коэфф. γ постоянным, находим:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial D_1}=b-5\mu\frac{Q_1^2}{\gamma D_1^6}=0;\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial D_2}=b-5\mu\frac{Q_2^2}{\gamma D_2^6}=0;$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial D_3}=b-5\mu\frac{Q_3^2}{\gamma D_3^6}=0.$$

Отсюда находим:

$$D_1=\left(\frac{5\mu Q_1^2}{b\gamma}\right)^{1/6};\qquad D_2=\left(\frac{5\mu Q_2^2}{b\gamma}\right)^{1/6};\qquad D_3=\left(\frac{5\mu Q_3^2}{b\gamma}\right)^{1/6}.$$

Вставим эти значения в уравн. (c), тогда найдем:

$$\frac{Q_1^{1/3}L_1+Q_2^{1/3}L_2+Q_3^{1/3}L_3}{\gamma\left(\frac{5\lambda}{b\gamma}\right)^{5/6}}=H_0.$$

Отсюда получаем:

$$\left(\frac{5\lambda}{b\gamma}\right)^{5/6}=\frac{\sum Q^{1/3}L}{\gamma H_0}.$$

Вставим это выражение в формулы для диаметров; тогда получим окончательно:

$$D_1 = A\sqrt[3]{Q_1}, \qquad D_2 = A\sqrt[3]{Q_2}, \qquad D_3 = A\sqrt[3]{Q_3} \quad . \quad . \quad . \quad (d),$$

где обозначено:

$$A = \sqrt[5]{\frac{\sum Q^{2/3} L}{\gamma H_0}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Эти выражения показывают, что диаметры, определенные по наименьшей стоимости, пропорциональны корням кубическим из расходов. Коэфф. A есть величина вполне определенная, так как все Q и L заданы; H_0 — также известно. Коэфф. γ следует взять постоянным по форм. Дюпюи, Бирдмора, Фаннинга и др.

Здесь коэфф. b, входящий в выражение стоимости труб, в окончательных формулах для D отсутствует, в противоположность формуле для нагнетательной трубы водопровода. Полученные по формулам значения для D нужно округлить согласно сортаменту.

Теперь определим диаметр D_4 трубы ec, для чего воспользуемся уравн. (a), в котором D_1 будет уже известно. Диаметр D_5 трубы fd определится из ур. (b), в котором диаметры D_1 и D_2 уже известны. Полученные значения для D_4 и D_5 нужно также округлить согласно сортаменту. Вследствие округления диаметров уравн. (a, b, c) уже не будут удовлетворяться в точности. Могут быть случаи, когда y_1 получится меньше H_1; следовательно, горизонт воды в пьезометре c будет стоять выше горизонта в бассейне B. Очевидно, что в таком случае течение воды в трубе ec будет обратным предположенному нами; именно оно будет идти от c в бассейн B. Следовательно, при заданных H_1 и L_1 задача не может быть решена так, как изложено выше. Мы можем получить решение, увеличив длину L_1, перенеся точку встречи c ближе к d, или уменьшив H_1. То же самое нужно сказать и относительно пьезометра d; для возможности решения задачи необходимо, чтобы $y_2 > H_2$.

Если бассейны A, B, C находятся на одном горизонте, то всегда можно решить эту задачу так, как это изложено. Предположим, что диаметры труб, их длина, а также высоты H_0, H_1, H_2 известны и требуется по этим данным определить расходы из бассейнов Q_1, Q_4 и Q_5. Для определения этих трех величин имеем три уравн. (a, b, c); следовательно, решение этой задачи получается вполне определенным. Однако самое решение этих уравнений представляет значительные трудности и может быть достигнуто помощью последовательных подстановок.

Численный пример. Пусть дано: $Q_1=1{,}5$ к. ф., $Q_4=2$ к. ф., $Q_5=$ $=2{,}5$ к. ф. Тогда $Q_2=Q_1+Q_4=3{,}5$ к, ф.; $Q_3=Q_2+Q_5=6$ к. ф. Затем дано: $L_1=1500$ ф., $L_2=2000$ ф., $L_3=2500$ ф., $L_4=1000$ ф., $L_5=1200$ ф. Наконец, известны; $H^1=5$ ф., $H_2=15$ ф., $H_0=40$ ф.

Коэфф. γ берем по Дюпюи: $\frac{1}{\gamma}=0{,}000762$ (для футов).

Так как $\Sigma Q^{2/5}L=Q_1^{2/5}L_1+Q_2^{2/5}L_2+Q_3^{2/5}L_3=9289{,}5$, то

$$\text{коэфф. } A=\sqrt[5]{\frac{9289{,}5 . 0{,}000762}{40}}=0{,}707.$$

Тогда получаем:

$$D_1=0{,}707\sqrt[3]{1{,}5}=0{,}81 \text{ ф.} \backsim 0{,}833 \text{ ф.}=10 \text{ д.}$$
$$D_2=0{,}707\sqrt[3]{3{,}5}=1{,}07 \text{ ф.} \backsim 1 \text{ ф.}=12 \text{ д.}$$
$$D_3=0{,}707\sqrt[3]{6}=1{,}28 \text{ ф.} \backsim 1{,}333 \text{ ф.}=16 \text{ д.}$$

По округленным согласно сортаменту диаметрам определяем y_1 и y_2, именно получаем:

$$y_1=\frac{Q_1^2L_1}{\gamma D_1^5}=6{,}4 \text{ ф.}; \quad y_2=\frac{Q_1^2L_1}{\gamma D_1^5}+\frac{Q_2^2L_2}{\gamma D_2^5}=6{,}4+18{,}7=25{,}1 \text{ ф.}$$

Так как $y_1>H_1$ и $y_2>H_2$, то движение по трубам *ec* и *fd* будет происходить так, как предположено в задаче, т.-е. из бассейнов B и C в сборный резервуар D. Диаметры D_4 и D_5 получим из следующих равенств, которые представляют собою уравн. (*a* и *b*):

$$\frac{Q_4^2L_4}{\gamma D_4^5}=y_1-H_1; \text{ отсюда } D_4=\sqrt[5]{\frac{Q_4^2L_4}{\gamma(y_1-H_1)}}=1{,}17 \text{ ф.} \backsim 1{,}167 \text{ ф.}=14 \text{ д.}$$

$$\frac{Q_5^2L_5}{\gamma D_5^5}=y_2-H_2; \text{ отсюда } D_5=\sqrt[5]{\frac{Q_5^2L_5}{\gamma(y_2-H_2)}}=0{,}89 \text{ ф.} \backsim 0{,}81 \text{ ф.}=10 \text{ д.}$$

Потери напоров в трубах *ac*, *cd*, *db* равны: 6,4 ф., 18,7 ф., 16,3 ф. что в сумме равно 41,4 ф. вместо заданного $H_0=40$ ф., что произошло вследствие округления диаметров труб.

§ 52. Экономический расчет сети труб по заданной высоте водонапорной башни и по заданному свободному напору в конце водопроводной линии.

Эту задачу приходится решать при проектировании городских, заводских и железнодорожных водопроводов. Всякая водопроводная система труб или так назыв. *водопроводная сеть* труб состоит в общем случае из следующих труб: *a*) из линии труб

более крупного диаметра; она назыв. магистральною линиею или *магистралью* и питает всю сеть: *b*) из труб, примыкающих непосредственно к магистрали; они назыв. *главными трубами* и питаются из магистрали; *c*) из труб, примыкающих к главным трубам; они назыв. *уличными* трубами и питаются из главных труб. Магистраль начинается от водонапорной башни (в железно-дорожных водоснабжениях назыв. водоемное здание) и проходит по наиболее населенным улицам, деля город приблизительно на две равные части; в то же время она должна проходить по наиболее возвышенным частям города, если только это возможно по топографическим условиям местности. Точки примыкания главных труб к магистрали, а также точки примыкания уличных труб к главным, назыв. *узлами* водопроводной сети. Расходы в уличных, главных трубах и в магистрали определяются расчетом по заданным густоте населения и по суточной норме потребления воды на одного жителя. В эту норму обычно включаются все потребности в воде для городского населения, кроме заводов, фабрик, бань и др. учреждений, потребляющих особенно большие количества воды; для них должен быть сделан отдельный расчет расхода воды. Расходы для каждого участка труб сети должны быть предварительно исчислены и в нашей задаче предполагаются известными. Эти расходы наз. *хозяйственными*. Кроме них для каждого участка сети должны быть исчислены еще *пожарные* расходы, т.-е. расходы, получающиеся тогда, когда нужно тушить из водопровода пожар, возникающий вблизи этого участка труб.

Чтобы водопровод удовлетворял своему назначению необходимо, чтобы во всех точках сети свободный напор был не менее требуемого: напр., в центральных частях города свободный напор в трубах должен быть таким, чтобы вода в домах доходила до самого высокого этажа, напр. до 5-го; в этом случае свободный напор должен быть не менее 80 ф. На окраинах нет таких высоких зданий, а потому и свободный напор там может быть меньше, но не менее 40 ф. Эти свободные напоры должны существовать в часы наибольшего потребления воды в городе, т-е. утром и днем приблизительно с 8 ч. утра до 2 ч. дня. В прочее время суток, когда потребление воды в городе становится меньше, свободные напоры будут больше; они будут наибольшими в ночные часы, когда потребление воды минимальное. Так как во время наибольшего разбора воды может возникнуть в городе пожар, для тушения которого по трубам должно протекать дополнительное — пожарное—количество воды, то для этого случая свободный напор назначается менее указанных цифр; для центральных частей он должен быть не менее 40 ф., а для окраин — не менее 20 ф. В этом случае

вода во время тушения пожара может не доходить до самых верхних этажей высоких домов, в местности, где пожар.

Так как города обычно располагаются не на ровных местностях, то свободные напоры в сети зависят от топографии города. В низких местах города эти напоры будут больше, в высоких местах—наоборот—меньше. Затем свободные напоры в сети зависят также от того, как далеко удален от башни рассматриваемый участок трубы; для дальних участков свободный напор будет меньше, так как путь движения воды от башни до участка будет длинный, а следовательно, гидравлические сопротивления будут значительными. Поэтому-то свободные напоры будут наименьшими в таких точках сети, которые будут одновременно и наиболее удаленными от башни и расположенными на наиболее возвышенной местности. Такие точки сети называются *опасными* точками.

Выше приведенные наименьшие пределы для свободных напоров должны быть выполнены именно в опасных точках сети. Если они будут удовлетворены для этих точек, то в прочих частях сети свободные напоры будут и подавно больше указанных пределов. Прежде всего рассчитаем магистраль, которая состоит из труб разных диаметров: наибольшие диаметры магистраль имеет вблизи башни; затем по мере удаления участков от башни эти диаметры постепенно уменьшаются. Для упрощения расчета предположим, что магистраль идет по наиболее возвышенным частям города, и что в конце магистрали K (черт. 169) свободный напор должен быть не менее заданной величины H. Численное значение этой величины будет разное. Если рассматриваются хозяйственные расходы в сети, то надо брать для H такие значения: для центральных частей $H_1 = 80$ ф. и для окраин $H_2 = 40$ ф. Если же кроме хозяйственных расходов рассматриваются также и пожарные, то надо принимать: для центральных частей $H'_1 = 40$ ф. и для окраин $H'_2 = 20$ ф.

Пусть отметка земли в точке K равна z_k; высоту водонапорной башни A обозначим через ξ и отметку земли в A—через z_A. Тогда потеря напора H_0 в магистрали AK равна по чертежу:

$$H_0 = (\xi + z_A) - (z_k + H).$$

Эту величину H_0 будем считать известной. Пусть расходы, диаметры и длина различных участков магистрали будут:

$$Q_1\ D_1\ L_1 \ldots\ Q_n\ D_n\ L_n.$$

Тогда потеря напора в линии AK равна:

$$\frac{Q_1^2 L_1}{\gamma D_1^5} + \dots \frac{Q_n^2 L_n}{\gamma D_n^5} = \sum_1^n \frac{Q^2 L}{\gamma D^5} = H_0 = F(D_1 \dots D_n) \quad \dots \dots \dots \dots (a).$$

Так как расходы Q, длина L, а также H_0 известны, то требуется определить n неизвестных диаметров. Для определения их имеется только одно уравн. (a), а потому задача является неопределенной; можно назначить по произволу $(n-1)$ диаметров и затем из этого уравнения определить неизвестный диаметр. В зависимости от сделанного выбора диаметров стоимость магистрали будет различна и можно предложить себе задачу: определить диаметры магистрали таким образом, чтобы ее стоимость была наименьшей. В § 51 было уже объяснено, что стоимость трубы диаметром D и длиною L приблизительно равна $(a+bD)\,L$: следоват., стоимость всей магистрали равна

$$R = \sum_1^n (a + bD)\,L = f(D_1 \dots D_n) \quad \dots \dots \dots (b).$$

Теперь наша задача заключается в том, чтобы определить диаметры по условию *minimum*'а стоимости R и при удовлетворении равенства (a). В анализе эта задача назыв. задачей об отыскании *относительного minimum'а* стоимости R и приводится к определению абсолютного *minimum'а* новой функции, составленной из R и из условного равенства (a); эта функция Φ имеет такой вид:

$$\Phi(D_1 \dots D_n) = R + \lambda \sum_1^n \frac{Q^2 L}{\gamma D^5},$$

где λ — постоянный, пока неизвестный множитель. Для отыскания абсолютного *minimum*'а нужно приравнять нулю производные функции Φ по неизвестным диаметрам. Таким образом получим n уравнений, которые вместе с уравн. (a) дадут $(n+1)$ уравнений, достаточных для определения n диаметров и множителя λ. Таким образом получаем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial D_1} = bL_1 - 5\lambda \frac{Q_1^2 L_1}{\gamma D_1^6} = 0 \dots \frac{\partial \Phi}{\partial D_n} = bL_n - 5\lambda \frac{Q_n^2 L_n}{\gamma D_n^6} = 0,$$

коэф. γ мы считаем постоянным. Отсюда получаем:

$$D_1 = \left(\frac{5\lambda Q_1^2}{b\gamma}\right)^{1/6} \dots \dots \dots \dots \dots D_n = \left(\frac{5\lambda Q_n^2}{b\gamma}\right)^{1/6}.$$

Вставим эти значения в уравн. (a), тогда получим:

$$\frac{1}{\gamma \left(\frac{5\lambda}{b\gamma}\right)^{5/6}} \left[Q_1^{1/3} L_1 + \dots + Q_n^{1/3} L_n \right] = H_0.$$

Отсюда находим

$$\left(\frac{5\lambda}{b\gamma}\right)^{5/6} = \frac{\sum\limits_1^n Q^{5/3} L}{\gamma H_0}.$$

Этот результат подставим в выражения для диаметров и получим:

$$D_1 = A\sqrt[3]{Q_1} \ldots \ldots D_n = A\sqrt[3]{Q_n} \ldots \ldots (c)$$

где обозначено

$$A = \sqrt[5]{\frac{\Sigma Q^{5/3} L}{\gamma H_0}} \ldots \ldots (d)$$

Итак, диаметры, определенные по наименьшей стоимости, пропорциональны кубическим корням из расходов. Коэф. γ можно назначить по Дюпюи, Бирдмору, Фаннингу и др. Коэф. b, обусловливающий стоимость трубы, не входит в выражение для A. Найденные диаметры нужно округлить по сортаменту; вследствие этого ур. (a) не будет в точности удовлетворено. Линия A_1K_1 представляет линию давлений для магистрали. Означенный способ определения диаметров магистрали по заданным ξ и H_0 дан *Грасхофом.*

Определение диаметров ответвлений. Выше было уже сказано, что от магистрали отделяются главные линии, а от главных линий—уличные трубы. Диаметры главных линий и уличных труб определяются тем же способом, как диаметры магистрали. Положим от магистрали в узле B отделяется главная линия BN (черт. 169), состоящая из m участков; назовем отметки точек B и N через z_1 и z_N; требуемый свободный напор в N равен H'. Потеря напора y_1 в магистрали AB равна

$$y_1 = \frac{Q_1^2 L_1}{\gamma D_1^5}.$$

Свободный напор ξ_1 в точке B магистрали равен, очевидно,

$$\xi_1 = (\xi + z_0) - (z_1 + y_1).$$

Эту высоту ξ_1 можно рассматривать по отношению к точке N как высоту воображаемой водонапорной башни, расположенной в B, а линию BN—как новую магистраль. Определим ту потерю напора H_0' для линии BN, которою можно задаться наперед для расчета; по чертежу находим:

$$H_0' = (\xi_1 + z_1) - (z_N + H').$$

Тогда будем иметь для потери напора по линии BN, если обозначим через q; d; l — расход, диаметр и длину трубы для какого-либо участка этой линии:

$$H_0' = \frac{q_1^2\, l_1}{\gamma d_1^5} + \cdots + \frac{q_m^2\, l_m}{\gamma d_m^5} = \sum_1^m \frac{q^2 l}{\gamma d^5}.$$

Здесь сумма Σ распространяется на все m участков труб линии BN; коэф. γ предполагаем постоянным.

Совершенно также как для магистрали искомые диаметры $d_1 \ldots d_m$ главной линии найдем по формулам, выведенным в предыдущем пункте, а именно:

$$d_1 = A_1 \sqrt[3]{q_1} \ldots d_m = A_1 \sqrt[3]{q_m}\text{, где } A_1 = \sqrt[5]{\frac{\Sigma q^{1/3} l}{\gamma H_0'}} \quad \ldots\ldots\ldots (e).$$

Найденные диаметры округляем по сортаменту.

Численный пример. Определим диаметры магистрали $ABCDEK$ черт. 170) и главной линии BFG по следующим данным. Расходы в различных участках магистрали, начиная с AB, следующие: $Q_1 = 6$; $Q_2 = 4{,}5$; $Q_3 = 4{,}2$; $Q_4 = 3{,}25$ и $Q_5 = 2{,}75$ куб. ф. Расходы в главной линии, начиная от B, следующие: $q_1 = 1{,}5$ и $q_2 = 0{,}75$ куб. ф. Длина участков магистрали: $L_1 = 500$; $L_2 = 600$; $L_3 = 350$; $L_4 = 450$ и $L_5 = 700$ ф.; длина участков главной линии: $l_1 = 800$; $l_2 = 650$ фут. Отметки узлов: $z_A = 102$; $z_B = 70$; $z_k = 45$; $z_g = 50$ ф. Высота водонапорной башни A равна $\xi = 128$ ф. Свободный напор H в точке K равен 100 ф. и свободный напор H' в G равен 80 ф.

Рассчитаем сперва магистраль. Определим допускаемую найбольшую потерю напора для магистрали; имеем по чертежу:

$$H_0 = (\xi + z_A) - (z_k + H) = (128 + 102) - (45 + 100) = 85 \text{ ф.}$$

Далее вычисляем:

$$\sum_1^5 Q^{1/3} L = Q_1^{1/3} L_1 + \cdots + Q_5^{1/3} L_5 = 4111.$$

Для коэф. $\frac{1}{\gamma}$ выбираем величину по Дюпюи, равную 0,000762 для футов, и определяем коэф. A:

$$A = \sqrt[5]{\frac{4111 . 0{,}000762}{85}} = 0{,}517.$$

Затем находим диаметры:

$$D_1 = 0{,}517 \sqrt[3]{6} = 0{,}94 \text{ ф.} \backsim 1 \text{ ф.} = 12 \text{ д.}$$

$$D_2 = 0{,}517 \sqrt[3]{4{,}5} = 0{,}85 \text{ ф.} \backsim 0{,}833 \text{ ф.} = 10 \text{ д.}$$

$$D_3 = 0{,}517 \sqrt[3]{4{,}2} = 0{,}83 \text{ ф.} \backsim 0{,}833 \text{ ф.} = 10 \text{ д.}$$

$$D_4 = 0{,}517 \sqrt[3]{3{,}25} = 0{,}76 \text{ ф.} \backsim 0{,}75 \text{ ф.} = 9 \text{ д.}$$

$$D_5 = 0{,}517 \sqrt[3]{2{,}75} = 0{,}72 \text{ ф.} \backsim 0{,}75 \text{ ф.} = 9 \text{ д.}$$

По округленным диаметрам определяем потерю напора для всей магистрали; она равна

$$\Sigma \frac{Q^2L}{\gamma D^5} = 1,37 + 23,04 + 11,71 + 15,26 + 17,0 = 68,4 \text{ ф.},$$

что меньше заданного $H = 85$ ф. Вследствие уменьшения потери напора свободный напор в конце магистрали будет больше; именно он равен

$$(\xi + z_A) - (z_k + 68,4) = 116,6 \text{ ф.},$$

а заданный свободный напор равен 100 ф.

Теперь определим диаметры главной линии BG. Сперва находим свободный напор в точке B; по чертежу находим:

$$\xi_1 = \left(\xi + z_A\right) - \left(z_B + \frac{Q_1^2 L_1}{\gamma D_1^5}\right) = \left(128 + 102\right) - \left(70 + 1,37\right) = 158,6 \text{ ф.}$$

Затем вычисляем допускаемую потерю напора в точке G:

$$H = (\xi_1 + z_B) - (z_g + H') = (158,6 + 70) - (50 + 80) = 98,6 \text{ ф.}$$

Далее находим:

$$\Sigma q^{4/3} l = q_1^{4/3} l_1 + q_2^{4/3} l_2 = 1506.$$

Потом определяем коэф. A_1:

$$A_1 = \sqrt[5]{\frac{1506 \,.\, 0,000762}{98,6}} = 0,410.$$

Наконец имеем:

$$d_1 = 0,410 \sqrt[3]{1,5} = 0,47 \text{ ф.} \backsim 0,5 \text{ ф.} = 6 \text{ д.}$$
$$d_2 = 0,410 \sqrt[3]{0,75} = 0,37 \text{ ф.} \backsim 0,417 \text{ ф.} = 5 \text{ д.}$$

Потеря напора для линии BG равна

$$\Sigma \frac{q^2 l}{\gamma d^5} = 43,89 + 22,18 = 66,1 \text{ ф.},$$

что меньше заданного 98,6 ф. Свободный напор в точке G равен:

$$(158,6 + 70) - (50 + 66,1) = 112,5 \text{ ф.},$$

что больше требуемого 80 ф. Увеличение свободного напора произошло вследствие увеличения диаметров по сортаменту. Подобным же образом вычисляем диаметры всех главных линий. Диаметры уличных труб получаются по расчету довольно малыми; обыкновенно их берут не меньше 4 д.

§ 53. Простой водопровод при переменном напоре и при резервуаре с постоянным горизонтальным сечением. В предыдущих §§ рассматривалось движение по трубам в предположении, что

напор H остается постоянным; в практике H чаще бывает переменным. Пусть для момента t напор в водопроводе np (черт. 171) равен H; за промежуток времени dt этот напор уменьшается на dH вследствие того, что горизонт воды в резервуаре понижается на dH. Тогда имеем такое равенство расходов:

$$-\Omega_0 dH = Q dt = \omega V_p \cdot dt.$$

Здесь Ω_0 — горизонтальное сечение резервуара, которое считаем постоянным; ω — поперечное сечение выходного отверстия трубы; V_p — скорость в выходном отверстии. Знак минус поставлен потому, что $dt > 0$, а $dH < 0$, так как горизонт воды в резервуаре опускается. Здесь будем принимать частную гипотезу, так же как при вытекании чрез отверстия и насадки при переменном горизонте, что скорость V_p, а следов., и расход Q при переменном горизонте в каждый момент времени равны расходу и скорости при установившемся движении, соответствующим тому же положению горизонта.

Пусть за время t напор изменяется с H_0 до H_1; тогда из предыдущего равенства получаем:

$$t = \frac{\Omega_0}{\omega} \int_{H_1}^{H_0} \frac{dH}{V_p} = \Omega_0 \int_{H_1}^{H_0} \frac{dH}{Q} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (228).$$

Это *основное* уравнение вытекания при переменном напоре.

Скорость w опускания горизонта воды в резервуаре равна:

$$w = \frac{Q}{\Omega_0} = \frac{\omega V_p}{\Omega_0} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a).$$

Для дальнейших вычислений нужно взять выражение для V_p и Q, приведенное в одном из предыдущих §§, подставить его в уравн. (228), которое затем и интегрировать.

a) Рассмотрим сперва простейший случай водопровода, когда всеми местными сопротивлениями по их малости можно пренебречь, и когда по той же причине можно пренебречь в урав. Д. Бернулли членом

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g}.$$

Тогда, как известно, получается такое равенство

$$\lambda \frac{L}{D} \frac{V_p^2}{2g} = \frac{Q^2 L}{\gamma D^5} = \mathrm{H}.$$

Здесь первая и вторая часть равенства представляют общие сопротивления в трубе. Для упрощения коэффициенты

$$\lambda = 8 g b_1 \text{ и } \frac{1}{\gamma} = \frac{64 b_1}{\pi^2}$$

принимаем постоянными или зависящими только от гидравлического радиуса. Тогда получаем:

$$V_p = \sqrt{\frac{2gHD}{\lambda L}}, \qquad Q = \sqrt{\frac{\gamma D^5 H}{L}}.$$

Подставляя эти значения в уравн. (228) и производя действия получаем:

$$t = \frac{2\Omega_0}{\omega}\sqrt{\frac{\lambda L}{2gD}}\left(\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1}\right) = 2\Omega_0\sqrt{\frac{L}{\gamma D^5}}\left(\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1}\right) \quad . \ . \ . \ (229).$$

Вторая и третья часть этого равенства тожественны; одна из них выражена через коэф. λ, а другая—через коэф. $\frac{1}{\gamma}$.

Введем здесь понятие о среднем расходе Q_c и среднем напоре H_c, значение которых то же, что и в § 31, а именно: средним напором наз. такой постоянный напор, при котором за время t вытекает из сосуда тот же об'ем, как и при переменном напоре; средним расходом наз. расход, соответствующий среднему напору. На основании такого определения получаем:

$$Q_c \cdot t = \Omega_0 (H_0 - H_1) \qquad \frac{Q_c^2 L}{\gamma D^5} = H_c.$$

Из последнего равенства находим Q_c; вставляем его в первое и затем заменяем t выражением (229); тогда получаем:

$$\sqrt{H_c} = {}^1/_2 \left(\sqrt{H_0} + \sqrt{H_1}\right) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (230).$$

Это выражение тожественно с полученным в § 31 для отверстий и насадок. Определим время t_1 необходимое, чтобы при постоянном напоре равном начальному H_0 вытек из резервуара тот же об'ем W, какой вытекает за время t при напоре, изменяющемся от H_0 до H_1. Очевидно, $W = \Omega_0 (H_0 - H_1)$; затем при постоянном напоре H_0 имеем

$$Q = \sqrt{\frac{\gamma D^5 H_0}{L}} \text{ и } Qt_1 = t_1\sqrt{\frac{\gamma D^5 H_0}{L}} = W = \Omega_0 (H_0 - H_1).$$

Отсюда получаем:

$$t_1 = \Omega (H_0 - H_1)\sqrt{\frac{L}{\gamma D^5 H_0}}.$$

Найдем отношение времени t и t_1; оно равно:

$$\frac{t}{t_1} = \frac{2\sqrt{H_0}}{\sqrt{H_0} + \sqrt{H_1}} = \sqrt{\frac{H_0}{H_c}}.$$

Определим время T, когда вытекание воды из резервуара прекращается. Здесь нужно различать два случая: 1) когда выходное отвер-

стие p трубы np лежит ниже входного отверстия n (черт. 172): вытекание, очевидно, прекращается при напоре H_2; 2) когда выходное отверстие p лежит выше входного n или когда оба эти отверстия лежат на одном горизонте; вытекание прекращается при напоре равном 0. Сообразно с этим время T определим по форм. (229), полагая в ней $H_1 = H_2$ или $H_1 = 0$. Очевидно, что опорожнение резервуара возможно только в первом случае.

b) Если в водопроводе с постоянным диаметром местными сопротивлениями и членом

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g}$$

пренебрегать нельзя, то для него при постоянном напоре получается уравн. Д. Бернулли в следующем виде

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g} + \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\frac{V_p^2}{2g} + \frac{V_p^2}{2g}\Sigma\zeta + \frac{Q^2 \Sigma L}{\gamma D^5} = H \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b).$$

Здесь второй член представляет местное сопротивление при входе в трубу, третий — сумму местных сопротивлений в коленах, закруглениях и т. п., и последний — сумму общих сопротивлений в прямых частях трубы. Имея в ввиду, что $Q = \omega V_p = \Omega_0 V_0$, можем это уравнение переписать в таком виде:

$$\frac{Q^2}{2g\omega^2}\left[1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right) + \Sigma\zeta + \frac{2g\omega^2 \Sigma L}{\gamma D^5}\right] = \frac{Q^2}{2g\omega^2}\left[1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2 + \zeta_0\right] =$$

$$= \frac{Q^2}{2g\omega^2 A^2} = H \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

где $\frac{1}{A^2}$ обозначает сумму всех членов в больших скобках.

Если пренебречь членом $\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2$, представляющем высоту начальной скорости, то

$$\frac{1}{A^2} = 1 + \zeta_0; \text{ следов., } A = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_0}} = \varphi_0 = \mu_0 \quad \ldots\ldots (d)$$

где $\varphi_0 = \mu_0$ коэф. скорости и расхода для рассматриваемого водопровода как это было об'яснено в §§ 44 и 45. Определим из предидущего уравнения Q и вставим его выражение в формулу (228); тогда, произведя интегрирование, находим:

$$t = \frac{\Omega_0}{A\omega\sqrt{2g}}\int_{H_1}^{H_0} \frac{dH}{\sqrt{H}} = \frac{2\Omega_0}{A\omega\sqrt{2g}}\left[\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1}\right] \quad \ldots\ldots\ldots (231).$$

c) **Случай водопровода, соединяющего два резервуара.** Здесь следует рассуждать так же, как и в случае двух сообщающихся сосудов (§ 33).

Пусть Ω_0 и Ω_1 постоянные горизонтальные сечения резервуаров; H — разность горизонтов воды в резервуарах в момент t (черт. 173); за время dt горизонт в верхнем резервуаре понизится на dz, а в нижнем повысится на dz'; тогда равенство расходов выразится так:

$$-\Omega_0 dz = \Omega_1 dz' = Q dt = \omega V_p \cdot dt \quad \ldots \ldots \ldots (e).$$

Но $z - z' = H$; следов., $dz - dz' = dH$; затем $-\Omega_0 dz = \Omega_1 dz'$; поэтому

$$dz = \frac{\Omega_1}{\Omega_0 + \Omega_1} dH.$$

Теперь из уравн. (e) получаем такое *основное* выражение:

$$t = \frac{\Omega_0 \Omega_1}{\Omega_0 + \Omega_1} \int_{H_1}^{H_0} \frac{dH}{Q} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (232)$$

где H_0 и H_1 — разность горизонтов воды в резервуарах для начала и конца вытекания.

В *частном* случае, когда местными сопротивлениями, а также членом

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g}$$

можно пренебречь по их малости, для определения Q следует воспользоваться выражением:

$$\frac{Q^2 L}{\gamma D^5} = H.$$

Для коэф. $\frac{1}{\gamma} = \frac{64 b_1}{\pi^2}$ выбираем или постоянное значение или значение, зависящее от гидравлического радиуса. Найденное отсюда Q вставляем в основное уравнение и интегрируем; тогда получаем:

$$t = \frac{2\Omega_0 \Omega_1}{\Omega_0 + \Omega_1} \sqrt{\frac{L}{\gamma D^5}} \left[\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1}\right] \quad \ldots \ldots \ldots (233).$$

Время T сравнения горизонтов в резервуарах найдем, положив $H_1 = 0$.

Если уровень в правом резервуаре не изменяется, напр., потому, что сечение его Ω_1 весьма велико, то разделяя числителя и знаменателя на Ω_1 и замечая, что $\frac{\Omega_0}{\Omega_1} = 0$ при $\Omega_1 = \infty$, находим в этом случае:

$$t = 2\Omega_0 \sqrt{\frac{L}{\gamma D^5}} \left[\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1}\right] \quad \ldots \ldots \ldots (233a).$$

Если горизонт в левом резервуаре не изменяется, то полагая $\Omega_0 = \infty$, также получаем:

$$t = 2\Omega_1 \sqrt{\frac{L}{\gamma D^5}} \left[\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (233b).$$

В *общем* случае, когда надо принять во внимание все сопротивления, для определения V_p имеем ур. Д. Бернулли в таком виде

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g} + \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\frac{V_p^2}{2g} + \frac{V_p^2}{2g}\Sigma\zeta + \frac{Q^2\Sigma L}{\gamma D^5} = H \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (f).$$

Здесь V_0 — начальная скорость; второй член представляет местное сопротивление при входе в трубу; третий — местные сопротивления по длине трубы (в коленах, закруглениях, вентилях и т. п.); последний — общие сопротивления в прямых частях трубы. Так как $Q = \Omega_0 V_0 = \omega V_p$, то предидущее равенство можно переписать в таком виде:

$$\frac{Q^2}{2g\omega^2}\left[1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right) + \Sigma\zeta + \frac{2g\omega^2\Sigma L}{\gamma D^5}\right] = H \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (g).$$

Обозначим сумму величин, стоящих в больших скобких через $\frac{1}{A^2}$; тогда

$$\frac{Q^2}{2g\omega^2 A^2} = H \text{ и } Q = A\omega\sqrt{2gH} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (h).$$

Вставим это выражение для Q в основное уравнение (232); тогда после интегрирования найдем:

$$t = \frac{2\Omega_0\Omega_1}{A\omega(\Omega_0 + \Omega_1)\sqrt{2g}}\left[\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1}\right] \quad \ldots\ldots\ldots (234).$$

Если можно пренебречь членом $\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2$, представляющем высоту начальной скорости, то

$$\frac{1}{A^2} = 1 + \zeta_0; \text{ следов., } A = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_0}} = \varphi = \mu_0$$

где $\varphi_0 = \mu_0$ представляют коэф. скорости и расхода для рассматриваемого водопровода, как это было об'яснено в § 46. Для коэф. $\frac{1}{\gamma}$ надо брать или постоянную величину, напр., по Дюпюи, или выражение, зависящее от гидравлического радиуса R. Время T сравнения горизонтов найдем, полагая $H_1 = 0$.

Если уровень в правом резервуаре не изменяется, напр., потому, что сечение его Ω_1 весьма велико, то, разделив числителя и знаменателя на Ω_1 и замечая, что $\frac{\Omega_0}{\Omega_1} = 0$ при $\Omega_1 = \infty$, получим для этого случая:

$$t = \frac{2\Omega_0}{A\omega\sqrt{2g}}\left[\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (235).$$

Если горизонт не изменяется в левом резервуаре по той же причине, то таким же образом найдем:

$$t=\frac{2\Omega_1}{A\omega\sqrt{2g}}\left[\sqrt{H_0}-\sqrt{H_1}\right] \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (236).$$

Численный пример 1. Рассмотрим случай наполнения тендера паровоза из гидравлического путевого крана. Этот случай был уже разобран в § 47, но в предположении постоянного напора. Берем те же данные, а именно: диаметр водопроводной линии $D=6$ д. длина ее $L=400$ ф.; об'ем тендера 500 куб. ф.; диаметр бака в водоемном здании $\Omega=20$ ф.; начальный напор $H_0=22{,}2+1{,}6=23{,}8$ ф. и конечный напор $H_1=22{,}2$ ф. На трубе *abc* (черт. 159) имеется 7 закруглений с углами в 90^0 и радиусами $\rho=5$ ф. Определим время t наполнения тендера.

Определим по форм. (*c*) величину A; с этою целью вычислим по форм. Грасхофа коэф. ζ для одного из закруглений:

$$\zeta=0{,}00416\,\beta^0\left(1-\frac{D}{2\rho}\right)\sqrt{\frac{D}{2\rho}}=0{,}00416\cdot 90\,\left(1-\frac{0{,}5}{2\,.\,5}\right)\sqrt{\frac{0{,}5}{2\,.\,5}}=0{,}0792.$$

Тогда $\Sigma\zeta=7\cdot 0{,}0792=0{,}554$. Длину всех 7 закруглений примем равной 55 ф. Часть трубы, примыкающая к баку, в которой проявляется местное сопротивление, имеет длину $5D=2{,}5$ ф. Таким образом длину прямых частей трубы надо принять равной $\Sigma L=400-55-2{,}5=$ $=342{,}5$ ф. Вычисляем член, соответствующий общим сопротивлениям в трубе; коэф. $\frac{1}{\gamma}$ принимаем по Дюпюи равным для футов 0,000762; тогда

$$\frac{2g\omega^2\Sigma L}{\gamma D^5}=\frac{2\,.\,32{,}2\,.\,(0{,}196)^2\,.\,0{,}000762\,.\,342{,}5}{(0{,}5)^5}=20{,}66.$$

Членом $\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2=\left(\frac{0{,}5}{20}\right)^4$ пренебрегаем по его малости. Для коэф. μ берем значение 0,8. Теперь получаем:

$$\frac{1}{A^2}=\frac{1}{\mu_0^2}=\frac{1}{\mu^2}+\Sigma\zeta+\frac{2g\omega^2\Sigma L}{\gamma D^5}=1{,}56+0{,}55+20{,}66=22{,}77.$$

Следоват., $A=\mu_0=0{,}21$.

Искомое время t определим из выражения:

$$t=\frac{2\Omega_0}{A\omega\sqrt{2g}}\left[\sqrt{H_0}-\sqrt{H_1}\right]=\frac{2}{0{,}21}\left(\frac{20}{0{,}5}\right)^2\frac{1}{\sqrt{2\,.\,32{,}2}}\left[\sqrt{23{,}8}-\sqrt{22{,}2}\right]=$$

$$=317 \text{ сек.}=5 \text{ м. } 17 \text{ сек.}$$

Выше при решении этой задачи было найдено $t=326$ сек., при употреблении той же формулы Дюпюи, принимая за постоянный

напор—средний напор $= \frac{1}{2}(H_0 + H_1) = 23$ ф.; при этом мы пренебрегали всеми местными сопротивлениями.

Численный пример 2. При вышеприведенных данных определим время T опорожнения бака, полагая что высший горизонт воды в баке на $16{,}6 + 22{,}2 = 38{,}8$ ф. выше отверстия c путевого крана. Для этого воспользуемся формулой (231), в которой положим $H_0 = 38{,}8$ ф. и $H_1 = 38{,}8 - 16{,}6 = 22{,}2$ ф. тогда получаем:

$$T = \frac{2}{0{,}21}\left(\frac{20}{0{,}5}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 32{,}2}}\left[\sqrt{38{,}8} - \sqrt{22{,}2}\right] = 2881 \text{ сек.} \infty 48 \text{ м.}$$

Численный пример 3. Труба, длиною 1000 ф. и диаметром 6 д., соединяет два цилиндрические резервуара; диаметр верхнего резервуара равен 7 саж. и нижнего 6 саж.; первоначальная разность горизонтов равна 30 ф. Определим разность горизонтов резервуаров через 2000 сек., после начала движения воды. Из форм. (233) получаем, принимая по Дюпюи $\frac{1}{\gamma} = 0{,}000762$ (для футов):

$$\sqrt{H_1} = \sqrt{H_0} - \frac{t(\Omega_0 + \Omega_1)}{2\Omega_0\Omega_1}\sqrt{\frac{\gamma D^5}{L}}$$

$$\sqrt{H_1} = \sqrt{30} - \frac{2000(1885{,}7 + 962{,}1)}{2 \cdot 1885{,}7 \cdot 962{,}1}\sqrt{\frac{(0{,}5)^5}{0{,}000762 \cdot 1000}} = \sqrt{30} - 0{,}318.$$

Следоват.,

$$H_1 = 26{,}7 \text{ ф.}$$

§ 54. Простой водопровод с переменным напором при переменном сечении резервуара.

Пусть в момент t напор для рассматриваемого водопровода равен H; за время dt этот напор уменьшается на dH (черт. 174). Если для этого напора поперечное сечение резервуара равно O, то получается такое равенство расходов:

$$-OdH = Qdt = \omega V_p \cdot dt.$$

Время t, в течение которого напор изменяется с H_0 до H_1, найдем из равенства

$$t = \int_{H_1}^{H_0} \frac{OdH}{Q} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (237).$$

Это *основное* уравнение. Для дальнейших вычислений необходимо знать зависимость между поперечным сечением O и напором H. Как и в случае вытекания из сосудов через отверстия, эта зависимость во многих случаях может быть представлена трехчленом второй степени такого вида:

$$O = \Omega_0 + pH + qH^2 \quad \ldots \ldots \ldots (a)$$

где Ω_0; p; q суть постоянные величины, которые определяются по заданной форме сосуда. К этому случаю относятся резервуары, имеющие форму шаров, эллипсоидов, конусов, пирамид и т. п.

a) Рассмотрим один из *простейших случаев*, когда всеми местными сопротивлениями в водопроводе, а также членом

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g}$$

в ур. Д. Бернулли можно пренебречь по их малости. Тогда получаем для определения Q такое выражение:

$$\frac{Q^2 L}{\gamma D^5} = H$$

где первая часть представляет общие сопротивления в трубе, коэф. $\frac{1}{\gamma}$ принимаем или постоянным, напр., по Дюпюи, или зависящим от гидравл. радиуса R. Определим отсюда Q и подставим его в основное урав. (237), где величину O заменим выражением (a); тогда получаем:

$$t = \sqrt{\frac{L}{\gamma D^5}} \left[\Omega_0 \int \frac{dH}{\sqrt{H}} + p \int \frac{HdH}{\sqrt{H}} + q \int \frac{H^2 dH}{\sqrt{H}} \right]$$

Выполняя интегрирование и взяв пределы H_0 и H_1, находим:

$$t = 2\sqrt{\frac{L}{\gamma D^5}} \left[\Omega_0 \left(\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1} \right) + {}^1/_3\, p \left(\sqrt{H_0^3} - \sqrt{H_1^3} \right) + {}^1/_5\, q \left(\sqrt{H_0^5} - \sqrt{H_1^5} \right) \right] \quad \ldots \ldots \text{(b)}.$$

Об'ем жидкости, вытекшей из резервуара за это время, равен:

$$W = \int_{H_1}^{H_0} \Theta dH = \Omega_0 (H_0 - H_1) + {}^1/_2\, p\, (H_0^2 - H_1^2) + {}^1/_3\, q\, (H_0^3 - H_1^3) \ldots \text{(c)}.$$

Время T, когда вытекание из резервуара прекращается, определяется по этой же формуле, но при этом нужно различать два случая совершенно так же как в предыдущем §, а именно: когда выходное отверстие трубы p лежит ниже входного отверстия n (черт. 172), то вытекание прекращается при напоре $H_1 = H_2$; когда же отверстие p лежит выше n или наравне с ним, то надо брать $H_1 = 0$.

Как пример рассмотрим случай резервуара в форме *эллипсоида* с 3 неравными осями; $2a$; $2b$; $2c$; ось $2c$ расположена вертикально (черт. 175). Входное отверстие трубы расположено в плоскости XZ и в расстоянии m от центра O, выходное отверстие—в расстоянии $(m + s)$ от O. Найдем выражение для площади горизонтального сечения $m'n'$,

взятого в расстоянии u от O. Уравнение данного эллипсоида имеет такой вид:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1.$$

Положим здесь $z=u$; тогда

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1-\left(\frac{u}{c}\right)^2=k^2$$

следоват.

$$\left(\frac{x}{ak}\right)^2+\left(\frac{y}{bk}\right)^2=1.$$

Это уравнение эллипса $m'n'$ с полуосями $a_1=ak$ и $b_1=bk$. Следоват площадь сечения $m'n'$ равна

$$O=\pi a_1 b_1=\pi abk^2=\frac{\pi ab}{c^2}(c^2-u^2)=\frac{\pi ab}{c^2}\left[c^2-(H-m-s)^2\right]$$

или

$$O=\frac{\pi ab}{c^2}\left[c^2-(m+s)^2\right]+\frac{2\pi ab}{c^2}(m+s)H-\frac{\pi ab}{c^2}H^2.$$

Отсюда видно, что в общей формуле для сечения резервуара надо положить:

$$\Omega_0=\frac{\pi ab}{c^2}\left[c^2-(m+s)^2\right];\ p=\frac{2\pi ab}{c^2}(m+s);\ q=-\frac{\pi ab}{c^2}.$$

Для шарового резервуара надо положить: $a=b=c$.

Отсюда видно, что решение этой задачи не представляет никаких затруднений. Другое дело будем иметь, если рассматривать резервуар в виде цилиндра с *горизонтальными* производящими с эллиптическим или круговым поперечным сечением; здесь получается эллиптический интеграл, нахождение которого возможно только в приближенном виде и при помощи довольно сложных вычислений.

b) Рассмотрим теперь более *общий* случай, когда принимаются во внимание все местные сопротивления. Напишем уравн. Д. Бернулли для нашего водопровода в таком виде:

$$\frac{V_p^2-V_0^2}{2g}+\left(\frac{1}{\mu^2}-1\right)\frac{V_p^2}{2g}+\frac{V_p^2}{2g}\Sigma\zeta+\frac{Q^2\Sigma L}{\gamma D^5}=H\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (d).$$

Так как $Q=\Omega_0 V_0=\omega V_p$, то это равенство можно переписать так:

$$\frac{Q^2}{2g\omega^2}\left[1-\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2+\left(\frac{1}{\mu^2}-1\right)+\Sigma\zeta+\frac{2g\omega^2\Sigma L}{\gamma D^5}\right]=H\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (e).$$

Величину в больших скобках обозначим через $\frac{1}{A^2}$; тогда

$$\frac{Q^2}{2g\omega^2 A^2}=H \text{ и } Q=A\omega\sqrt{2gH}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (f).$$

Заметим, что если пренебречь членом $\left(\frac{\omega}{\Omega^0}\right)^2$, соответствующим высоте начальной скорости, то

$$\frac{1}{A^2}=1+\zeta_0 \text{ или } A=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta_0}}=\varphi_0=\mu_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

здесь коэф. ζ_0 φ_0 μ_0 — суть коэф. сопротивления, скорости и расхода для данного водопровода. Вставим найденное выражение для Q в основное уравнение; тогда получаем:

$$t=\frac{1}{A\omega}\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{H_1}^{H_0}\frac{OdH}{\sqrt{H}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (h).$$

Если для сечения O можно принять выражение в виде трехчлена второй степени, как было указано выше, то получим:

$$t=\frac{1}{A\omega\sqrt{2g}}\left[\Omega_0\int\frac{dH}{\sqrt{H}}+p\int\frac{HdH}{\sqrt{H}}+q\int\frac{H^2dH}{\sqrt{H}}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (i).$$

Эти интегралы находятся так, как было уже показано. Об'ем W вытекшей воды за время t получается по предыдущему.

c) Рассмотрим случай опорожнения *водохранилищ*, которые устраиваются для питания судоходных каналов, для орошения, для водопроводов, для приведения в действие водяных тюрбин на фабриках и заводах и т. п. Для устройства водохранилища надо преградить узкую и глубокую долину водоудержательной каменной или земляной плотиной, которая преградит течение речки на дне этой долины. Тогда впереди плотины образуется мало-по-малу искусственное озеро очень большой вместимости. Очевидно, что такое водохранилище имеет форму, зависящую от топографии местности, и потому геометрически неопределимую. Вопрос о вытекании воды из водохранилищ был рассмотрен в § 31, где было показано, что время t опускания горизонта воды можно определить при помощи форм. Симпсона. В выражение для t входит μ—коеф. расхода для отверстия, через которое вытекает вода из водохранилища, или для чугунной трубы, помощью которой вода выпускается. Здесь покажем определение этого коэффициента для трубы; далее будет обозначать его через μ_0.

Входный конец этой трубы помещается в особой камере A (черт. 176); затем труба по длине может иметь несколько закруглений; она оканчивается в другой камере B, имея на этом конце вентиль. В начале трубы имеется также устройство для затвора трубы. Отсюда видно, что эта труба представляет водопровод постоянного диаметра D, соединяющий два резервуара; движение в нем происходит под напором H,

представляющем разность горизонтов в водохранилище и в камере B. Пренебрегая начальною скоростью V_0 по ее малости, найдем что скорость V_p в трубе и расход Q трубы выражаются так:

$$V_p = \mu_0 \sqrt{2gH} \qquad Q = \mu_0 \omega \sqrt{2gH}$$

где ω—поперечное сечение трубы; $\mu_0 = \varphi_0$—коэф. расхода или скорости для трубы. Для определения этого коэффициента нужно воспользоваться выводом, помещенным в § 45 для водопровода с постоянным диаметром D, состоящего из нескольких прямолинейных частей, соединенных закруглениями. Вентиль на конце трубы предполагаем открытым вполне. Тогда согласно § 45 получаем такое выражение:

$$\varphi_0 = \mu_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_0}} =$$

где ζ_0—коэф. сопротивления водопровода равный:

$$\zeta_0 = \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right) + \Sigma\zeta + \frac{\lambda}{D}\Sigma L \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (k).$$

Первый член — соответствует сопротивлению при входе в трубу второй—сопротивлениям в закруглениях, коленах, задвижках, клапанах и т. п.; третий—общим сопротивлениям, т.-е. сопротивлениям в прямых частях трубы; ΣL—сумма длин этих прямых частей.

Коэф. μ—коэф. расхода для насадки диаметром D; при больших D можно принимать $\mu = 0{,}78$. Коэф. $\lambda = 8gb_1$, где b_1 — основной коэф трения в трубах; для первого приближения можно принять по Дюпюи $\lambda = 0{,}03$ для всяких мер. Величину $\Sigma\zeta$ следует определять по форм. Грасхофа (197); при малом числе закруглений этой величиной можно пренебречь.

§ 55. Движение воды под напором в каменных трубах при вытекании на воздух и в воду. Наполнение и опорожнение шлюзных камер при помощи каналов в стенах и отверстий в воротах. До сих пор мы рассматривали движение воды под напором в металлических и деревянных трубах кругового поперечного сечения. Для движения под напором в трубах другого какого-либо поперечного сечения в § 42 было дано такое выражение для общих сопротивлений (форм. 183):

$$(h'' - h'_0) = \lambda \frac{L}{4R}\frac{V^2}{2g} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (183)$$

где: L—длина прямой части трубы; $R = \frac{\omega}{\chi}$ — гидравлический радиус; $\lambda = 8gb_1$; b_1—основной коэф. трения, выражения для которого приве-

дены в § 42. В практике могут встретиться случаи, когда вода движется под напором по каменной трубе, поперечное сечение которой может быть такого типа, какой применяется обычно для каменных труб, напр. сечение, состоящее из прямоугольника шириною b, высотою h; сверху покрытие сводом. Вода, движущаяся по такой трубе, может вытекать прямо в атмосферу, или может вытекать в другой резервуар; в последнем случае мы имеем трубу, соединяющую два резервуара.

a) Если вода вытекает прямо в атмосферу, то, рассматривая линию тока M_0M, т.-е. от горизонта воды в резервуаре до центра тяжести выходного отверстия, получаем:

$$\frac{V_p^2 - V_0^2}{2g} + \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\frac{V_p^2}{2g} + \frac{V_p^2}{2g}\Sigma\zeta + \lambda\frac{\Sigma L}{4R}\frac{V_p^2}{2g} = H \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

где: V_0 — начальная скорость; второй член представляет местное сопротивление при входе в трубу; третий член—все прочие местные сопротивления (в закруглениях, коленах, диафрагмах и т. п.); последний член—общие сопротивления, т.-е. сопротивления в прямых частях общею длиною ΣL. Пусть ω—поперечное сечение трубы и Ω_0 — горизонтальное сечение резервуара; тогда имеем:

$$Q = \Omega_0 V_0 = \omega V_p \text{ и } \frac{V_0^2}{2g} = \left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2 \frac{V_p^2}{2g}.$$

Предидущее равенство можно переписать так:

$$\frac{V_p^2}{2g}\left[1 + \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right) + \Sigma\zeta + \frac{\lambda\Sigma L}{4R} - \left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2\right] = H \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

или

$$\frac{V_p^2}{2g}\left[1 + \zeta_0 - \left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2\right] = H$$

где ζ_0—коэф. сопротивления для трубы равный

$$\zeta_0 = \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right) + \Sigma\zeta + \frac{\lambda\Sigma L}{4R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c).$$

Во многих случаях член $\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2$ весьма мал и можно им пренебрегать; тогда получается

$$V_p = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_0}}\sqrt{2gH} = \varphi_0\sqrt{2gH} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

здесь φ_0—коэф. скорости равный

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_0}}.$$

Если выходное отверстие устроено без вентиля или диафрагмы, то $\varphi_0 = \mu_0$—коэф. расхода трубы. Во всех таких случаях:

$$\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_0}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\mu_0}-1\right)+\Sigma\zeta+\frac{\lambda\Sigma L}{4R}}} \qquad (e).$$

Расход трубы равен:

$$Q = \mu_0\omega\sqrt{2gH} \qquad (f).$$

Рассмотрим коэф. расхода μ_0: он будет известен, если знаем коэф. μ; ζ и λ. Величина μ—представляет коэф. расхода для насадки (короткой трубы) того же сечения, что и рассматриваемая труба, длиною около $16\ R$. За отсутствием опытных данных можно принять для μ при больших размерах сечения то же значение, что и для больших металлических труб, т.-е. $\mu = 0{,}78$. Величину коэф. λ будем знать, выбрав выражение для основного коэф. b_1, для которого целесообразнее брать формулу Базена с коэф. шероховатости, соответствующим обделке стенок трубы.

Численный пример. Определить расход Q каменного канала длиною 25 м. при напоре $H = 12$ м.; поперечное сечение канала прямоугольник шириною $b = 1$ м., высотою $h = 1{,}25$ м,; перекрытие — полуциркульный свод; канал имеет 2 закругления по 90° радиусом $\rho = 2{,}13$ м. Живое сечение канала $\omega = 1{,}25 + 0{,}39 = 1{,}64$ м².; смачиваемый периметр $\chi = 3{,}50 + 1{,}57 = 5{,}07$ м.; гидр. радиус $R = \frac{\omega}{\chi} = 0{,}32$ м. Прежде всего находим коэф. расхода μ_0: для этого вычисляем коэф. сопротивления ζ_0. Коэффициент:

$$\lambda = 8gb_1 = 8g\left[\alpha\left(\beta+\frac{\gamma}{\sqrt{R}}\right)\right]^2 = 8\cdot 9{,}81\left[0{,}0115\left(1+\frac{0{,}16}{\sqrt{0{,}32}}\right)\right]^2 = 0{,}017.$$

Здесь в формуле Базена принято: $\alpha = 0{,}0115$; $\beta = 1$; $\gamma = 0{,}16$ для II категории, т.-е. для русел с гладкою обделкою из кирпичной или тесовой кладки. Длина l, занятая местным сопротивлением при входе равна $16R = 5{,}12$ м.; длина l', занятая местными сопротивлениями в 2 закруглениях, равна: $\pi\rho = 6{,}69$ м.; тогда длина прямых частей канала

$$\Sigma L = 25 - (5{,}12 + 6{,}69) = 12{,}19 \text{ м}.$$

Теперь вычисляем член, соответствующий общим сопротивлениям, равный:

$$\lambda\frac{\Sigma L}{4R} = \frac{0{,}017\,.\,12{,}19}{4\,.\,0{,}32} = 0{,}16.$$

Коэф. $\Sigma\zeta$, соответствующий двум закруглениям по 90° радиусом $\rho = 2{,}13$ м., вычисляем по форм. Вейсбаха (198) с коэф. для труб прямоугольного поперечного сечения:

$$\zeta = 0{,}124 + 3{,}104 \left(\frac{1}{2{,}13}\right)^{7/2} = 0{,}355.$$

Теперь $\Sigma\zeta = 2 \cdot 0{,}355 = 0{,}71$.

Коэф. соответствующий сопротивлению при входе равен:

$$\left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right) = \frac{1}{(0{,}78)^2} - 1 = 0{,}64.$$

Следоват. коэф. сопротивления равен:

$$\zeta_0 = 0{,}64 + 0{,}71 + 0{,}16 = 1{,}51.$$

Коэф. расхода равен:

$$\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_0}} = 0{,}63.$$

Расход каменного канала равен:

$$Q = \mu_0 \omega \sqrt{2gH} = 0{,}63 \cdot 1{,}64 \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 12} = 15{,}79 \text{ м}^3.$$

Из этого примера видно, что местные сопротивления при входе и в закруглениях значительно больше общих сопротивлений. Однако вычисление этих местных сопротивлений не может быть сделано достаточно точно вследствие отсутствия опытных данных для каналов больших размеров.

б) Если канал соединяет *два* резервуара и вода движется в нем под напором, то все сказанное в предидущем пункте будет справедливо и для настоящего случая, только напор H здесь представляет разность горизонтов воды в этих резервуарах.

в) Рассмотрим движение воды в канале при *переменном* напоре, именно случай, когда шлюзная камера наполняется из верхнего б'ефа или когда она опорожняется в нижний б'еф при помощи каналов, устроенных в шлюзных стенах, и одновременно при помощи отверстий в шлюзных воротах. Вытекание воды происходит через затопленные отверстия (черт. 177).

Наполнение и опорожнение шлюзных камер через отверстия в шлюзных воротах было рассмотрено в § 34.

Обозначим Ω_0—горизонтальное сечение верхнего б'ефа; Ω—такое же сечение камеры; ω_0—поперечное сечение каменного канала; ω—поперечное сечение отверстия в воротах. Если ζ—разность горизонтов в б'ефе и в камере, то расход *двух* каналов равен:

$$2Q' = 2 \cdot \mu_0 \omega_0 \sqrt{2g\zeta}$$

расход n отверстий в воротах:

$$Q'' = \mu \cdot n\omega \sqrt{2g\zeta}.$$

За время dt горизонт воды в б'ефе понизится на dz, а горизонт в камере поднимется на dz'. Равенство расходов представится так:

$$-\Omega_0 dz = \Omega dz' = (2Q' + Q'')\,dt = (2\mu_0\omega + \mu n\omega)\sqrt{2g\zeta} \cdot dt.$$

Здесь перед первым членом поставлен знак минус, так как с возрастанием t ордината z уменьшается. Так как $(z - z') = \zeta$, то $dz - dz' = d\zeta$;

$$\text{но } dz' = -\frac{\Omega_0}{\Omega}dz; \text{ следов. } dz = \frac{\Omega d\zeta}{\Omega_0 + \Omega}.$$

Теперь имеем:

$$-\frac{\Omega_0 \Omega d\zeta}{\Omega_0 + \Omega} = (2\mu_0\omega_0 + \mu n\omega)\sqrt{2g\zeta}\,dt.$$

Определим время t, в течении которого разность горизонтов из ζ_0 обращается в ζ_1; оно равно:

$$t = \frac{\Omega_0 \Omega}{(2\mu_0\omega_0 + \mu n\omega)(\Omega_0 + \Omega)\sqrt{2g}}\int_{\zeta_1}^{\zeta_0}\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} = \frac{2\Omega_0\Omega(\sqrt{\zeta_0} - \sqrt{\zeta_1})}{(2\mu_0\omega_0 + \mu n\omega)(\Omega_0 + \Omega)\sqrt{2g}} \dots (238).$$

Сравнивая это выражение для t с полученным выше в § 34, видим, что в знаменателе к количеству $\mu n\omega$, соответствующему отверстиям в воротах, прибавилось количество $2\mu_0\omega_0$, соответствующее двум каналам в стенах шлюза. Для коэф. μ_0 нужно взять выражение (e).

Так как сечение Ω_0 б'ефа весьма велико сравнительно с Ω, то, разделив числителя и знаменателя на Ω_0, получим из предыдущего выражения:

$$t = \frac{2\Omega(\sqrt{\zeta_0} - \sqrt{\zeta_1})}{(2\mu_0\omega_0 + \mu n\omega)\sqrt{2g}} \quad \dots\dots (239).$$

Время T сравнения горизонтов т.-е. наполнения камеры получим положив $\zeta_1 = 0$.

Численный пример. Определим время T наполнения камеры для шлюзов на р. Шексне на Мариинской водной системе по следующим данным. Разность горизонтов в верхнем и нижнем б'ефах $\zeta_0 = 2{,}37$ м. сечение камеры $\Omega = 12{,}8 \cdot 331{,}8 = 4566$ м.^{2}; в воротах имеются по 4 отверстия размеров $3 \cdot 0{,}186$ м., а всего 8 отверстий площадью $n\omega = 4{,}46$ м.^{2}; каналы имеют по длине одинаковое поперечное сечение $\omega_0 = 2{,}64$ м.^{2}; сечение прямоугольное $1{,}28 \cdot 1{,}92$ м. перекрытое сводом радиуса $1{,}07$ м. со стрелой $0{,}21$ м. и углом при центре $73°20'$. Длина прямых частей

одного канала $\Sigma L = (0{,}58 + 3{,}16 + 1{,}28) = 5{,}02$ м.; каждый канал имеет по 2 закругления г 90° описанных радиусом $\rho = 2{,}13$ м.

Смачиваемый периметр сечения $\chi_0 = 1{,}28 + 2 \cdot 1{,}92 + 1{,}37 = 6{,}49$ м.

Гидравлический радиус $R = \frac{\omega_0}{\chi_0} = \frac{2{,}64}{6{,}49} = 0{,}407$ м.

Коэф. расхода для щитовых отверстий $\mu = 0{,}60$; поэтому $\mu n \omega = 0{,}60 \cdot 4{,}46 = 2{,}68$ м.^{2}.

Теперь определим коэф. расхода μ_0 для кругового канала по форм. (*е*); здесь нужно вычислить три члена:

$$\left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right);\ \Sigma\zeta;\ \frac{\lambda \Sigma L}{4R}.$$

Для короткой насадки принимаем $\mu = 0{,}78$; поэтому $\left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right) = 0{,}64$.

Коэф. сопротивления ζ для закругления в 90° найдем по форм. Вейсбаха (198) при $\left(\frac{r}{\rho}\right) = \frac{0{,}64}{2{,}13} = 0{,}3$; коэф. $\zeta = 0{,}180$.

Затем коэфф. $\lambda = 8gb_1$, где b_1 нужно взять по формуле (190) Базена для русел с шероховатостью по II категории, т.-е. с коэфф. $\gamma = 0{,}16$; имеем:

$$\lambda = 8g\left[\alpha\left(\beta + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}\right)\right]^2 = 8 \cdot 9{,}81\left[0{,}0115\left(1 + \frac{0{,}16}{\sqrt{0{,}407}}\right)\right]^2 = 0{,}016.$$

Следовательно, получим, считая длину местного сопротивления при входе равной 0,58 м. и принимая поэтому $\Sigma L = 5{,}02 - 0{,}58 = 4{,}44$ м.:

$$\zeta_0 = 0{,}64 + 2 \cdot 0{,}18 + \frac{0{,}016 . 4{,}44}{4 . 0{,}407} = 0{,}64 + 0{,}36 + 0{,}04 = 1{,}04;$$

тогда:

$$\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_0}} = \frac{1}{\sqrt{2{,}04}} = 0{,}70.$$

Итак, время T сравнения горизонтов в камере и верхнем б'єфе равно:

$$T = \frac{2 . 4566\sqrt{2{,}37}}{(0{,}70 . 2 . 2{,}64 + 2{,}68)\sqrt{2 . 9{,}81}} = 498 \text{ сек.} = 8 \text{ м. } 18 \text{ сек.}$$

Если бы каналов в стенах шлюза не было, то для сравнения горизонтов через отверстия в шлюзовых воротах потребовалось бы время:

$$T'' = \left(\frac{\mu_0 . 2\omega_0 + \mu . n\omega}{\mu n\omega}\right)T = \left(\frac{0{,}70 . 2 . 2{,}64 + 2{,}68}{2{,}68}\right)T = 2{,}38\,T.$$

В этом примере величина коэфф. сопротивления ζ_0 для канала обусловливается местными сопротивлениями; общее сопротивление оказывается очень малым.

Глава VI. Движение воды в реках и каналах.

§ 56. Основные гипотезы. Истинное распределение скоростей по поперечному сечению канала и реки. Определение расхода и продольного уклона. Главные выводы из измерений на реках.

Движение воды в открытых руслах, т.-е. в каналах и реках, заслуживает со стороны техников особенного внимания, так как теория этого движения применяется к проектированию многих гидротехнических сооружений, как, напр., к проектированию каналов—судоходных, ирригационных, осушительных и канализационных, плотин всякого рода, выправительных сооружений в реках и т. п.

Движение воды в открытых руслах, т.-е. без напора, по существу ничем не отличается от движения в трубах, т.-е. с напором, и может быть двоякого рода: *равномерным* и *неравномерным* (однообразным). Первое существует тогда, когда поперечное сечение, обделка русла, уклон дна и расход не изменяются; второе же движение проявляется тогда, когда один или несколько из этих 4 элементов изменяются. Как и при движении воды в трубах, мы будем пользоваться здесь общими гипотезами гидравлики, подробно рассмотренными в § 22. Одна из этих гипотез заключается в том, что скорости во всех точках любого поперечного сечения, так наз. живого сечения, равны между собою и нормальны к плоскости сечения. Следовательно, по этой гипотезе принимается, что при равномерном движении все частицы движутся со скоростями равными и параллельными между собой. Эту общую скорость найдем, если разделим расход Q канала или реки на площадь живого сечения ω. Таким образом по этой гипотезе движение жидкости отожествляется с движением твердого тела, скользящего по стенкам русла. В действительности такое отожествление неверно; также неверна и гипотеза, но она удерживается в гидравлике по причинам, об'ясненным в § 22.

Истинное распределение скоростей в открытых руслах может быть найдено помощью особых измерительных приборов, как-то: трубки Пито-Дарси, Франка и вертушек различных устройств—Амслера, Гарлахера, Гайоша, Отта и др. Для этой цели в выбранном поперечном сечении реки назначают вертикали I—I, II—II... (черт. 178) в расстоянии друг от друга: 1 саж.—для малых рек; 5 саж.—для средних рек; 10 саж.—для больших и 25—30 саж.—для очень больших рек (как, напр., р. Волга в среднем и нижнем течении). На этих вертикалях

сперва измеряется глубина реки и затем вертушкой определяется скорость в различных точках 1, 2, 3... на каждой вертикали. Эти точки назначаются таким образом, чтобы можно было измерить скорости: 1) вблизи поверхности; 2) вблизи дна, и 3) в промежутке в одном или нескольких местах. Напр., по *Богуславскому* при производстве изысканий на р. Волге брались эти точки в расстояниях 0,1 саж. от поверхности и от дна и затем в расстояниях от поверхности на $0{,}2h$; $0{,}5h$; $0{,}6h$ и $0{,}75h$, где h — глубина реки на данной вертикали, всего в 6 точках. По *Бушмакину* при глубине не более 1 саж. нужно брать точки через 0,1 саж.; при глубинах больших 1 саж. следует брать точки через 0,2 саж.; кроме того, во всех случаях нужно брать точки вблизи поверхности и вблизи дна. На каждой вертикали (черт. 178) эти точки обозначены цифрами 1, 2, 3... Пусть nn' (черт. 179) представляет горизонт воды в реке. На вертикальной линии III — III, начиная от nn', наносим точки 1, 2, 3..., соответствующия точкам 1, 2, 3... (черт. 178). Затем откладываем линии $1a$, $2b$, $3c$... равные скоростям для точек 1, 2, 3... Соединим точки abc... fm плавной кривой, которую продолжим до самой поверхности—с одной стороны, и до самого дна—с другой стороны; получим *кривую скоростей* для вертикали III—III. Она наглядно показывает изменение скоростей в реке на этой вертикали. На протяжении $n'c$ она подходит близко к *параболе* с *горизонтальною осью* и с вершиною или на поверхности или немного ниже поверхности. Подобные кривые скоростей вычертим для всех 5 вертикалей. Для более ясного представления, как именно изменяются скорости в данном профиле (сечении), построим *изотахи* или кривые равных скоростей. С этою целью на отрезке nn' (черт. 179) откладываем $n\alpha = \alpha\beta = \beta\gamma$... равные 0,1 с. и проводим пунктирные линии до пересечения с кривою скоростей; точки пересечения k, l, p... будут соответствовать скоростям: $V_1 = 7 \cdot 0{,}1 = 0{,}7$ саж.; $V_2 = 6 \cdot 0{,}1 = 0{,}6$ с. и т. д. Эти точки пересечения переносим на вертикаль III—III (чертеж 178). Подобное построение сделаем для всех кривых скоростей. Тогда на черт. 178 на каждой вертикали получим точки, соответствующие скоростям V_1, V_2... Если теперь соединить кривой точки k, k, k, лежащие на вертикалях II—II, III—III... и имеющие одинаковую скорость V_1, то получим изотаху для скорости V_1. Также найдем изотаху l... l для скорости V_2 и т. д. Эти изотахи наглядно показывают распределение скоростей по сечению. *Среднюю* скорость V_m для какой-либо вертикали III—III найдем, если площадь $O = nn'ab... qmn$ (черт 179) разделим на глубину $nm = h^{III}$; для определенбя этой площади удобнее всего употребить планиметр.

Итак, получается:

$$V_m^{III} = \frac{O}{h^{III}}.$$

Глубина, соответствующая этой средней скорости, приблизительно:

$$h_m^{III} = 0{,}6h^{III}.$$

Если на черт. 178 от линии ab вверх откладывать на каждой вертикали соответственную среднюю скорость, то, соединив полученные точки, найдем *кривую средних скоростей.* Если от той же линии вверх откладывать скорости на поверхности для вертикалей I—I, II—II..., то, соединив полученные точки, найдем *кривую скоростей на поверхности.* На следующих чертежах показаны изотахи для различных русел, а именно: на черт. 180 — для *полукруглого* русла, обделанного досками: на черт. 181 — для такого же русла, но усыпанного гравием; на черт. 182 — для *треугольного* русла; на черт. 183 — для *трапецоидального* русла; оба последние русла обделаны досками. На черт. 184 показаны изотахи для *прямоугольного* русла из досок.

На этом чертеже показано распределение скоростей в вертикалях I—I, II—II..., а также в горизонтальных сечениях 1—1, 2—2... Кривые скоростей во всех этих сечениях построены следующим образом. Пусть, напр., требуется построить кривую скоростей для вертикали V—V; для этого скорости, измеренные в точках a, b, c, d, откладываем в виде отрезков aa', bb', cc' и dd'; кривая $a'b'c'd'$ будет искомой. Также построим и прочие кривые, откладывая отрезки для скоростей от соответственной вертикали; кривые скоростей 1, 2, 3, 4 для горизонтальных сечений 1—1, 2—2, 3—3 и 4—4 получим, отложив скорости от соответственной горизонтали. На черт. 185 изображены изотахи для *прямоугольной трубы* из досок; на этом же чертеже показаны кривые скоростей для вертикалей I—I, II—II... и для горизонтальных сечений 1—1, 2—2... Из всех приведенных чертежей видно, что: 1) изотахи представляются линиями параллельными смачиваемому периметру, в особенности для точек, лежащих вблизи этого периметра; поэтому движение в открытых руслах представляется телескопическим, так же как и движение в трубах, т.-е. наименьшие скорости будут у стенок русла, а затем к центру сечения скорости увеличиваются; наибольшими скорости оказываются в центральной части сечения; 2) кривые скоростей для вертикалей и для горизонтальных сечений (черт. 184) весьма сходны с параболами. Черт. 180—185 построены французским гидравликом *Базеном* на основании собственных многочисленных опытов, произведенных им в 1856—1860 г.г. над движением воды в каналах.

Определение расхода. Рассмотрим частицы, лежащие в какой-либо момент в поперечном сечении abp реки (черт. 186); через секунду эти частицы, двигаясь по линиям параллельным, будут лежать на некоторой поверхности S. Взамен частиц, ушедших из сечения abp, войдут через это сечение новые частицы, которые и заполнят об'ем W между сечением abp и поверхностью S.

Этот об'ем W и есть *расход реки* Q; объем W ограничен двумя плоскостями: вертикальною плоскостью abp и горизонтальною — abq, и двумя поверхностями: параболическою поверхностью S и цилиндрическою поверхностью S_1, у которой производящия $pp', rr'...$ горизонтальны (точнее: параллельны уклону дна), а направляющая есть смачиваемый периметр $asqprtb$ в живом сечении abp. По известному расходу определяем *среднюю скорость реки* в данном сечении:

$$V_m = \frac{Q}{\omega}.$$

Расход Q можно вычислить приблизительно по скоростям, определенным для каждой вертикали. Для этого применяются различные способы, из числа которых рассмотрим три, а именно: *а*) Кульмана (по изотахам); *б*) Гарлахера (по кривой средних скоростей), и *в*) по средней скорости на каждой вертикали.

а) По способу *Кульмана* объем W можно вычислить, если его рассечь рядом плоскостей $a_1\ b_1\ p_1;\ a_2\ b_2\ p_2...$ (черт. 187), параллельных поперечному сечению abp и отстоящих друг от друга на H, и найти кривые пересечения этих плоскостей с поверхностями S и S_1; эти кривые пересечения, очевидно, суть изотахи. Пусть площадь живого сечения abp равна Ω_0, а площади сечений $a_1b_1p_1,\ a_2b_2p_2...$ суть $\Omega_1, \Omega_2...$

Эти площади можно определить планиметром по изотахам, вычерченным, как показано на черт. 178. Тогда можно принять, что объем W_1, заключенный между сечениями abp и $a_1b_1p_1$ равен приблизительно:

$$W_1 = \tfrac{1}{2}H(\Omega_0 + \Omega_1).$$

Если принимать этот объем за усеченный конус, то получим:

$$W_1 = \tfrac{1}{3}H(\Omega_0 + \Omega_1 + \sqrt{\Omega_0\Omega_1}).$$

Однако этот прием, как показала практика, не дает большей точности.

Объем W_2 между сечениями $a_1b_1p_1$ и $a_2b_2p_2$ равен:

$$W_2 = \tfrac{1}{2}H(\Omega_1 + \Omega_2)$$

и т. д. Наконец объем W_n, отрезанный сечением $a_nb_np_n$, равен:

$$W_n = \tfrac{1}{2}H\Omega_n.$$

Следовательно, полный объем W получим, сложив найденные результаты:

$$W = Q = \frac{1}{2} H [\Omega_0 + 2(\Omega_1 + \Omega_2 + \ldots + \Omega_n)] \ldots\ldots\ldots (\alpha).$$

Очевидно, что чем меньше H, тем большее число объемов мы рассматриваем и тем точнее будет вычислен расход.

б) Способ *Гарлахера* требует построения кривой средних скоростей (черт. 178). Проведем вертикальное сечение $cdeq = O$ (черт. 186), соответствующее вертикали cq; пусть de представляет кривую скоростей для этой вертикали. Для этой вертикали средняя скорость $V_m = cf$ определяется равенством:

$$V_m = \frac{O}{h},$$

где h — глубина реки в этой вертикали.

Проведем смежное вертикальное сечение $c'e'$ в расстоянии $cc' = dx$.

Элементарный объем dW, заключенный между этими сечениями, равен:

$$dW = O \cdot dx = V_m \cdot h \cdot dx.$$

Здесь V_m и h представляют известные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ от расстояния $x = oc$, а потому можно положить, что

$$V_m h = \alpha F(x) = \alpha u,$$

где α — произвольное постоянное количество, а $F(x) = u$ представляет новую функцию от x, которую найдем по данным V_m, h и α помощью построения, которое заключается в следующем.

Пусть (черт. 188) линия agb представляет кривую средних скоростей для рассматриваемого живого сечения abp. Отложим $cg' = cg = V_m$ и $cq' = \alpha$. Тогда из подобия $\triangle$-ков cqf и $cq'g'$ находим $cf = cf' = u$.

Если сделать подобное построение и для прочих значений V_m, то в результате получим кривую $af'b$. Тогда для объема W можно написать такое выражение:

$$W = Q = \int_0^{ab} V_m \cdot h \cdot dx = \alpha \int_0^{ab} u \cdot dx = \alpha\Omega \ldots\ldots\ldots (a).$$

Здесь Ω — площадь, заключенная между кривой $af'b$ и прямой ab; ее можно найти планиметром.

в) По *третьему* способу расход Q определяется так. Для каждой вертикали I—I, II—II... (черт. 178) будут известны средние скорости V_m. Расстояния между вертикалями делим пополам линиями $a'b'$, $c'd'$...

и определяем площади ω_1, ω_2..., заключенные между этими линиями. Если средние скорости для вертикалей обозначить через

$$V_m^I,\ V_m^{II}\ldots,\ \text{то расход}\ Q=\omega_1 V_m^I+\omega_2 V_m^{II}+\ldots.$$

Для крайней левой вертикали I—I берем площадь *aa'b'Ia*, также и для крайней правой вертикали.

Все три вышеописанные способа дают одинаковые результаты.

Так, напр., профессор *Вагнер* определил расходы для р.р. Везера и Эльбы по этим способам и нашел:

	р. *Везер.*	р. *Эльба.*
по первому способу	$Q=85{,}10$ к. м.	88,32 к. м.
„ второму „	$Q=85{,}40$ „	88,40 „
„ третьему „	$Q=85{,}69$ „	88,50 „

В виду такого согласия результатов лучше для практических целей применять третий способ, как требующий меньше вычислений. Первый и второй способы требуют вычерчивания изотах и кривой средних скоростей. При небольшом числе вертикалей это вычерчивание заключает в себе много произвольного, как это ясно видно из образцовых работ профессоров Вагнера и Гарлахера, производивших измерения на германских реках.

Главные выводы из измерений на реках. *a*) На практике определение расхода в каком-либо живом сечении реки представляет работу довольно продолжительную; эта продолжительность увеличивается с числом точек, в которых вертушкой определяется скорость. Поэтому уже давно возбуждался вопрос о сокращении числа этих точек, однако, без уменьшения точности определения расхода. Многие практики принимают на основании опытных данных, что средняя скорость для какой-либо вертикали соответствует глубине равной $0{,}6H$, считая эту глубину от поверхности воды; H—глубина реки на этой вертикали. По *Куннингаму*, производившему много измерений на реках и каналах в Индии, глубина, соответствующая V_m, колеблется в пределах от $0{,}58H$ до $0{,}67H$ и равна в среднем $0{,}625H$. По *Гумфрейсу* и *Абботу*, производивших в течение 10 лет измерения на р. Миссисипи, V_m соответствует глубине $0{,}66H$. По *Ясмунду*, измерявшему расходы на реках Эльбе и Рейну, V_m соответствует глубине $0{,}63H$.

На основании этих данных можно во многих случаях достаточно приблизительно определить расход реки следующим образом. Следует назначить вертикали по возможности в большем числе и затем в каждой вертикали определить скорость только в *одной* точке на глубине

0,625H от поверхности и потом для вычисления Q по этим данным применить третий способ. Другие практики полагают, что достаточно надежные результаты получаются, если для каждой вертикали измерить скорости в *двух* точках, а именно на глубинах 0,2H и 0,8H от поверхности и затем среднюю скорость определить по формуле:

$$V_m = \tfrac{1}{2}(V_{0,2} + V_{0,8}) \ldots \ldots \ldots \ldots (b).$$

Наконец, многие инженеры считают достаточным измерять скорости в *трех* точках на одной вертикали, а именно на глубинах 0,2H; 0,4H и 0,8H, и определить среднюю скорость для этой вертикали по формуле:

$$V_m = \tfrac{1}{4}(V_{0,2} + 2V_{0,4} + V_{0,8}) \ldots \ldots \ldots (c).$$

Более подробное изучение этого вопроса показало, что наиболее точные результаты получаются при измерении скорости в *двух* точках на глубинах 0,2H и 0,8H и при вычислении средней скорости по формуле (b).

Подробности, относящиеся к определению расхода в реках, можно найти в труде проф. *Тяпкина*: „Приборы для определения скоростей и расходов воды в открытых руслах". 1901.

b) Во многих случаях определение скоростей делается помощью *поплавков*; этот способ бывает иногда единственно выполнимым, напр., при ледоходе, при высокой воде в реке, при быстром повышении горизонта воды, при очень больших скоростях и т. п. Поплавком мы находим, очевидно, для какой-либо вертикали скорость на поверхности V_0. Для определения средней скорости V_m для той же вертикали по известной величине V_0 предложено много формул; укажем на некоторые из них.

По *Гагену*:

$$V_m = 0,86 \cdot V_0 \ldots \ldots \ldots \ldots (d).$$

По *Прони*:

$$V_m = \left(\frac{a + V_0}{b + V_0}\right) V_0 \ldots \ldots \ldots \ldots (e).$$

где для метров: $a = 2,37$; $b = 3,15$;

„ футов: $a = 7,8$; $b = 10,3$.

Если по оси абсцисс откладывать скорости V_0, а по оси ординат— скорости V_m, то кривая V_m представится гиперболой $ab0c$ (черт. 189) с ассимптотами: вертикальной ed и ef. Гиперболу на длине gc можно приблизительно заменить прямой; тогда вместо форм. (e) можно пользоваться такою зависимостью: $V_m = 0,82\,V_0$.

Бомгартен рекомендует при скоростях V_0, больших 1,5 м., пользоваться форм. Прони (e) с поправочным коэффициентом $=0{,}8$, т.-е. определять среднюю скорость по формуле:

$$V_m = 0{,}8 \cdot \frac{a + V_0}{b + V_0} V_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (f).$$

Измерения, произведенные *Пресси* на 8 реках вблизи Нью-Иорка, показывают, что:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{при гладких} & \text{руслах:} & V_m = 0{,}84\, V_0 \\ \text{„ гравелистых} & \text{„} & V_m = 0{,}86\, V_0 \\ \text{или в среднем:} & & V_m = 0{,}85\, V_0 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (g).$$

Определив среднюю скорость для каждой вертикали по найденным помощью поплавков скоростям на поверхности, можем затем вычислить расход для всего сечения, применив для этого, напр., третий способ.

Если в каком-либо живом сечении определять помощью поплавков скорости на поверхности V_0 для различных вертикалей, то, зная наибольшую скорость — $maxim.\ V_0$ на поверхности для этого сечения, можем прямо определить среднюю скорость V для всего сечения при помощи следующей формулы *Зидека* (для мер в метрах):

$$V = maxim.\ V_0 \sqrt[20]{\frac{H^2}{B}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (h),$$

где B — ширина сечения и H — средняя глубина живого сечения; она определится из равенства, где ω — площадь живого сечения:

$$H \cdot B = \omega.$$

Эту форм. (h) можно применять при $H > 0{,}8$ м. и $H < 2{,}0$ м.

Если $H > 2{,}0$ м., то вместо нее нужно применять следующую (для мер в метрах):

$$V = \left(\frac{maxim.\ V_0 + 0{,}4}{1{,}2}\right) \sqrt[20]{\frac{H^2}{B}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (i).$$

Тогда расход реки: $Q = \omega V$.

Вместо форм. Зидека можно пользоваться для той же цели следующей формулой *Вагнера*:

$$V = 0{,}67 (maxim.\ V_0) + 0{,}027\, (maxim.\ V_0)^2 \quad \ldots \ldots \quad (k).$$

c) В практике играет важную роль скорость w по дну реки или канала; в технических условиях на постройку многих гидротехнических сооружений требуется, чтобы эта скорость не превышала известного предела; так в § 38 при определении размеров каменной

трубы под железнодорожною насыпью было поставлено условие, чтобы донная скорость w была не больше определенной величины, в зависимости от способа укрепления лотка трубы. Выясним отношение между скоростью w и среднею скоростью V_m для какой-либо вертикали. По измерениям *Пресси* на 8 реках около Нью-Йорка оказалось, что

для гладких русел: $w = 0{,}63\ V_m$,
„ гравелистых „ $w = 0{,}59\ V_m$,
в среднем $w = 0{,}614\ V_m$.

Американский гидравлик *Гровер*, имевший в своем распоряжении свыше 1600 кривых для скоростей по вертикалям, нашел, что достаточно точно можно принимать:

для гладких русел: $w = 0{,}67\ V_m$,
„ шероховатых „ $w = 0{,}58\ V_m$,
в среднем $w = 0{,}625\ V_m$.

Таким образом на основании этих выводов приходим к заключению, что донная скорость приблизительно равна:

$$w = 0{,}62\ V_m \quad \text{или} \quad V_m = 1{,}61\ w \quad \ldots\ldots\ldots (l).$$

Для определения зависимости между w и V_m иногда пользуются вышеприведенной формулой Прони и следующей формулой *Дюбюа*:

$$V_m = \tfrac{1}{2}(V_0 + w),$$

где V_m — средняя скорость; V_0 — скорость на поверхности. Если вместо форм. (e) взять приближенное значение: $V_m = 0{,}82\ V_0$, то из форм. Дюбюа найдем:

$$w = 0{,}78\ V_m \quad \text{или} \quad V_m = 1{,}28\ w.$$

Этот результат совершенно не согласен с результатами измерений Гровера и Пресси, а потому форм. Прони и Дюбюа лучше не пользоваться для этой цели, а применять к расчетам форм. (l), как основанную на многочисленных измерениях.

d) Движение воды в реках, покрытых *льдом*, происходит под напором, как в трубах, и медленнее чем без ледяного покрова, так как смачиваемый периметр живого сечения, т.-е. периметр, по которому происходит трение воды о твердые стенки, увеличивается при существовании льда. По измерениям *Гортона* и *Барроу* можно принимать в среднем, что трение воды по ледяному покрову составляет 0,58 трения по остальной части периметра. Итак, ледяной покров увеличивает смачиваемый периметр более чем в *два* раза; кроме того, он уменьшает живое сечение. Поэтому расход реки под ледяным покровом значи-

тельно меньше, чем без него, при одном и том же горизонте воды в реке. При леденом покрове изотахи получаются приблизительно той же формы, как при движении в трубе под напором (черт. 185).

На черт. 185 *a* показано среднее распределение скоростей по вертикали при движении воды подо льдом по измерениям вышеназванных американских гидротехников, произведенным ими на 47 вертикалях при глубинах от 5 до 20 ф. На этом чертеже по оси абсцисс отложены сотые доли средней скорости V_m, а по оси ординат сотые доли глубины воды. Из обозрения чертежа видно, что скорость по дну $w = 0{,}68\ V_m$; скорость подо льдом $w' = 0{,}85\ V_m$; наибольшая скорость $V = 1{,}15\ V_m$; она соответствует глубине равной $^3/_8$ всей глубины, считая от поверхности льда.

e) Что касается *вида кривой скоростей* для какой-либо вертикали, то большинство исследователей принимают, что это—парабола с *горизонтальною* осью и с вершиною или на поверхности или несколько ниже ее; другие полагают, что это — парабола с *вертикальною* осью; *Ясмунд* рассматривает ее как *логарифмическую* кривую. Главное затруднение в точном определении вида кривой заключается в том, что нижняя и верхняя части этой кривой, т.-е. примыкающие к дну и к поверхности, еще недостаточно исследованы.

На черт. 185 *b* показаны кривые скоростей, полученные *Пресси* из измерений на некоторых реках С. Америки. По оси абсцисс отложены сотые доли средней скорости V_m, а по оси ординат — сотые доли глубины. Сплошная кривая представляет среднюю кривую из 130 кривых; кривая с длинным пунктиром представляет среднюю из 40 кривых для рек с гравелистым дном, и кривая с коротким пунктиром — среднюю из 51 кривых с гладким дном. Здесь распределение скоростей следует по параболе с *горизонтальною* осью и с вершиною, лежащею на глубине около $0{,}15H$. Наибольшая скорость равна $1{,}16\ V_m$; скорость по дну $w = 0{,}62 V_m$; скорость на поверхности равна $1{,}15\ V_m$.

f) *Точность определения* расхода по вышеизложенным способам не может быть установлена с уверенностью, так как мы не располагаем средствами для точного вычисления этого расхода. В лучших случаях погрешность в определении может составлять не менее $3^0/_0$. По *Зидеку*, производившему много измерений, погрешность в определении расхода надо принимать не менее $5^0/_0$.

g) Для практики весьма важно знать, как изменяется расход в каком-либо поперечном сечении реки с *изменением горизонта воды*. Измерения на многих реках при разных горизонтах привели к следующим результатам. Если h — означает показание водомерной рейки

для известного положения уровня в реке, то расход Q при этом уровне можно выразить такой формулой

$$Q = a + bh + ch^2 \qquad (m)$$

где a; b; c — числовые коэффициенты, соответствующие рассматриваемому поперечному сечению; для других сечений той же реки эти коэффициенты будут иметь иные значения; кроме того, замечено, что со временем эти коэффициенты изменяются для одного и того же поперечного сечения. В одном и том же сечении расход может выражаться различными коэффициентами в зависимости от значения h; напр., для глубин меньших h_0 — формула расхода имеет одни числовые коэффициенты, а для глубин больших h_0 — другие числовые коэффициенты. Это объясняется тем, что при глубинах больших h_0 форма ложа реки заметно отличается от формы ложа при $h < h_0$.

Если по оси ординат откладывать величины h, а по оси абсцисс — соответственные расходы Q, то кривая расходов согласно уравн. (m) представится *параболой* AB (черт. 190); при $h > h_0$ кривая расходов представится другой параболой BC; и так здесь получаются две кривые расходов. Такой случай имеет место, напр., для Волги у посада Дубовки. Для некоторых русских рек зависимость между Q и h выражается такой формулой

$$Q = a(h - b)^2 \qquad (n)$$

где a и b — численные коэффициенты. По *Цишевскому* для р. Волги у Самары эти коэффициенты равны (для мер в саженях):

$$a = 51{,}81 \qquad b = 4{,}87.$$

По *Гнусину* для р. Северной Двины у Черепаново эти коэффициенты равны (тоже для мер в саженях):

$$a = 23{,}92 \qquad b = -0{,}74.$$

Ледяной покров, как показано выше, существенно изменяет условия движения в реке, почему в этом случае получаются две параболы расходов: одна для времени ледостава, другая — для времени, когда льда на реке нет. Напр., по *Бушмакину* для р. Яхромы получается такая парабола:

$$Q = a + bh + ch^2$$

где для периода, когда река свободна от льда:

$$a = 0{,}274; \qquad b = 0{,}0129; \qquad c = 0{,}000175$$

и для времени ледостава:

$$a = 0{,}203 \qquad b = 0{,}0052 \qquad c = 0{,}000106$$

для мер в саженях. Эти коэффициенты показывают, что при ледоставе расход значительно меньше при одном и том же горизонте воды в реке.

Для многих рек зависимость между Q и h может быть представлена таким уравнением:

$$Q = a(h + b)^m \quad . . . . (p)$$

где a и b — численные коэффициенты и m — дробная степень. Так, напр., по *Гарлахеру* для р. Эльбы в Течене (для метров):

$$a = 78{,}09 \qquad b = 1{,}45 \qquad m = 1{,}953$$

для той же реки при Мюльберге:

$$a = 71{,}13 \qquad b = 0{,}40 \qquad m = 1{,}587.$$

Нахождение кривых для расходов имеет большое практическое значение. Помощью кривой для расходов можно вычислить расход для данного сечения реки не только в пределах наблюдения, но также при горизонтах, выходящих немного за эти пределы. Это особенно важно в том случае, когде предполагается построить, напр., мост через реку в таком месте, для которого известен только самый высокий горизонт воды, расход же для этого горизонта не был своевременно определен. Кривая расходов дает возможность найти приблизительно этот наибольший расход, по которому и можно расчитать отверстие моста.

h) Часто реки имеют обширную *пойму*, т.-е. низменный берег на большом расстоянии от реки, заливаемую при высоком горизонте воды в реке. В этом случае элементы реки, т.-е. расход Q, живое сечение ω, смачиваемый периметр χ, скорость V и продольный уклон i надо определять отдельно для главного русла реки и для поймы, так как условия движения реки по главному руслу и по пойме совершенно различны. Так, напр., если abc (черт. 191) — главное русло, cd — пойма, то для главного русла имеем: расход Q_1; живое сечение $abce = \omega_1$; смачиваемый периметр $abce = \chi_1$ скорость $V_1 = \frac{Q_1}{\omega_1}$; гидравлический радиус $R_1 = \frac{\omega_1}{\chi_1}$; продольный уклон i_1, тогда имеем по известной формуле *Шези* (186) такую зависимость между этими элементами:

$$V_1 = C_1\sqrt{R_1 i_1}$$

Для поймы имеем: Q_2; ω_2; χ_2; V_2; R_2 и i_2 и зависимость будет следующая:

$$V_2 = C_2\sqrt{R_2 i_2}$$

Таким образом здесь мы имеем случай как бы двух смежных рек соприкасающихся по поверхности *ce* и движущихся почти независимо друг от друга. Определение расхода в реках с поймой подробно объяснено в § 61.

i) При измерениях на реках особенно важное значение следует придавать определению *продольного уклона* реки в данном поперечном сечении. Этот уклон играет очень важную роль в речной гидравлике и точное определение его существенно необходимо; однако оно сопряжено с большими затруднениями. Эти трудности заключаются в том, что продольный уклон очень мал в особенности в устьях рек; напр., в устье р. Волги он равен 6 — 16 м.м. на километр; на р. Миссисипи у Карлтона 10 — 16 м.м.; поэтому измерения должны делаться особенно тщательно и очень точными инструментами. Другая трудность в решении этой задачи обусловливается тем, что уклоны поверхности воды на правом и левом берегах вообще различны, и что поверхность воды в данном сечении не горизонтальна и не представляет плоскости, а есть поверхность. Собственно важно знать продольный уклон i_0 для течения на стрежне реки, т.-е. на главном течении или фарватере; но непосредственным измерением эту величину найти конечно невозможно и ее нужно вычислять по береговым уклонам i_1 и i_2, принимая поверхность воды за плоскость, наклонную от одного берега к другому. Для определения продольного уклона можно поступить следующим образом. По обоим берегам вверх и вниз по течению от того поперечного сечения *mn* (черт. 192), для которого определяется продольный уклон, забивают свайки у уреза воды в точках 1, 1^1; 2, 2^1;···отстоящих в расстоянии около 200 м. друг от друга, так чтобы верхняя плоскость свайки совпадала с горизонтом воды, и нивеллированием определяют отметки уровня воды во всех намеченных точках по каждому берегу. Пусть эти отметки для точек правого берега будут: $a_1 \cdots a_n \cdots a_4$, а для левого берега: $a'_1 \cdots a'_n \cdots a'_4$. Если бы уровень воды в каждом поперечном сечении был горизонтален, то очевидно было бы: $a_1 = a_1'$; $a_2 = a_2' \cdots$ В действительности это бывает довольно редко; чаще уровень представляет поверхность, которую можно приблизительно принять за плоскость *pq* (черт. 193), наклонную к горизонту; при чем этот поперечный наклон может не только изменять свою величину от одного поперечного сечения к другому, но он может получиться в противоположную сторону. Наблюдения показывают, что при половодьи, когда уровень в реке поднимается, поверхность воды *pαq* выпукла кверху, а при спаде вод получается поверхность *pβq* выпуклая книзу. Поэтому определение уклона реки в этих случаях представляется делом очень

сложным. В закруглениях поверхность воды в пересечении с вертикальною плоскостью представляет по *Форхгеймеру* — логарифмическую кривую. Как указано выше, для гидравлики необходимо определить собственно уклон i_0 стрежня, который идет вообще не по середине реки, а ближе то к одному берегу, то к другому. Если расстояния этого стрежня от правого и левого берега в сечении $1 - 1'$ известны и равны λ и λ', то не трудно видеть, что отметка a воды на стрежне r в сечении $1 - 1'$ равна:

$$a = a'_1 + (a_1 - a'_1)\frac{\lambda'}{\lambda + \lambda'}$$

Таким путем вычислим отметки $a; b; c \cdots$ стрежня в сечениях $1-1'$; $2-2'; \cdots$ Если расстояния между этими сечениями равны $l_1; l_2 \cdots$, то частные уклоны между поперечными сечениями равны:

между $1 - 1'$ и $2 - 2'$ . . . . $i_1 = \frac{a-b}{l_1}$

„ $2 - 2'$ и mn . . . . $i_2 = \frac{b-c}{l_2}$ и т. д.

Тогда искомый уклон i_0 стрежня в поперечном сечении mn получим, разделяя разность отметок стрежня для сечений $1 - 1'$ и $4 - 4'$ на расстояние между этими сечениями.

Численный пример. Приводим определение продольного уклона по стрежню, произведенное профес. *Гарлахером* на р. Дунае близ г. Клостернейбурге. Расстояние между сечениями $1 - 1'$ и $2 - 2'$ равнялось 206 м., а между всеми прочими по 200 м. Отметки поверхности воды отнесены к некоторой постоянной горизонтальной плоскости. При этом оказалось, что уровень воды в сечении $1 - 1'$ горизонтален, а в остальных сечениях он представляется наклонным,и горизонт воды у одного берега лежит выше чем у другого; именно в сечении $2 - 2'$ у правого берега на 11 м.м. выше чем у левого, а в остальных сечениях у левого берега горизонт выше чем у правого: в mn — на 53 м.м.; в $3 - 3'$ — на 46 м.м. и в $4 - 4'$ — на 84 м.м. Стрежень лежит приблизительно в расстоянии $^1/_4$ ширины реки от правого берега; следоват.

$$\frac{\lambda'}{\lambda + \lambda'} = \frac{3}{4}; \text{ тогда } a = a'_1 + \frac{3}{4}(a_1 - a'_1)$$

Все данныя для вычисления уклонов частных и общего приведены в следующей таблице.

Сечения.	Отметки уровня воды у берега в метр.		Разность уровней в одном сечении.	Отметка уровня воды на стрежне.	Разность отметок по стрежню.	Расстояние между сечениями.	Частный уклон.
	Левого.	Правого.					
1	2	3	4	5	6	7	8
1 — 1′	157,536	157,535	1 м.м.	157,535	115 м.м.	206 м.	0,000558
2 — 2′	157,412	157,423	11 м.м.	157,420	115 м.м.	200 „	0,000508
$m - n$	157,345	157,292	53 м.м.	157,305	73 м.м.	200 „	0,000365
3 — 3′	157,267	157,221	46 м.м.	157,232	90 м.м.	200 „	0,000450
4 — 4′	157,205	157,121	84 м.м.	157,142			
				Сумма	393 м.м.	806 м.	0,000488

Итак, общее падение по стрежню равно 393 м.м. при расстоянии 806 м.; следоват. искомый уклон

$$i_0 = \frac{393}{806000} = 0,000488 = \frac{1}{2051}.$$

к) В заключение заметим, что при вычислении гидравлического радиуса

$$R = \frac{\omega}{\chi}$$

для какого-либо поперечного сечения ω реки можно во многих случаях принимать вместо смачиваемого периметра χ ширину реки l в этом сечении. Ошибка получается очень малой и составляет от 0,25% до 1%; напр., для р. Дуная у г. Нусдорфа получается:

$$l = 436,0 \text{ м.} \qquad \chi = 439,0 \text{ м.}$$

Для р. Эльбы у г. Теченя для разных сечений получено:

$l = 106,14 \quad 111,93 \quad 111,83 \quad 113,72 \quad 119,22$ метров

$\chi = 106,27 \quad 112,25 \quad 111,96 \quad 113,86 \quad 119,40$ „

Эти цыфры подтверждают сказанное выше.

§ 57. Уравнение равномерного движения. Главнейшие эмпирические формулы для скорости. Вывод уравнения равномерного движения тожествен с выводом для такого же движения в трубах. Проведем два поперечные сечения mn и $m'n'$ (черт. 194) в расстоянии L друг от друга. Этими сечениями выделим объем жидкости $mnm'n'$. Этот объем движется равномерно, а потому все силы к нему приложенные уравновешиваются; следов. сумма проекций всех этих сил на любую ось равна нулю. Силы, действующие на объем жидкости, следующие:

1) Давления в сечениях mn и $m'n'$, происходящие от действия жидкости, лежащей влево от mn и вправо от $m'n'$ на частицы данного объема. Единичные давления в этих сечениях распределяются по гидростатическому закону, так как скорости в каждом из этих сечений параллельны между собой; тогда суммы давлений для этих сечений равны $p_0\omega$ и $p\omega$, где p_0 и p — ед. давления в центрах тяжести этих сечений C_0 и C. Так как эти сечения равны, то расстояния этих точек от свободной поверхности воды тоже равны. а потому $p_0 = p$.

2) Давления ложа реки на боковую поверхность водяной призмы $mnm'n'$. В § 56 было объяснено, что в силу общих гипотез гидравлики трение проявляется лишь между ложем и боковою поверхностью водяного объема. Для любой элементарной площадки $d\Omega$ этой поверхности сила трения равна $t.d\Omega$, где t — ед. сила трения; направление силы противоположно движению. Этой же площадке соответствует еще нормальная сила $n.d\Omega$; она представляет противодействие ложа давлению на него жидкости. Пусть χ — смачиваемый периметр сечения; тогда боковая поверхность ложа реки $S = \chi.L$. Сумма всех сил трения равна:

$$t.S = t.\chi L.$$

3) Вес Q объема жидкости; он равен $\Delta\omega L$.

Все перечисленныя силы проектируем на ось l, параллельную скорости. Проекция сил $n.d\Omega$ равна нулю; проекция веса равна:

$$Q sin\beta = Q\frac{z_0 - z}{L} = Q\frac{h}{L}$$

где h — разность горизонтов реки в m и m', называемая *падением* реки на длине L. Угол β обыкновенно очень мал, а потому можно принять

$$sin\beta = tg\beta = i$$

т.-е. длина mm' принимается равной mm''. Величина i называется *продольным уклоном* реки. Итак:

$$Q\,sin\beta = \Delta\omega L i.$$

Искомая сумма проекций сил на выбранную ось равна:

$$p_0\omega - p\omega - t.\chi L + \Delta\omega L i = 0.$$

Отсюда

$$t.\chi L = \Delta\omega L i = Q i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (a).$$

Это выражение показывает, что при равномерном движении сила трения $t\chi L$ равна составляющей веса Q на направление скорости. Из равенства (a) выводим:

$$\frac{t}{\Delta} = \frac{\omega}{\chi} i = Ri = R\frac{h}{L} \quad \ldots\ldots\ldots (240).$$

Уравнение (240) есть искомое уравнение равномерного движения в реках и каналах. Оно может иметь практическое значение только тогда, когда известна величина ед. силы трения t. Как и в случае движения воды в трубах, гидравлики принимают здесь, что сила t пропорциональна квадрату средней скорости реки, т.-е. что

$$\frac{t}{\Delta} = b_1 V^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (241).$$

Здесь коэф. b_1 зависит от скорости, шероховатости ложа реки и от гидравлического радиуса R, а по некоторым авторам также от уклона i; этот коэффициент наз. *основным*. Из уравн. (240 и 241) находим:

$$V = \sqrt{\frac{1}{b_1}}\sqrt{Ri} = C\sqrt{Ri} \quad \ldots\ldots\ldots (242).$$

Это уравнение представляет известную нам формулу *Шези*, данную им еще в 1775 г.

Главнейшие формулы для основного коэффициента b_1. Для коэф. b_1 имеется в технической литературе довольно много формул, которые можно разделить на *пять* следующих групп.

В **первую** группу входят формулы, в которых $b_1 = f(V)$; сюда относятся формулы Прони, Эйтельвейна и др.

Во **вторую** группу входят формулы, в которых $b_1 = f(R)$; сюда относятся формулы Дарси-Базена; Базена, сокращенная формула Г. и Куттера, Маннинга, Куннингама, Фтили и Стирнса.

В **третью** группу входят формулы, в которых $b_1 = f(RV)$; эта группа довольно малочисленна; сюда относится формула Линдлея и др.

В **четвертую** группу, наиболее многочисленную, входят формулы, в которых $b_1 = f(R,i)$; сюда относятся формулы: Гумфрейса-Аббота, Гангилье-Куттера, С. Венана, Невиля, Гнусина и др.

Пятая группа заключает формулы, в которых b_1 постоянная величина.

Многие из формул, входящих в эти группы, являются *одночленными*, т.-е. имеют логарифмический вид.

Разсмотрим из этих формул наиболее известные или наиболее употребительные.

1) Формула *Прони* (из первой группы). Французский ученый Прони принимал для b_1 двухчленное выражение такого же вида как и в случае движения воды в трубах, руководствуясь изложенной в § 42 гипотезой Кулона. По Прони коэф. b_1 имеет такой вид:

$$b_1 = a + \frac{b}{V}$$

следоват.

$$\frac{t}{\Delta} = Ri = b_1 V^2 = bV + aV^2;\ V = \sqrt{\frac{1}{b_1}}\sqrt{Ri}\ \ldots\ldots (243).$$

где a и b постоянные, равные для метров:

$$a = 0{,}00030931 \qquad b = 0{,}00004445$$

Впоследствии *Эйтельвейн*, принимая для b_1 ту же двухчленную формулу и пользуясь более многочисленным опытным материалом, дал для этих коэффициентов такие значения (для метров):

$$a = 0{,}000366 \qquad b = 0{,}0000243$$

2) *Первая* формула *Базена* или формула *Дарси-Базена* (из второй группы). В формулах Прони и Эйтельвейна не имеется величин, выражающих степень шероховатости русла, что очевидно представляет существенный недостаток их. Как уже было указано выше, *Дарси* впервые доказал обширными опытами сильное влияние шероховатости на движение воды в трубах. Он был также первым определившим значение этого фактора для движения воды в реках. При щедрой поддержке французского правительства он устроил в 1856 г. в окрестностях г. Дижона опытный канал длиною 596 м., шириною 2 м. и глубиною 1 м. К несчастью, скорая смерть помешала ему окончить свои исследования, которые были после закончены его сотрудником *Базеном*. Результатом этих опытов явилась первая формула Базена, которая более известна как формула Дарси-Базена; она имеет следующий вид:

$$b_1 = a + \frac{b}{R}$$

следоват.

$$\frac{t}{\Delta} = Ri = \left(a + \frac{b}{R}\right)V^2\ \ldots\ldots\ldots (244).$$

Здесь a и b — два *коэффициента шероховатости*, численные значения которых различны для различных обделок русла канала. В этом отношении Базен установил 4 категории обделок, которым соответствуют следующие значения a и b для мер в метрах: при этом переписываем величину b_1 таким образом:

$$b_1 = a\left(1 + \frac{\frac{b}{a}}{R}\right) = a\left(1 + \frac{c}{R}\right)$$

для *первой* категории русел с очень гладкими стенками:

$$b = 0{,}00015\left(1 + \frac{0{,}03}{R}\right)$$

для *второй* категории русел с гладкими стенками:

$$b_1 = 0,00019\left(1 + \frac{0,07}{R}\right)$$

для *третьей* категории русел с негладкими стенками:

$$b_1 = 0,00024\left(1 + \frac{0,25}{R}\right)$$

для *четвертой* категории русел земляных:

$$b_1 = 0,00028\left(1 + \frac{1,25}{R}\right)$$

Впоследствии Гангилье и Куттер прибавили сюда еще *пятую* категорию для русел гравелистых:

$$b_1 = 0,00040\left(1 + \frac{1,75}{R}\right)$$

Для мер в футах коэффициенты a и c имеют следующие значения:

I) $a = 0,00004572$,	$c = 0,098$;
II) $a = 0,00005791$,	$c = 0,230$;
III) $a = 0,00007315$,	$c = 0,82$;
IV) $a = 0,00008534$,	$c = 4,10$;
V) $a = 0,00012192$,	$c = 5,74$.

3) *Вторая* формула *Базена* (из второй группы). Базен на основании собственных опытов, а также измерений, произведенных другими исследователями в Италии, Индии, С. Америке и в других странах, дал вторую формулу, которая по его мнению может применяться к расчетам с лучшим успехом, чем его предыдущая формула. По этой формуле основной коэффициент b_1 представляется таким выражением:

$$b_1 = \left[\alpha\left(\beta + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}\right)\right]^2.$$

Тогда

$$\frac{t}{\triangle} = Ri = \left[\alpha\left(\beta + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}\right)\right]^2 V^2.$$

Отсюда

$$V = \frac{R\sqrt{i}}{\alpha(\beta\sqrt{R} + \gamma)} = \frac{87R\sqrt{i}}{\beta\sqrt{R} + \gamma} \quad \ldots\ldots\ldots (245).$$

Здесь α — постоянный коэффициент для всяких мер равный 0,0115, следовательно, $\frac{1}{\alpha} = 87$; β — постоянный коэффициент равный: 1 для метров; $\beta = 0,552$ для футов; $\beta = 1,461$ для саженей.

Коэфф. γ представляет *коэфф. шероховатости*, изменяющийся от 0,06 до 1,75 в зависимости от обделки русла; численное значение его не зависит от мер. По степени шероховатости Базен делит все русла на 6 категорий, а именно:

для русел *первой* категории, т.-е. с очень гладкою обделкою (цементная, деревянная, гладко выстроганная): $\gamma = 0,06$;

для русел *второй* категории, т.-е. с гладкою обделкою (кирпичная, тесовая, досчатая): $\gamma = 0,16$;

для русел *третьей* категории, т.-е. с грубою обделкою: $\gamma = 0,46$;

для русел *четвертой* категории, т.-е. земляных правильных: $\gamma = 0,85$;

для русел *пятой* категории, т.-е. земляных в обыкновенных условиях: $\gamma = 1,30$;

для русел *шестой* категории, т.-е. земляных, очень шероховатых $\gamma = 1,75$.

Необходимо отметить, что вторая формула Базена заключает только *один* коэффициент шероховатости.

В следующей таблице XIV приведены значения коэфф. C в формуле Базена для различных значений: гидравлического радиуса R и коэффициента шероховатости γ.

4) *Сокращенная* формула *Гангилье-Куттера* (из второй группы). Эта формула имеет тот же вид, что вторая формула Базена с тем только различием, что коэфф. $\alpha = 0,01$, а коэфф. шероховатости γ изменяется в пределах от 0,12 до 2,00, смотря по обделке русла. Русла по степени их шероховатости делятся на 12 категорий.

Таким образом по сокращенной формуле Г. и Куттера имеем:

$$b_1 = \left[\alpha_1\left(\beta + \frac{\gamma_1}{\sqrt{R}}\right)\right]^2.$$

Тогда:

$$\frac{t}{\triangle} = Ri = \left[\alpha_1\left(\beta + \frac{\gamma_1}{\sqrt{R}}\right)\right]^2 V^2.$$

Следовательно,

$$V = \frac{R\sqrt{i}}{\alpha_1\left(\beta + \frac{\gamma_1}{\sqrt{R}}\right)} = \frac{100\,R\sqrt{i}}{\beta\sqrt{R} + \gamma_1} \quad \ldots\ldots\ldots (246);$$

здесь α_1 — постоянный коэфф. для всяких мер равный 0,01; следовательно, $\frac{1}{\alpha_1} = 100$; β — постоянный коэфф., равный 1 для метров; $\beta = 0,552$ для футов; $\beta = 1,461$ для саженей. Коэфф. γ_1 представляет *коэфф. шероховатости* русла, которые в этом отношении разделяются на 12 категорий, поименованных в следующей таблице XV.

Таблица XIV

значений коэфф. C в формуле Шези: $V = C\sqrt{Ri} = \sqrt{\frac{1}{b_1}}\sqrt{Ri}$ при основном коэфф. b_1, взятом по формуле *Базена* (форм. 245).

(Для метрических мер).

Гидр. рад.	Коэфф. шероховатости $\gamma =$						Гидр. рад.	Коэфф. шероховатости $\gamma =$					
R. м.	0,06	0,16	0,46	0,85	1,30	1,75	*R.* м.	0,06	0,16	0,46	0,85	1,30	1,75
0,05	68,5	50,7	28,5	18,1	12,8	9,9	0,45	79,8	70,2	51,6	38,4	29,6	24,1
0,06	69,8	52,6	30,2	19,4	13,8	10,7	0,46	79,9	70,4	51,8	38,6	29,8	24,3
0,07	70,9	54,2	31,7	20,6	14,7	11,4	0,47	80,0	70,5	52,0	38,8	30,0	24,5
0,08	71,8	55,6	33,1	21,7	15,5	12,1	0,48	80,0	70,6	52,3	39,1	30,2	24,7
0,09	72,5	56,7	34,4	22,7	16,3	12,7	0,49	80,1	70,8	52,5	39,3	30,4	24,8
0,10	73,1	57,7	35,5	23,6	17,0	13,3	0,50	80,2	70,9	52,7	39,5	30,6	25,0
0,11	73,6	58,7	36,5	24,4	17,7	13,9	0,55	80,4	71,5	53,7	40,5	31,6	25,9
0,12	74,1	59,5	37,4	25,2	18,3	14,4	0,60	80,7	72,1	54,6	41,4	32,5	26,7
0,13	74,6	60,2	38,2	25,9	18,9	14,9	0,65	80,9	72,6	55,4	42,3	33,3	27,4
0,14	75,0	60,9	39,0	26,7	19,4	15,3	0,70	81,1	73,0	56,1	43,1	34,1	28,1
0,15	75,3	61,5	39,7	27,2	19,9	15,8	0,75	81,3	73,4	56,8	43,9	34,8	28,8
0,16	75,6	62,1	40,5	27,8	20,4	16,2	0,80	81,5	73,8	57,4	44,6	35,5	29,4
0,17	75,9	62,7	41,2	28,4	20,9	16,6	0,85	81,7	74,1	58,0	45,2	36,1	30,0
0,18	76,2	63,2	41,8	29,0	21,4	17,0	0,90	81,8	74,4	58,6	45,9	36,7	30,6
0,19	76,5	63,6	42,4	29,5	21,8	17,3	0,95	81,9	74,7	59,1	46,5	37,3	31,1
0,20	76,7	64,1	42,9	30,0	22,3	17,7	1,00	82,0	75,0	59,6	47,0	37,8	31,6
0,21	76,9	64,5	43,5	30,5	22,7	18,1	1,10	82,2	75,4	60,5	48,0	38,8	32,6
0,22	77,1	64.9	44,0	30,9	23,1	18,4	1,20	82,4	75,9	61,3	48,9	39,7	33,5
0,23	77,3	65,2	44,4	31,4	23,4	18,7	1,30	82,6	76,3	62,0	49,8	40,6	34,3
0,24	77,5	65,5	44,8	31,8	23,8	19,0	1,40	82,8	76,6	62.6	50,6	41,4	35,1
0,25	77,6	65,9	45,3	32,2	24,2	19,3	1,50	82,9	76,9	63,2	51,3	42,2	35,8
0,26	77,8	66,2	45,7	32,6	24,5	19,6	1,60	83,0	77,2	63,8	52,0	42,9	36,5
0,27	78,0	66,5	46,1	33,0	24,8	19,9	1,70	83,1	77,5	64,3	52,6	43,6	37,1
0,28	78,1	66,8	46,5	33,4	25,2	20,2	1,80	83,2	77,7	64,8	53,2	44,2	37,7
0,29	78,3	67,0	46,9	33,7	25,5	20,5	1,90	83,3	77,9	65,2	53,8	44,8	38,3
0,30	78,4	67,3	47,3	34,1	25,8	20,7	2,00	83,4	78,1	65,6	54,3	45,3	38,9
0,31	78,5	67,6	47,6	34,3	26,1	21,0	2,20	83,6	78,5	66,4	55,3	46,4	39,9
0,32	78,6	67,8	47,9	34,7	26,4	21,2	2,40	83,7	78,8	67,1	56,2	47,3	40,8
0,33	78,8	68,0	48,2	35,1	26,7	21,5	2,60	83,8	79,1	67.7	57,0	48,1	41,7
0,34	78,9	68,2	48,5	35,4	26,9	21,7	2,80	83,9	79,4	68,2	57,7	48,9	42,5
0,35	79,0	68,4	48,8	35,7	27,2	22,0	3,00	84,0	79,6	68,7	58,3	49,7	43,3
0,36	79,1	68,6	49,2	36,0	27,5	22,2	3,20	84,1	79,8	69,2	58,9	50,4	44,0
0,37	79,2	68,8	49,5	36,3	27,7	22,4	3,40	84,2	80,0	69,6	59,5	51,0	44,6
0,38	79.2	69,0	49,8	36,6	28,0	22,7	3,60	84.3	80,2	70,0	60,1	51,6	45,2
0,39	79,3	69,2	50,1	36,8	28,2	22,9	3,80	84,4	80,4	70,4	60,6	52,2	45,8
0,40	79,4	69,4	50,4	37,1	28,5	23,1	4,00	84.4	80,5	70,7	61,0	52,7	46,4
0,41	79,5	69,6	50,6	37,4	28,7	23,3	4,50	84,6	80,9	71,5	62,1	53,9	47,6
0,42	79,6	69,7	50,9	37,6	28,9	23,5	5,00	84,7	81,2	72,1	63,0	55,0	48,8
0,43	79,7	69,9	51,1	37,9	29,2	23,7	5,50	84,8	81,4	72,7	63,8	56,0	49,8
0,44	79,7	70,1	51,4	38,1	29,4	23,9	6,00	84,9	81,6	73,2	64,6	56,8	50,7

Таблица XV

коэффициентов шероховатости γ_1 в сокращенной формуле *Г.* и *Куттера.*

Категории.	Форма русла.	Обделка русла.	Коэффиц. шерохов. γ_1
I	Полукругл.	Чистый, гладкий цемент	0,12
II	Прямоуг.	Чистый цемент и гладко-выстроганное дерево.	0,15
III	„	Хорошо выстроганные доски	0,20
IV	„	Обыкновенные доски; хорошая кирпичная кладка и чистая тесовая кладка	0,25—0,27
V	„	Обыкновенная кирпичная кладка и бревенчатые стенки	0,33—0,37
VI	„	Обыкновенная бутовая кладка из грубо околотого камня	0,45
VII	„	Старая тесовая кладка; подошва покрыта илом	0,55
VIII	„	Грубая каменная кладка; подошва покрыта илом	0,75
IX	„	Старая каменная кладка; без мха и без растений; с илистым дном	1,00
X	Трапецоидальная	Скалистые стенки, ширина дна меньше 1,5 м., мало растительности	1,25
„	„	Канал с очень правильными и хорошо устроенными земляными откосами, без растительности	1,50
XI	„	Земляное русло с илистым или каменистым дном, мало растительности, ширина дна более 2,0 м.	1,75
XII	„	Сухая каменная кладка, покрыта мхом и растительностью, дурно ремонтируемая, с илистым дном, шириною не более 1,5 м.	2,00
„	„	Земляной канал с довольно большою растительностью, ширина дна не более 1,50 м.	2,00
„	„	Земляной канал с большою растительностью, плохо ремонтируемый, дно илистое, ширина дна не более 1,5 м.	2,00

5) Формула *Линдлея* (из третьей группы). Как упомянуто выше в § 42, Линдлей при расчетах канализаций применяет формулу такого вида:

$$\frac{t}{\triangle} = Ri = b_1 V^2 = a \frac{V^m}{R^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (247),$$

где $m = 1{,}8$ и $n = 0{,}25$; коэффициент a равен:

при малых уклонах труб и каналов

для метров: $a = 0{,}0003$, для футов: $a = 0{,}000156$;

при значительных уклонах труб и каналов

для метров: $a = 0{,}00025$, для футов: $a = 0{,}00013$.

6) Формула *Гангилье-Куттера* (из четвертой группы). В настоящее время особенно употребительна формула, данная в 1869 г. швейцарскими инженерами Гангилье и Куттером на основании всех известных до того времени опытов и измерений (свыше 900) над движением воды в ручьях, реках и каналах, для которых расход Q, средняя скорость V, уклон i и шероховатость русла изменялись в очень широких пределах.

Так для р. Миссисипи расход был очень большой, уклон—чрезвычайно малый и русло земляное, а для горных ручьев — расход очень малый, уклон весьма значительный и русло с крупными камнями. По форм. Г.-Куттера основной коэффициент b_1 выражается так:

$$b_1 = \left[\frac{1 + \frac{cn}{\sqrt{R}}}{c + \frac{l}{n}}\right]^2.$$

Следовательно,

$$\frac{t}{\triangle} = Ri = b_1 V^2 = \left[\frac{1 + \frac{cn}{\sqrt{R}}}{c + \frac{l}{n}}\right]^2 V^2.$$

Отсюда:

$$V = C\sqrt{Ri} = \left(\frac{c + \frac{l}{n}}{1 + \frac{cn}{\sqrt{R}}}\right)\sqrt{Ri} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (248).$$

Здесь величина c равна:

$$c = a + \frac{m}{i}.$$

Количества a, m и l суть коэффициенты равные:

для метров: $a = 23$, $m = 0{,}00155$, $l = 1$;
„ футов: $a = 41{,}66$, $m = 0{,}00281$, $l = 1{,}811$;
„ саженей: $a = 15{,}746$, $m = 0{,}001062$, $l = 0{,}6846$.

Коэффициент n представляет коэфф. *шероховатости*, изменяющийся в пределах от 0,0085 до 0,06 в зависимости от обделки русла.

Все русла по степени шероховатости делятся на 8 следующих категорий.

Первая категория русел — очень гладких (из гладко строганных досок, поверхности цементные, шлифованные): $n = 0{,}0085 - 0{,}011$.

Вторая категория русел — с обделкою из досок или из очень хорошей кирпичной кладки: $n = 0{,}011 - 0{,}013$.

Третья категория русел — с тою же обделкою, но большей шероховатости: $n = 0{,}013 - 0{,}0215$.

Четвертая категория русел — с обделкою из тесовой или обыкновенной кирпичной кладки: $n = 0{,}012 - 0{,}020$.

Пятая категория русел — с обделкою из грубо-околотых камней: $n = 0{,}014 - 0{,}022$.

Шестая категория русел — земляных с булыжными откосами: $n = 0{,}018 - 0{,}030$.

Седьмая категория русел — земляных обыкновенных в каналах, ручьях и реках: $n = 0{,}020 - 0{,}040$.

Восьмая категория русел — с крупными камнями: $n = 0{,}020 - 0{,}060$.

Для русских рек часто принимают как среднее: $n = 0{,}025$ для главного русла и $n = 0{,}030$ для поймы; на эти цифры надо смотреть как на условные. Могут быть случаи, когда n значительно больше, напр., для р. Волги у г. Самары $n = 0{,}033$, а для р. Бузана (приток Волги у г. Астрахани) $n = 0{,}029$.

Пользование формулой Г. и Куттера при помощи чертежа. Так как эта формула применяется в технике весьма часто, то войдем в некоторые подробности, касающиеся графического употребления оной (черт. 195). В формуле (248) коэфф. C для мер в метрах можно получить следующим построением, которое может быть полезно во многих случаях. На прямоугольных осях XY нанесены: по оси X значения $\sqrt{R}$, а по оси Y — значения коэфф. C от 0 до 130. Затем через точку A на оси X, соответствующую $OA = \sqrt{R} = 1$, проведены прямые Aa, Ab, Ac..., которые назовем *линиями шероховатости;* они соответствуют значениям $n = 0{,}009$; $0{,}010$; $0{,}011$... $0{,}035$. Далее проведены кривые BB', CC', DD'... их будем называть *кривыми уклонов*; они соответствуют уклонам

$i=0{,}000025$; $0{,}000030$; $0{,}000040 \ldots 0{,}001$; ∞. По этому чертежу можно при помощи линейки найти коэфф. C по данным: гидравл. радиусу R, коэфф. шероховатости n и уклону i. Пусть, напр., даны: $R=0{,}64$ м.; $n=0{,}013$; $i=0{,}00004$. Требуется найти C и затем скорость V. Для этого нужно найти пересечение линии шероховатости для $n=0{,}013$ с кривой уклонов для $i=0{,}00004$; это будет точка a. Точку a соединяем с точкой K на оси X, соответствующей $\sqrt{R}=0{,}8$. Пересечение линии Ka с осью Y дает точку M; отрезок $OM=68$ есть искомый коэффициент C, по которому затем определим скорость V из формулы *Шези*; именно:

$$V=68\sqrt{Ri}=68\sqrt{0{,}64\cdot 0{,}00004}=0{,}344 \text{ м.}$$

Можно также легко найти или R, или i, или n, если все прочие элементы заданы.

Объясним построение линий шероховатости и кривых уклонов.

В форм. (248) коэфф. C равен:

$$C=\frac{\left(\frac{l}{n}+a+\frac{m}{i}\right)\sqrt{R}}{\left(a+\frac{m}{i}\right)n+\sqrt{R}}.$$

Положим:

$$C=y;\ \sqrt{R}=x;\ \frac{l}{n}+a+\frac{m}{i}=a_1;\ \left(a+\frac{m}{i}\right)n=b_1.$$

Тогда выражение для C можно представить в таком виде:

$$y=\frac{a_1 x}{b_1+x} \text{ или } xy-a_1x+b_1y=0.$$

Это уравнение гиперболы OH, проходящей через O; в ней абсциссы обозначают $\sqrt{R}$, а ординаты—коэфф. C. Полагая $x=x'+u$ и $y=y'+v$, приведем это уравнение к виду

$$x'y'=-a_1b_1,$$

при чем $u=-b_1$ и $v=a_1$. Теперь дадим оси Y' противоположное направление Y''; тогда имеем окончательно:

$$x'y'=a_1b_1.$$

Это, очевидно, уравнение гиперболы OH, отнесенное к ее ассимптотам X' и Y''. Новое начало есть точка a с координатами $-b_1$ и a_1; новые оси суть aX' и aY''.

Найдем построением точку a. По оси OX откладываем $OA=l=1$, и через точку A проводим линию Aa, которая с вертикалью соста

вляет угол ε, определяемый равенством $tg\varepsilon = n =$ коэффициенту шероховатости; для чертежа принято $n = 0{,}013$ и для метров: $l = 1$. Тогда $OB = \frac{l}{n}$. Далее откладываем по оси OY отрезки:

$$BD = a \quad \text{и} \quad DE = \frac{m}{i},$$

где для нашего случая $i = 0{,}00004$. Следовательно, $OE = a_1$. Пересечение линии EX' с линией AB дает искомую точку α, так как очевидно:

$$E\alpha = \left(a + \frac{m}{i}\right) n = b_1.$$

Итак, точка α найдена построением. Так как в гиперболе OH, отнесенной к осям OXY, абсциссы суть $\sqrt{R}$, а ординаты коэфф. C, то для $OK = \sqrt{R}$ получаем $KN = C$. Но не трудно показать, что искомое $KN = OM$. Действительно, продолжим ось X до пересечения с осью Y' и назовем точку их пересечения через Q; тогда из подобия $\triangle$-ков KOM и $KQ\alpha$ получаем:

$$OM : Q\alpha = OK : QK.$$

Отсюда:

$$OM = \frac{Q\alpha \cdot OK}{QK} = \frac{a_1 \sqrt{R}}{b_1 + \sqrt{R}} = \frac{\left(\frac{l}{n} + a + \frac{m}{i}\right)\sqrt{R}}{\left(a + \frac{m}{i}\right)n + \sqrt{R}} = C.$$

Что и требовалось доказать. Следовательно, если будем соединять точку α с различными точками K... на оси X, соответствующими заданным $\sqrt{R}$, то на оси Y получим соответственные отрезки, равные C. Все эти значения C будут отвечать одному и тому же коэффициенту шероховатости n и одному и тому же уклону i. Итак, когда определена точка α, то задача решается весьма просто.

Теперь положим, что n остается без перемены, а i изменяется.

Из предыдущего построения видно, что новая точка α_1 будет лежать попрежнему на линии $A\alpha$, соответствующей тому же n, т.-е. $n = 0{,}013$. Она получится, если от точки D отложим отрезок

$$DE' = \frac{m}{i_1},$$

где i_1 — новый уклон (для чертежа взят $i_1 = 0{,}000025$) и проведем через E' линию, параллельную OX. Очевидно, что для этого случая получится новая гипербола OH', не показанная на чертеже.

Таким образом для данного n, но для разных i, нужно уметь строить отрезки DE, DE'... Построение этих отрезков делается очень удобно помощью *вспомогательной гиперболы* RS, ассимптоты которой суть OY и линия DD', параллельная OX. Действительно, имеем:

$$DE = \frac{m}{i};$$

$$\text{примем } DE = y \quad \text{и} \quad i = x; \quad \text{тогда } y = \frac{m}{x},$$

а это представляет уравнение равносторонней гиперболы RS, отнесенное к ассимптотам DD' и DY. Отсюда видно, что если по оси DD' отложим данный уклон $i = Df$, то соответственная ордината гиперболы $fg = \frac{m}{i} = DE$.

Помощью указанных построений найдем на линии $A\alpha$ точки α, α_1... для разных уклонов, применяя вспомогательную гиперболу.

Если теперь задаться другим коэффициентом n_1, то нужно отложить при точке A новый угол ε_1, определяемый из равенства: $tg\varepsilon_1 = n_1$; тогда получим новую линию шероховатости $A\beta$ и новый отрезок $OB_1 = \frac{l}{n_1}$.

Откладывая затем вверх от B_1 отрезок $B_1D_1 = ED = a$, получим точку D_1, соответственную точке D. У этой точки D_1 построим ту же вспомогательную гиперболу RS; другими словами придется или опустить ее или поднять, оставляя ось Y без изменения.

Посредством гиперболы получим на линии $A\beta$ точки β, β_1... для разных уклонов. Отсюда становится понятным, почему все линии шероховатости проходят через точку A. Если точки, подобные α, β, лежащие на разных линиях шероховатости, соединить между собою, то получится кривая уклонов. Чертеж 195 годится только для мер в метрах; для других мер он подлежит изменениям. Из вышеизложенного видно, в чем должны заключаться эти изменения.

В формуле Г. и Куттера коэфф. C изменяется следующим образом он увеличивается: 1) с увеличением R — сильно при малых значениях R и слабее при больших R; 2) с уменьшением коэфф. n — сильно при малых значениях R и слабее при больших R; 3) с уменьшением уклона i при $R > 1$ м., и 4) с увеличением уклона i при $R < 1$ м. Все это можно проверить при помощи черт. 195.

Коэфф. C изменяется по форм. Г. и Куттера в пределах от 6,7 до 140,4, в противоположность предположению Шези, что коэфф. C постоянен и равен 50 (при метрах).

Примечание. Если уклон i не очень мал, напр. $i > 0{,}0005$, то в выражении для величины:

$$c = a + \frac{m}{i}$$

количество $\frac{m}{i}$ можно отбросить по его малости, и формула Г. и Куттера значительно упрощается, именно вместо форм. (248) будем иметь следующую:

$$V = \left[\frac{a + \frac{l}{n}}{1 + \frac{an}{\sqrt{R}}}\right]\sqrt{Ri} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (249),$$

где для метров: $a = 23$ и $l = 1$, а для футов: $a = 41{,}66$ и $l = 1{,}811$.

В таком виде формула Г. и Куттера часто применяется к расчету водостоков.

В следующей таблице XVI приведены значения коэфф. C в формуле Г. и Куттера для различных значений: гидравл. радиуса R, продольного уклона i и коэфф. шероховатости n.

7) Формулы *пятой* группы имеют постоянное значение для коэффициентов b_1 и C, а именно:

по *Шези*: $C = 50$ для метров; $C = 90{,}6$ для футов;

„ *Эйтельвейну* $C = 50{,}9$ для метров; $C = 92{,}2$ „

Постоянным значением для C можно пользоваться при вычислениях для того, чтобы получить первое приближенное решение задачи.

8) Заслуживают также внимания формулы *логарифмического вида*; по своему строению они относятся большею частью ко второй и четвертой группам формул и имеют следующий вид:

$$V = AR^m i^n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (250),$$

где A — численный коэффициент; m и n — дробные показатели степени. В нижеследующей таблице (XVII) приведены значения этих трех величин для некоторых более известных формул (для мер в метрах).

Таблица XVI

значений коэфф. C в формуле Шези; $V = C\sqrt{Ri} = \sqrt{\frac{1}{b_1}}\sqrt{Ri}$ при основном коэфф. b_1, взятом по формуле *I.* и *Куттера* (форм. 248).

(Для метрических мер).

Гидрав. рад. R м.	Коэфф. шероховатости.	Уклон i: 0,000025	0,00005	0,0001	0,0002	0,0004	0,001	0,01	Коэфф. шероховатости.	Уклон i: 0,000025	0,00005	0,0001	0,0002	0,0004	0,001	0,01
0,05	$n = 0,010$	38	44	51	54	56	57	58	$n = 0,013$	28	31	35	38	40	41	42
0,1		49	56	61	65	68	70	71		36	40	44	47	49	50	51
0,2		63	70	74	77	78	79	80		46	50	53	56	58	59	59
0,3		72	77	81	84	85	86	86		53	57	60	63	64	64	65
0,5		83	86	88	90	91	91	91		62	65	67	69	69	70	70
1,0		100	100	100	100	100	100	100		77	77	77	77	77	77	77
2,0		115	111	109	107	106	105	105		90	87	85	84	83	82	82
3,0		124	117	113	111	110	109	108		99	94	89	88	87	86	85
5,0		134	123	118	115	113	112	111		108	100	93	91	90	89	88
15,0		151	135	125	121	118	117	116		125	114	102	98	96	94	92
0,05	$n = 0,017$	19	22	24	26	28	29	29	$n = 0,020$	15	18	20	21	23	23	24
0,1		25	29	32	34	35	36	36		21	23	25	28	29	29	30
0,2		34	37	39	41	42	42	43		28	30	32	34	35	36	36
0,3		40	43	45	46	47	47	48		33	35	37	38	39	40	40
0,5		47	49	50	51	51	52	52		40	41	42	43	43	44	44
1,0		58	58	58	58	58	58	58		50	50	50	50	50	50	50
2,0		71	69	67	66	65	64	64		61	59	57	56	56	55	55
3,0		78	74	71	70	69	68	68		69	64	61	59	59	58	58
5,0		87	79	75	73	72	71	70		76	70	66	63	62	61	61
15,0		105	90	83	79	77	76	75		94	81	74	70	68	67	66
0,05	$n = 0,025$	12	13	15	16	17	18	18	$n = 0,030$	10	11	12	13	13	14	14
0,10		17	18	19	20	21	22	22		13	14	15	16	17	18	18
0,2		22	23	24	25	26	27	27		18	19	19	20	21	22	22
0,3		26	28	29	30	30	31	31		21	22	23	24	24	25	25
0,5		31	32	33	34	34	35	35		25	26	27	27	28	29	29
1,0		40	40	40	40	40	40	40		33	33	33	33	33	33	33
2,0		50	48	47	46	45	45	45		42	41	40	40	39	38	38
3,0		56	53	51	49	48	48	47		48	45	43	42	42	41	41
5,0		64	59	54	53	52	51	50		56	51	47	45	44	43	43
15,0		81	71	63	59	57	56	55		72	62	55	52	51	49	48
0,05	$n = 0,035$	8	9	9	10	10	11	11	$n = 0,040$	6	7	7	8	8	9	9
0,1		11	12	12	13	13	14	14		9	10	11	11	12	12	12
0,2		15	16	16	17	17	18	18		13	14	14	15	15	16	16
0,3		18	19	19	20	20	21	21		15	16	17	18	18	18	18
0,5		22	23	23	23	24	24	24		19	19	20	20	21	21	21
1,0		29	29	29	29	29	29	29		25	25	25	25	25	25	25
2,0		36	35	34	34	33	33	33		32	31	31	30	30	29	29
3,0		42	40	38	37	36	36	36		37	35	34	33	32	32	32
5,0		49	45	43	42	41	40	39		44	41	39	38	37	36	35
15,0		65	56	51	47	45	44	43		59	52	46	43	42	41	40

Таблица XVII.

Автор формулы.	A	m	n	Примечание.
Ф. Сен-Венана	60	$\frac{11}{21}=0{,}529$	$\frac{11}{21}=0{,}529$	Для рек и каналов.
„ Гагена 1-я форм. .	3,34	0,5	0,20	Для рек при $R>0{,}47$ м.
„ Гагена 2-ая форм. .	4,9	1	0,20	Для каналов при $R<0{,}47$ м.
„ Гумфрейса и Аббота (сокращенная) . . .	5—5,7	0,5	0,25	Для рек при малых R:A=5. Для рек при больших $R:A=5{,}7$.
„ Маннинга (сокращенная)	$\frac{1}{n}$	0,667	0,50	n — коэфф. шероховат. Г. и Куттера; 8 категорий.
„ Куннингама	43,7	0,667	0,50	Для широких каналов с малыми уклонами.
„ Борнеманна	256—1605	1,33	1,25	4 категории русел: каналы и реки.
„ Фтили и Стирнса .	80,69	0,62	0,50	Для каналов.
„ Гнусина	15,93	$\frac{4}{7}=0{,}591$	$^3/_8=0{,}375$	Для рек.
„ Гоклера 1-я форм. .	25—100	0,667	0,5	Для каналов; $i>0{,}0007$; 5 категорий.
„ Гоклера 2-я форм. .	1600—6560	1,333	1	Для каналов и рек $i<0{,}0007$; 6 категор.

Сравнение формул между собою и выбор формулы наиболее целесообразной для рассчетов сооружений. В § 42 было сделано сравнение формул разных авторов, данных ими для движения воды в трубах. По тому же способу можно было бы сделать сравнение и формул для движения воды в реках и каналах; но здесь задача является более сложной и потому более трудной, так как в этом случае приходится сравнивать результаты получаемые по формулам с результатами измерений на реках и каналах, находящихся в самых разнообразных условиях; для рек и каналов главные их элементы: расход, скорость, уклон и степень шероховатости изменяются в чрезвычайно широких пределах. Вот причина, почему одни формулы могут давать хорошие результаты для движения воды, напр., в каналах, и мало удовлетворительные — для рек; другие

формулы будут давать результаты согласные с измерениями — для рек при малых уклонах и больших расходах и в то же время по этим формулам получим мало удовлетворительные результаты для рек с большими уклонами и с малыми расходами. Вообще трудно ожидать, чтобы одна и та же формула давала результаты согласные с непосредственными измерениями во *всех* случаях движения воды в свободных руслах. Мы поступим целесообразнее, если из всего числа предложенных формул выберем формулы наиболее подходящие: отдельно для каналов больших или малых, отдельно для водостоков, отдельно для оросительных каналов и т. п. При этом нужно иметь в виду, что в каждом из этих случаев движение воды будут существовать еще разнообразные условия, а именно будет значительное различие в уклонах, расходах, в обделке русла и т. п.

Исходя из этих соображений, можно указать на следующие формулы, которые на практике будут давать хорошие результаты для тех случаев движения воды, для которых эти формулы главным образом и предназначались.

а) Для расчетов труб и коллекторов канализаций—формулы: Линдлея; Маннинга; Дарси-Базена; Базена; полная и сокращенная Г. и Куттера.

б) Для расчетов каналов при обычных условиях—формулы: Г и Куттера; Дарси-Базена; Базена; Гоклера; при больших размерах каналов в земляных руслах—формула Куннингама.

в) Для рек—формулы: Г. и Куттера; Дарси-Базена; Базена; Гнусина.

Из этого перечня формул видно, что не смотря на очень большое разнообразие в условиях движения воды в свободных руслах, три формулы, а именно: Г. и Куттера, Дарси-Базена и Базена могут применяться во всех случаях.

В нижеследующей таблице XVIII, заимствованной из сочинения *Rühlmann*'a: *„Hydromechanik"*, приведены результаты измерений на многих реках и каналах и показаны скорости, получающиеся по некоторым из вышеприведенных формул. Жирным шрифтом набраны числа отклоняющиеся не более как на 10% в ту или другую сторону от результата измерения. Из обозрения этой таблицы видно, что несмотря на большое разнообразие в условиях движения воды в этих реках и каналах результаты вычислений по формулам Г и Куттера, Дарси-Базена получаются в большинстве случаев хорошо согласующимися с измерениями, как для рек так и для каналов. Хорошие результаты получаются для каналов по форм. Гоклера.

Из таблицы видно, что пределы изменения для главных элементов следующие: для R — от 0,112 до 22,413 метр.; для i — от 0,00001389 до 0,1067; для V — от 0,137 до 6,43 метр.

Таблица XVIII

скоростей в некоторых реках и каналах по непосредственному измерению и по различным формулам (меры метрические).

Название реки или канала.	По измерению.			По формулам.						
	R.	*i.*	*V* м.	Г. и Куттера.	Дарси Базена.	Г. и Аббота.	Гагена.	Гоклера.	Гардера.	Ламейера.
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
РЕКИ.										
Plessur при Chur. . .	1,095	0,00965	4,25	**4,35**	**4,21**	1,75	1,38	3,39	—	8,84
Миссисипи при Columbus.	19.666	0,0000436	2,08	**2,07**	1,70	**2,10**	**1,99**	3.89	**2,01**	1,66
Рейн у Базеля. . . .	2,100	0,000926	1.94	**1,93**	**2,08**	1,41	**1,95**	1,62	—	2,86
» у Germersheim. .	3.308	0,000247	1,54	**1.65**	**1,46**	1,27	1,16	2,05	—	**1,60**
Сена в Париже. . . .	4,885	0,000172	1,43	1,27	**1,54**	**1,40**	1,03	2,37	**1,51**	1,63
Миссисипи при Carolton.	22,413	0,00000342	1,23	**1,21**	0,51	**1,31**	**1,27**	0,36	—	0,33
Эльба при Herrnskret.	2.086	0,000315	1,11	**1,19**	**1,21**	**1,03**	0,96	1,69	**1,20**	—
Нева.	10,796	0,00001389	0,98	**1,03**	0,69	0,83	**0.98**	0,79	—	0.52
Варта	2,210	0,000218	0,92	0,73	**0,85**	**0,98**	**0,92**	0,31	1,03	—
Рейн в Шпейере. . .	2,964	0,000112	0.89	**0,88**	**0,91**	**0.87**	**0,93**	**0,91**	**0,89**	**0,88**
Сена в Poissy	4,146	0,00005	0,72	**0,78**	**0.75**	0,95	0,94	**0,67**	**0,71**	0,64
Саона в Raconnay . .	4,825	0,00004	0,72	**0.76**	**0.74**	0.97	0,97	**0,78**	**0,73**	0,61
Одер.	2.393	0,00016	0,71	0,63	**0,76**	0.94	0,90	1,05	1,04	—
Невка	5,309	0,0000149	0,62	**0,62**	0,48	0,47	0,83	0,33	—	0,34
de Haine.	1,776	0,0000279	0,33	**0,32**	**0,32**	0,51	0,55	0,14	**0,32**	0,25
КАНАЛЫ.										
Канал из рез. Grosbois.	0,202	0,10076	6,43	**6,27**	**6,13**	1,26	0,95	**6,30**	5,63	13,68
Grünnbachschale . . .	0,197	0,106775	5,84	**5,74**	**6,21**	1,26	0,47	**5.86**	**5,73**	13,99
Канал из рез. Grosbois.	0,260	0,036856	4,59	**4,53**	**4,51**	1,11	0,88	**4,50**	—	8,28
Марсельский канал. .	0,188	0,06000	4,25	**4,24**	**4,49**	1,06	0,82	**4.26**	**4,18**	9,23
Отводный канал из бъефа	0,454	0,014221	3,43	**3,11**	4,17	1,16	0,96	**3,26**	**3,31**	6.36
Gontenbachschale . . .	0,112	0,046425	3,34	**3,18**	2,60	0,77	0,61	**3,27**	2,80	5,51
Канал Chazilly. . . .	0,234	0,008100	2,67	**2,68**	**2,77**	0,72	0,62	**2,70**	2,29	**2,81**
Опытный канал Базена	0,192	0,008163	2.61	**2,56**	**2,46**	0,66	0,56	**2,64**	—	1.15
Eschercanal	1,347	0,00300	2.55	**2,57**	**2,73**	1,44	1,21	2,15	—	4,66
Опытный канал Базена.	0,212	0,00506	2,46	**2,69**	**2,50**	0,61	0,53	**2,53**	1,98	1,92
Alpbachschale.	0,229	0,022920	2,43	**2,29**	3,23	0.93	0,75	**2,27**	2,88	5,54
Опытный канал Базена.	0,237	0,005025	2,05	**2,13**	**2,20**	0,65	0,56	**1,96**	1,68	0,96
Опытный канал Базена	0,315	0,001424	1,86	**1.83**	1,65	0,54	0,51	**1,75**	—	1,08
Simmencanal в Lenk .	0,403	0,01700	1,83	**1,86**	2,43	1,17	0,94	**1,92**	—	6,62
Опытный канал Базена	0,316	0,0013802	1,73	**1,63**	**1,63**	0,54	0,50	**1,69**	—	1,06
Опытный канал Базена	0,351	0,0015227	1,69	**1,67**	**1,53**	0,58	0,54	**1,65**	—	1,21
Канал в Grosbois . . .	0,543	0,000275	0,45	**0,46**	**0,40**	**0.47**	**0,48**	**0,43**	0,51	2,38
Канал du Jard. . . .	0,512	0,0000362	0,14	**0,14**	**0,14**	0,28	**0.14**	0,05	0,18	**0,13**

§ 58. Формы поперечных сечений каналов. Глубины соответствующие наибольшей скорости и наибольшему расходу.

1) Для каналов употребляются поперечные сечения различных форм или типов в зависимости от назначения канала, величины расхода, грунта и вообще местных условий. Напр. в водостоках употребляются сечения: круглые — при малых расходах и больших уклонах; яйцевидные или овоидальные — при больших расходах и малых уклонах; лотковые — для ливнетводов. Для подведения воды к гидравлическим машинам,—водяным колесам и тюрбинам устраиваются: земляные каналы трапецоидального сечения или деревянные каналы прямоугольного сечения, когда вода идет без напора; металлические и железобетонные трубы круглого сечения, если вода идет под напором. Для орошения и осушения применяются каналы: треугольные, прямоугольные и трапецоидальные — в зависимости от расхода, грунта и др. условий. Для судоходных каналов применяются сечения трапецоидальные. Для проведения ключевой воды без напора применяются каналы прямоугольного сечения, а при напоре — металлические трубы круглого сечения.

Все эти формы каналов можно подразделить на два следующие класса: *а*) сечения *открытые* — трапецоидальные, прямоугольные, треугольные и т. п., в которых глубина воды а следоват. и расход Q могут возрастать неопределенно; *б*) сечения *закрытые*—круглые, яйцевидные, лотковые и т. п.; в них глубина не может превзойти высоты сечения, а потому здесь расход при заданных ω и i не может быть больше определенной величины в предположении, что вода идет без напора.

Затем формы каналов можно подразделить еще на следующие виды: *а*) *простые* сечения — прямоугольные, трапецоидальные, круглые, треугольные и т. п.: для них элементы ω; χ а следоват. R суть непрерывные функции от глубины воды; *б*) *составные* сечения — двойное трапецоидальное, прямоугольное с лотком внизу, яйцевидное и др.; для этих сечений элементы ω; χ и R представляют для различных глубин h различные функции; напр. для h в пределах от 0 до h_1—это будут функции одного вида; для h от h_1 до h_2—функции другого вида и т. д.

2) Для закрытых сечений можно определить глубины воды h_1 и h_2, при которых получается наибольшая скорость V или наибольший расход Q. Покажем общий прием разыскания этих глубин, полагая, что уклон i—заданная величина и что коэф. C в формуле Шези выражается через функцию от R или другими словами, что основной коэф. b_1 выражается одной из формул второй группы, напр. форм., Дарси-Базена или Базена.

Пусть $mnq = \omega$—живое сечение канала (черт. 196); $mqn = \chi$—смачиваемый периметр; очевидно, что ω и χ суть функции глубины h; тогда

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{f(h)}{\varphi(h)} = F(h).$$

По форм. Шези имеем:

$$V = C\sqrt{Ri} = \Phi(R)\sqrt{Ri} = \Psi(R) = F_1(h).$$

Найдем, при какой глубине h_1 скорость V или $F_1(h)$ имеет *maximum*. Для этого нужно производную V по h приравнять нулю; получаем:

$$\frac{dV}{dh} = F_1'(h) = \Psi'(R)\frac{dR}{dh} = 0.$$

Отсюда выводим:

$$\frac{dR}{dh} = \frac{\chi\frac{d\omega}{dh} - \omega\frac{d\chi}{dh}}{\chi^2} = 0.$$

Следоват.

$$\chi\frac{d\omega}{dh} - \omega\frac{d\chi}{dh} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (251).$$

Из этого уравнения найдем глубину h_1 соответствующую *maximum*'у V. Отсюда видно, что положение горизонта воды mn для *maximum*'а V не зависит от C, а следоват. не зависит от шероховатости русла.

Определим глубину h_2 соответствующую *maximum*'у Q, полагая по предыдущему, что C представляется функцией от R.

Так как

$$Q = \omega V = \omega C\sqrt{Ri} = C\sqrt{\frac{\omega^3}{\chi}i} = f_1(h)$$

то

$$\frac{dQ}{dh} = C\sqrt{i}\left(\frac{\chi\cdot 3\omega^2\frac{d\omega}{dh} - \omega^3\frac{d\chi}{dh}}{2\sqrt{\frac{\omega^3}{\chi}}}\right) + \sqrt{\frac{\omega^3}{\chi}i}\cdot\frac{dC}{dR}\cdot\frac{dR}{dh} = 0.$$

Отсюда выводим:

$$\frac{3\chi\frac{d\omega}{dh} - \omega\frac{d\chi}{dh}}{\omega\frac{d\chi}{dh} - \chi\frac{d\omega}{dh}} = \frac{2R}{C}\cdot\frac{dC}{dR} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (252).$$

Если для коэф. C взять, напр., формулу Дарси-Базена, т.-е. принять

$$C = \sqrt{\frac{1}{b_1}} = \sqrt{\frac{1}{a + \frac{b}{R}}} = \sqrt{\frac{R}{b + aR}}$$

то

$$\frac{dC}{dR}=\frac{b}{2C(b+aR)^2} \text{ и } \frac{2R}{C}\cdot\frac{dC}{dR}=\frac{b}{b+aR}=\frac{b\chi}{b\chi+a\omega} \quad \ldots \ldots \ldots (a).$$

Подставим этот результат в предыдущее уравнение (252) и найдем из него искомую глубину h_2; очевидно она зависит от коэф. шероховатости a и b. Для первого приближения можно предположить, что C постоянное; тогда из уравн. (252) находим:

$$3\chi\cdot\frac{d\omega}{dh}-\omega\frac{d\chi}{dh}=0 \quad \ldots \ldots \ldots (253).$$

Из этого уравнения получим глубину h_2. Отсюда видно, что глубина соответствущая *maxim.* Q зависит от шероховатости стенок канала, и только как первое приближение можно считать ее постоянной, определяемой из уравнения (253).

Для *круглого* сечения имеем (черт. 197):

$$\omega=2 \text{ площ. } (ACD)=2(\text{сектор } AOC-\triangle AOD)=r^2(\alpha-\tfrac{1}{2}\operatorname{Sin}2\alpha)$$
$$\chi=\text{дуге } ACB=2r\alpha;\ \text{глубина } h=r(1-\operatorname{Cos}\alpha).$$

Далее переменную глубину h заменяем другой переменной, именно центральным углом α. Так как

$$\frac{d\omega}{d\alpha}=r^2(1-\operatorname{Cos}2\alpha);\ \frac{d\chi}{d\alpha}=2r$$

то уравн. (251) примет такой вид:

$$2r\alpha\cdot r^2(1-\operatorname{Cos}2\alpha)=2r^3(\alpha-\tfrac{1}{2}\operatorname{Sin}2\alpha)$$

откуда

$$tg\,2\alpha=2\alpha \quad \ldots \ldots \ldots (b).$$

Это трансцендентное уравнение удовлетворяется при $\alpha=0$ и при $\alpha=128^0\ 43'\ 35''$; очевидно, что *maximum*'у V соответствует второе значение. Итак угол при центре $2\alpha=257^0\ 27'\ 10'$.

Для этого значения угла находим: $\omega=2{,}734\ r^2$; $\chi=4{,}493\ r$;

$$R=\frac{\omega}{\chi}=\frac{r}{2}\left(1-\frac{1}{2\alpha}\operatorname{Sin}2\alpha)\right)=0{,}6086\ r.$$

Затем

$$maxim.\ V=C\sqrt{Ri}=0{,}7801\ C\sqrt{ri}.$$

Далее для этого же угла находим расход:

$$Q=\omega C\sqrt{Ri}=2{,}133\ C\sqrt{r^5i}.$$

Если рассматривать случай, когда вода идет *полным* сечением, то найдем, что

$$V = 0{,}707\, C\sqrt{ri}$$

т.-е. скорость менее на $9^0/_0$.

Глубина соответствующая наибольшей скорости равна

$$h_1 = 1{,}626\, r \backsim 1^5/_8\, r.$$

Следоват. высота сечения незаполненного водою равна $^3/_8\, r$.

Коэф. C можно взять по форм. Дарси-Базена или Базена для $R = 0{,}6086\, r$. Определим центральный угол, при котором получается наибольший расход, при чем предположим, что ищем первое приближение, т.-е. полагаем, что C = постоянному. Тогда надо пользоваться уравн. (253), из которого получаем:

$$3 \cdot 2r\alpha \cdot r^2 (1 - \mathrm{Cos}\, 2\alpha) = r^2 (\alpha - \tfrac{1}{2}\, \mathrm{Sin}\, 2\alpha) \cdot 2r.$$

Отсюда находим такое трансцендентное уравнение:

$$4\alpha + \mathrm{Sin}\, 2\alpha - 6\alpha\, \mathrm{Cos}\, 2\alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c).$$

Этому уравнению удовлетворяет угол $\alpha = 154^0\ 5'$; следоват. центральный угол соответствующий наибольшему расходу равен $308^0\ 10'$; для расчетов принимают обыкновенно этот угол равным 308^0.

Для этого значения угла получается: глубина воды $h_2 = 1{,}899\, r$; свободная высота сечения $= 0{,}101\, r$; $\chi = 5{,}377\, r$; $\omega = 3{,}082\, r^2$; $R = 0{,}573\, r$.

Скорость $V = 0{,}757\, C\sqrt{ri}$; *maxim.* $Q = 2{,}333\, C\sqrt{r^5 i}$.

При полном сечение $Q = 2{,}221\, C\sqrt{r^5 i}$, т.-е. на $5^0/_0$ меньше.

Коэф. C удобнее всего брать по форм. Дарси-Базена или Базена для $R = 0{,}573\, r$.

Для решения обоих вышеполученных трансцендентных уравнений можно воспользоваться следующим графическим приемом. Для решения уравн. (b) полагаем $x = 2\alpha$; $\mathrm{Sin}\, 2\alpha = y$; $\mathrm{Cos}\, 2\alpha = \sqrt{1 - y^2}$; тогда это уравнение принимает такой вид:

$$y = x\sqrt{1 - y^2} \quad \text{при чем:} \quad y = \mathrm{Sin}\, 2x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d).$$

Решение нашего трансцендентного уравнения найдем, если построим кривые представленные уравн. (d) и отыщем точки пересечения этих кривых. Первое из уравн. (d) дает:

$$y = \frac{x}{\pm\sqrt{1+x^2}}.$$

Давая здесь для x различные положительные значения, получим для каждого из них по 2 значения для y, по которым построим 2 кривые OA и OB (черт. 198), симметрично расположенные относительно оси X. Затем по второму из уравн. (d) построим синусоиду, для чего по оси абсцисс будем откладывать дробные части π: $\frac{1}{4}\pi$; $\frac{1}{2}\pi$... Абсциссы Ob; Oa... пересечений n; p... синусоиды с кривыми OA и OB будут решения рассматриваемого трансцендентного уравнения; вопросу будет отвечать одна из этих абсцисс, именно по чертежу имеем $x = Oa = 4{,}49$; это будет длина дуги соответствующая центральному углу 2α при радиусе $= 1$. Самый угол найдем из пропорции:

$$2\alpha^\circ : 360^\circ = 4{,}49 : 2\pi; \text{ откуда } 2\alpha^\circ = 360^\circ\left(\frac{4{,}49}{2\pi}\right) = 257^\circ\,27'\,10''.$$

Для решения второго трансцендентного уравнения (c) полагаем по предыдущему: $x = 2\alpha$; $\operatorname{Sin} 2\alpha = \operatorname{Sin} x = y$; $\operatorname{Cos} 2\alpha = \sqrt{1-y^2}$; тогда это уравнение перепишется так:

$$2x + y = 3x\sqrt{1-y^2} \text{ откуда } y = \frac{-2 \pm 3x\sqrt{1+5x^2}}{1+9x^2}.$$

Давая здесь для x различные значения: 0; 0,5; 1... найдем по два значения y; по этим величинам x и y построим две кривые OA и OB (черт. 199). Затем построим синусоиду по уравн. $y = \operatorname{Sin} x$. Пересечение этой синусоиды с предыдущими кривыми дает нам точки m, n, p... абсциссы которых Oc; Ob; Oa... удовлетворяют нашему уравнению; из них надо выбрать такое значение для x, которое меньше 2π и которое соответствует *maximum*'у; такое $x = Oa = 5{,}38$, что соответствует углу $2\alpha_2 = 308^0\ 10'$.

На черт. 199*a* показано изменение гидравлических элементов ω; Q и V для *круглого* сечения при различных степенях наполнения; С этою целью по оси ординат отложены глубины наполнения $0{,}1D$; $0{,}2D$ и т. д.; по оси абсцисс отложены соответственные значения ω в долях площади Ω всего сечения; затем по той же оси отложены значения скорости V и расхода Q в долях от скорости и расхода, соответствующих наполнению всего сечения.

В заключение приводим таблицу XIX, заимствованную из сечения *H. Smith:* Hydraulics, 1886, содержащую различные гидравлические элементы для *круглого* сечения канала при различных значениях центрального угла 2α от 0 до 360^0.

Таблица XIX

глубин воды h, ширины w по поверхности воды, площадей живого сечения ω, смачиваемых периметров χ, гидравлических радиусов R и расходов Q для различных центральных углов 2α *круглого* поперечного сечения.

Центр уг. 2α.	Глубина воды $h=\beta r$.	Ширина $w=\gamma r$.	Живое сечение $\omega=\delta r^2$	См. периметр $\chi=\varepsilon r$.	Гидравл. рад. $R=\mu r$.	Расход $Q=\lambda(C\sqrt{r^5 i})$.
Градусы.	β.	γ.	δ.	ε.	μ.	$\lambda=\delta\sqrt{\mu}$.
360	2,000	0	3,142	6,283	0,500	2,221
350	1,996	0,174	3,141	6,109	0,514	2,252
340	1,985	0,347	3,138	5,934	0,529	2,282
330	1,966	0,518	3,130	5,760	0,543	2,307
320	1,940	0,684	3,114	5,585	0,557	2,325
310	1,906	0,845	3,088	5,411	0,571	2,3332
308	1,899	0,877	3,082	5,376	0,573	2,3334
300	1,866	1,000	3,051	5,236	0,583	2,329
290	1,819	1,147	3,001	5,061	0,593	2,310
280	1,766	1,286	2,936	4,887	0,601	2,275
270	1,707	1,414	2,856	4,712	0,606	2,224
260	1,643	1,532	2,761	4,538	0,608	2,154
257	1,622	1,565	2,730	4,485	0,609	2,130
250	1,574	1,638	2,651	4,363	0,608	2,067
240	1,500	1,732	2,527	4,189	0,603	1,963
230	1,423	1,813	2,390	4,014	0,595	1,844
220	1,342	1,879	2,241	3,840	0,584	1,712
210	1,259	1,932	2,083	3,665	0,568	1,570
200	1,174	1,970	1,916	3,491	0,549	1,420
190	1,087	1,992	1,745	3,316	0,526	1,266
180	1,000	2,000	1,571	3,142	0,500	1,111
170	0,913	1,992	1,397	2,967	0,471	0,958
160	0,826	1,970	1,225	2,793	0,439	0,812
150	0,741	1,932	1,059	2,618	0,404	0,673
140	0,658	1,879	0,900	2,443	0,368	0,546
130	0,577	1,813	0,751	2,269	0,331	0,432
120	0,500	1,732	0,614	2,094	0,293	0,333
110	0,426	1,638	0,490	1,920	0,255	0,248
100	0,357	1,532	0,380	1,745	0,218	0,177
90	0,293	1,414	0,285	1,571	0,182	0,122
80	0,234	1,286	0,206	1,396	0,147	0,079
70	0,181	1,147	0,141	1,222	0,115	0,048
60	0,134	1,000	0,091	1,047	0,086	0,027
50	0,094	0,845	0,053	0,873	0,061	0,013
40	0,060	0,684	0,028	0,698	0,040	0,0055
30	0,034	0,518	0,012	0,524	0,022	0,0018
20	0,015	0,347	0,0035	0,349	0,010	0,00035
10	0,004	0,174	0,0004	0,175	0,0025	0,00002

§ 59. Расчет трапецоидальных, прямоугольных, треугольных и круглых сечений. Для этого расчета будем пользоваться формулой

$$Q = \omega V = C\omega \sqrt{Ri}$$

и для C будем брать формулы или Базена (245) или Г. и Куттера (248). Что касается типов или форм. поперечных сечений,то остановимся лишь на главнейших: трапецоидальном, прямоугольном, треугольном и круглом.

а) Для *трапецоидального* сечения (черт. 200) имеем: ширина канала по дну $= a$; глубина воды $= h$; углы составляемые откосами с горизонтом $= \delta$: тогда ширина канала на поверхности воды

$$b = a + 2h \ Cotg\,\delta; \text{ затем: } \omega = \tfrac{1}{2}(a + b)\,h = (a + h\,Cotg\,\delta)\,h;$$

$$\chi = a + \frac{2h}{\operatorname{Sin}\delta} = (a \operatorname{Sin}\delta + 2h)\frac{1}{\operatorname{Sin}\delta}; \ \ R = \frac{(a + h\,Cotg\,\delta)\,h\,.\operatorname{Sin}\delta}{a \operatorname{Sin}\delta + 2h}.$$

б) Для *прямоугольного* сечения получим выражения для ω; χ и R, полагая $a = b$ и угол $\delta = 90^0$ в предыдущих выражениях.

в) Для *треугольного* сечения получаем ω; χ и R, полагая в тех же выражениях $a = 0$.

г) Для *круглого* сечения (черт. 197) имеем:

$\omega = \frac{1}{2} r^2 (2\alpha - \operatorname{Sin} 2\alpha)$; $\chi = 2r\,\alpha$; глубина воды $h = r\,(1 - \operatorname{Cos}\alpha)$.

Переходим теперь к самому расчету. Пользуясь формулой *Базена* (245) для C, находим:

$$Q = C\omega\sqrt{Ri} = \frac{\omega R \sqrt{i}}{\alpha(\beta\sqrt{R} + \gamma)} = \frac{\omega^2\sqrt{i}}{\alpha(\beta\sqrt{\omega\,.\,\chi} + \gamma\chi)} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (a)$$

следоват.

$$Q\alpha(\beta\sqrt{\omega\chi} + \gamma\chi) = \omega^2\sqrt{i}$$

тогда

$$(\alpha\beta\, Q\sqrt{\omega\cdot\chi})^2 = (\omega^2\sqrt{i} - \alpha\gamma Q\chi)^2$$

отсюда окончательно:

$$(\alpha\beta Q)^2\,\omega\chi = \omega^4 i + (\alpha\gamma Q)^2\chi^2 - 2\alpha\gamma\,Q\omega^2\chi\sqrt{i} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (b).$$

Если пользоваться формулой *Г. и Куттера* (248) для C; то получим:

$$Q = C\omega\sqrt{Ri} = \frac{\left(c + \frac{l}{n}\right)\omega\sqrt{Ri}}{1 + \frac{cn}{\sqrt{R}}} = \frac{(cn + l)\,\omega R\sqrt{i}}{n(\sqrt{R} + cn)} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (c)$$

отсюда

$$(nQ)^2\,\omega\chi = [(cn + l)\,\omega^2\sqrt{i} - cn^2 Q\chi]^2$$

или окончательно:

$$(nQ)^2\,\omega\chi = (cn+l)^2\,\omega^4 i + (cn^2Q)^2\chi^2 - 2cn^2(cn+l)\,Q\omega^2\chi\sqrt{i}\quad . \; . \; . \; . \; (d)$$

В уравнения (b и d) входят следующие величины: при трапецоидальном сечении — Q; i; a; h и δ, из них угол δ обыкновенно задается; при круглом сечении — Q; i; r и α или h. Следоват. в том и другом случае 4 величины. Задачи решаемые помощью этих уравнений могут быть *двух* родов. К задачам *первого* рода относятся такие, в которых требуется найти расход Q или продольный уклон дна канала i при заданных размерах поперечного сечения. К задачам *второго* рода относятся задачи, в которых определяются собственно размеры поперечного сечения по заданному расходу Q и продольному уклону i. Рассмотрим отдельно те и другие задачи.

Задачи первого рода: Если ищут Q или i по всем прочим величинам данным, то из уравн. (a) находим неизвестную величину без всяких затруднений; это замечание справедливо для *всяких* сечений.

Численный пример 1. Определить расход Q для керамиковой трубы диаметром $D = 15$ д., при уклоне $i = 0{,}002$ и при наполнени до половины сечения. По своей шероховатости керамиковые трубы следует отнести ко *второй* категории при пользовании формулой Базена, а потому берем коэф. шероховасти $\gamma = 0{,}16$. Определяем ω; χ и R; имеем:

$$\omega = \frac{1}{8}\pi D^2;\; \chi = \frac{1}{2}\pi D;\; R = \frac{1}{4}D.$$

Тогда уравн. (a) дает для футов:

$$Q = \frac{\pi D^3\sqrt{i}}{32\alpha\left(\beta\sqrt{\frac{D}{4}}+\gamma\right)} = \frac{22.(1{,}25)^3\sqrt{0{,}002}}{7.32.0{,}0115\,(0{,}552\sqrt{0{,}3125}+0{,}16)} = 1{,}591 \text{ к. ф.}$$

Вычислим Q при помощи форм. Г и Куттера (c), принимая коэф. шероховатости $n = 0{,}012$. Из уравн. (c) имеем для футов:

$$Q = \frac{(cn+l)\,\omega R\sqrt{i}}{n(\sqrt{R}+cn)} = \frac{(c\,.\,0{,}012+1{,}811)\,22\,.\,(1{,}25)^3\sqrt{0{,}002}}{7\,.\,32\,.\,0{,}012\,(\sqrt{0{,}3125}+c\,.\,0{,}012)}$$

здесь:

$$c = a + \frac{m}{i} = 41{,}6 + \frac{0{,}00281}{i} = 41{,}6 + 1{,}405 = 43{,}005.$$

Следоват. $Q = 1{,}55$ к. ф. или на $2{,}7\%$ меньше предыдущего.

Скорость течения в трубе:

$$V = \frac{Q}{\omega} = \frac{1{,}591}{0{,}614} = 2{,}59 \text{ фут.}$$

Эта скорость вполне допустима для керамиковой трубы.

Численный пример 2. Определить продольный уклон i дна канала *трапецоидального* сечения, имеющего полуторные откосы (угол δ равен 33° 41′), ширину по дну $a = 3{,}5$ ф. и глубину 4 ф. Канал должен давать расход $Q = 30$ к. ф. Русло канала земляное, не допускающее скорости больше 1 ф. Для такого русла нужно брать коэффициенты шероховатости равными: в форм. Базена $\gamma = 1{,}30$ и в форм. Г. и Куттера $n = 0{,}025$.

Здесь:

$$\omega = (a + h\ \mathit{Cotg}\,\delta)\,h = (3{,}5 + 4 \cdot 1{,}5)\,4 = 38 \text{ кв. ф.}$$

скорость течения в канале $V = \frac{Q}{\omega} = \frac{30}{38} = 0{,}79$ ф., что меньше допускаемого. Затем имеем:

$$\chi = a + \frac{2h}{\operatorname{Sin}\delta} = 3{,}5 + \frac{2\,.\,4}{0{,}554} = 17{,}93 \text{ ф.};\ R = \frac{38}{17{,}93} = 2{,}63 \text{ ф.}$$

Если пользоваться формулой Базена, то из уравн. (a) находим:

$$\sqrt{i} = \frac{a(\beta\sqrt{R} + \gamma)\,Q}{\omega R} = \frac{0{,}0115\,(0{,}552\,\sqrt{2{,}63} + 1{,}30)\,30}{38\,.\,2{,}63} = 0{,}007569$$

следоват.

$$i = 0{,}0000573 = \frac{1}{17452}.$$

Если в этой задаче применять форм. Г. и Куттера, то полагая $i = y^2$, приведем вопрос к решению уравн. 5 степени; отсюда видно, что определение уклона удобнее делать помощью форм. Базена.

Задачи второго рода. Здесь необходимо знать наперед форму поперечного сечения. Разберем трапецоидальные и круглые сечения.

a) **Трапецоидальное сечение** (черт. 200). Выше были даны выражения для ω и χ для таких сечений; вставляя эти выражения в уравнения (b и d), получим уравнение 4 степени относительно a и 8 степени относительно глубины h, не приводящееся к низшим степеням; по этому численное решение этих уравнений по a или по h можно получить приемами высшей алгебры или постепенными приближениями. Последний способ скорее приводит к цели, так как нет надобности знать величины a или h с большою степенью точности в виду практической необходимости их округлять. При определении a или h помощью постепенных приближений можно с успехом пользоваться формулою *интерполирования* при *неравных промежутках* или же прибегнуть к графическому способу.

Для большее ясности положим, что требуется определить глубину h по всем прочим заданным величинам: a; δ; i; Q. Тогда поступаем так. Берем для h какое-либо произвольное численное значение h_1 (*первое*) и по нему вычисляем ω_1; χ_1; R_1 и затем Q_1; пусть вычисленное $Q_1 < Q$.

Затем берем *второе* значение для h напр. h_2, по которому вычисляем ω_2; χ_2; R_2 и Q_2; при этом пусть $Q_2 < Q$. Наконец берем произвольное *третье* значение h_3; вычисляем ω_3; χ_3; R_3 и Q_3; положим $Q_3 > Q$. Тогда можно получить достаточно точное значение для h по следующей формуле интерполирования при неравных промежутках:

$$h = \frac{(Q-Q_2)(Q-Q_3)}{(Q_1-Q_2)(Q_1-Q_3)}h_1 + \frac{(Q-Q_1)(Q-Q_3)}{(Q_2-Q_1)(Q_2-Q_3)}h_2 + \frac{(Q-Q_1)(Q-Q_2)}{(Q_3-Q_1)(Q_3-Q_2)}h_3 \ldots (e).$$

Здесь Q дано, а Q_1; Q_2; Q_3 — расходы вычисленные нами при глубинах h_1; h_2; h_3. Очевидно эта формула приводится к такому виду:

$$h = AQ^2 + BQ + C \ldots\ldots\ldots\ldots (f).$$

Следоват. при таком приближенном вычислении глубина и расход связаны параболическим законом. Можно было бы для еще большей точности задаться значениями h_4; h_5... и получить для них Q_4; Q_5...; тогда предыдущая формула заменяется другой, члены которой легко написать, так как закон составления коэффициентов при h_1; h_2... очевиден. В таком случае вместо квадратного уравнения (f) мы получили бы уравнение 3; 4... степени.

Во многих случаях практики можно для вычисления h по известным h_1; h_2; h_3... пользоваться следующим построением. По оси X откладываем значения h_1; h_2... а по оси Y соответственные значения Q_1; Q_2... Через полученные точки проводим кривую, которая будет представлять параболу, если возьмем для h *три* значения, и кривую высших степеней, если для h взять больше трех значений. Помощью проведенной кривой сейчас же находим из чертежа глубину h соответствующую заданному расходу Q. Этот прием дает результаты достаточно точные для практики и потому заслуживает полного внимания.

Численный пример 3. Определить глубину h воды в канале, имеющем *трапецоидальное* сечение при ширине по дну $a = 3$ м., при полуторных откосах (угол $\delta = 33° 41'$ и $\mathrm{Cotg}\, \delta = 1{,}5$) и при уклоне $i = 0{,}0025$; расход в канале $Q = 6{,}75$ к. м. Ложе канала не обделанное; грунт — плотная глина. По степени шероховатости канал нужно отнести к *пятой* категории, поэтому нужно взять в ф. Базена коэф. $\gamma = 1{,}30$. Для первого, а затем второго и наконец третьего приближений берем: $h_1 = 1{,}0$ м.; $h_2 = 1{,}1$ м.; $h_3 = 1{,}03$ м.; тогда получаем соответственно: $Q_1 = 6{,}27 < Q$; $Q_2 = 8{,}84 > Q$; $Q_3 = 6{,}65 < Q$. Результаты последовательных вычислений собраны в помещаемой здесь таблице XX. Последнее (четвертое) приближение определяем помощью форм. (e); именно находим:

$$h_4 = -0{,}214\, h_1 + 0{,}00853\, h_2 + 1{,}2055\, h_3 = 1{,}037 \text{ м.}$$

Таблица XX.

№	Вычисляемые количества.	Глубина воды в канале.			
		$h_1 = 1{,}0$ м.	$h_2 = 1{,}1$ м.	$h_3 = 1{,}03$ м.	$h_4 = 1{,}037$ м.
		Первое приближение.	Второе приближение.	Третье приближение.	Четвертое приближение.
1	$\omega = (a + h \operatorname{Cotg} \delta) h = (3 + 1{,}5\,h)\,h$	4,500 кв. м.	5,115	4,681	4,724
2	$\chi = a + \frac{2h}{\operatorname{Sin} \delta} = 3 + 3{,}6056\,h$	6,506 м.	6,966	6,714	6,739
3	$R = \frac{\omega}{\chi}$	0,681 м.	0,734	0,697	0,701
4	$R\omega \sqrt{i} = 0{,}05\,\omega R$	0,1532	0,2194	0,1632	0,1660
5	$\alpha(\beta\sqrt{R} + \gamma) = 0{,}0115(\sqrt{R} + 1{,}30)$ . . .	0,0244	0,0248	0,0246	0,0246
6	$Q = \frac{\omega R \sqrt{i}}{\alpha(\beta\sqrt{R} + \gamma)}$	6,27 кв. м.	8,84	6,65	6,75
7	$V = \frac{Q}{\omega}$	—	—	—	1,43 м.

По этой величине h_4 вычисляем ω; $\chi \ldots Q$, и так так получается здесь $Q = 6,75$ к. м., т. е. заданной величине, то принимаем, что искомая глубина $h = 1,037$ м. При этом средняя скорость $V = 1,43$ м., что возможно допустить для грунта из плотной глины.

Численный пример 4. Определить ширину a по дну *трапецоидального* канала, дающего расход $Q = 10,0$ к. м. при продольном уклоне $i = 0,0009$, при глубине воды $h = 1,25$ м,, при полуторных откосах (угол $\delta = 33° 41'$ и Cotg $\delta = 1,5$); грунт—обыкновенный песок; откосы без всякой обделки. По степени шероховатости канала относим к *пятой* категории, почему для вычислений принимаем в форм. Базена коэф. $\gamma = 1,30$. Для первого, второго и третьего приближений принимаем $a_1 = 3$ м.; $a_2 = 5$ м.; $a_3 = 5,7$ м. Тогда находим соответственно: $Q_1 = 5,86 < Q$; $Q_2 = 9,0 < Q$; $Q_3 = 10,13 > Q$. Результаты последовательных вычислений приведены в помещаемой здесь таблице XXI. Последнее (четвертое) приближение a_4 вычисляем, пользуясь форм. (e); только в ней нужно заменить h через a; тогда имеем:

$$a_4 = -0,0097\ a_1 + 0,1517\ a_2 + 0,858\ a_3 = 5,622 \text{ м.}$$

Таблица XXI.

№	Вычисляемые количества.	Ширина a по дну канала.			
		$a_1 = 3,0$ м.	$a_2 = 5,0$ м.	$a_3 = 5,7$ м.	$a_4 = 5,622$ м.
		1 приближение.	2 приближение.	3 приближение.	4 приближение.
1	$\omega = (a + h\ Cotg\delta)\ h = 1,25a + 2,344$ . . .	6,094 кв. м.	8,594	9,469	9,369
2	$\chi = a + \frac{2h}{Sin\,\delta} = a + 4,507$	7,507 м.	9,507	10,207	10,127
3	$R = \frac{\omega}{\chi}$	0,812 м.	0,904	0,928	0,925
4	$\omega R \sqrt{i} = 0,03\omega R$	0,1484	0,2331	0,2636	0,2601
5	$\alpha(\beta \sqrt{R} + \gamma) = 0,0115(\sqrt{R} + 1,3)$.	0,0253	0,0259	0,02602	0,02601
6	$Q = \frac{\omega R \sqrt{i}}{\alpha(\beta \sqrt{R} + \gamma)}$	5,86 куб. м.	9,0	10,13	10,0
7	$V = \frac{Q}{\omega}$	—	—	—	1,07 м.

По этой величине a_4 вычисляем расход, который оказывается равным заданному. Затем это значение необходимо округлить до ближайшего удобного размера. Для обыкновенного песка предельная средняя скорость равна 1,06 м.; в нашем случае получается $V = 1,07$ м., что возможно допустить.

б) Для *треугольного* поперечного сечения можно пользоваться теми же формулами, что и для трапецоидального, полагая в них ширину по дну канала $a = 0$. В этом случае:

$$\omega = h^2 \, Cotg \, \delta; \quad \chi = \frac{2h}{Sin \, \delta}; \quad R = \frac{1}{2} h \, Cos \, \delta.$$

Уравн. (b) будет 6-й степени относительно глубины h. Это уравнение решается помощью постепенных приближений также, как это было показано в двух последних численных примерах.

в) Для *прямоугольного* поперечного сечения нужно в формулах для трапецоидального сечения положить угол δ равным 90° и $a = b$. Тогда

$$\omega = ah; \quad \chi = a + 2h; \quad R = \frac{ah}{a + 2h}.$$

Уравн. (b) решается по a или по h помощью постепенных приближений, как это было раз'яснено выше.

г) Для *круглого* поперечного сечения были приведены выше выражения для живого сечения ω и для смачиваемого периметра χ, в зависимости от радиуса r и центрального угла 2α (черт. 197). Вставляя эти выражения в уравн. (b), увидим, что оно будет 6-й степени относительно r и трансцендентное относительно угла α. Решение этого уравнения по r производится по способу последовательных приближений, как это об'яснено выше.

Если угол α задан, то для определения r удобнее пользоваться вышеприведенной (стр. 344) таблицей гидравлических элементов для круглого сечения; подробности такого вычисления показаны в следующем численном примере.

Численный пример 5. Определить *диаметр* круглого кирпичного канала с тщательной расшивкой швов при условии, чтобы при наполнении канала на половину диаметра и при уклоне $i = 0,001$ расход Q равнялся 0,75 куб. м.

Искомый диаметр определим помощью данных приведенных в предыдущей таблице (XIX) для круглого сечения. Из этой таблицы имеем для наполнения сечения на половину, т.-е. при угле $2\alpha = 180°$:

$$R = 0,5r; \qquad Q = 1,111 \, C \sqrt{r^5 i}.$$

Здесь коэфф. C определится по форм. Базена, при чем шероховатость канала следует отнести ко 2-й категории, т.-е. принять коэфф. шероховатости $\gamma = 0,16$. Тогда

$$C = \frac{87\sqrt{R}}{\sqrt{R}+0,16}; \text{ следов., } Q = \frac{1.111.87\sqrt{R}\cdot\sqrt{r^5 i}}{\sqrt{R}+0,16} = 0,75.$$

Отсюда

$$\frac{r^3}{\sqrt{0,5}\sqrt{r}+0,16} = \frac{0,75}{1.111.87.\sqrt{0,5}\sqrt{0,001}} = 0,3473.$$

Помощью последовательных приближений находим:

при $r = 0,70$ м. левая часть равна $0,45 > 0,3473$.
„ $r = 0,62$ „ „ „ „ $0,33 < 0,3473$.
„ $r = 0,63$ „ „ „ „ $0,345 < 0,3473$.

Поэтому окончательно принимаем $r = 0,64$ м.

Скорость определим таким образом. Из предыдущей таблицы имеем: $\omega = 1,571 r^2 = 0,644$ м.² Тогда

$$V = \frac{Q}{\omega} = \frac{0,75}{0,644} = 1,16 \text{ м.},$$

что возможно допустить для кирпичного канала.

§ 60 Сечение канализационных каналов. Рассмотрим теперь некоторые из сечений каналов, применяемых в канализациях. При устройстве канализаций применяются каналы следующих сечений: круглые, овоидальные, полуэллиптические, подковообразные, лотковые и т. п. Каналы этих сечений могут применяться также и для других целей. Данные для расчета круглых сечений приведены уже выше. Теперь рассмотрим прочие сечения.

Овоидальное сечение. При употреблении круглого сечения и при малых глубинах живого сечения струя получается довольно широкой с малою скоростью, почему осадки из сточных вод не могут хорошо смываться водою. При применении овоидальных сечений получаются скорости при малых глубинах значительно больше. Так как высота овоидального канала получаетсл больше высоты соответственного круглого канала, то постройка овоидального канала вообще легче; проход по таким каналам для осмотра их также удобнее. Овоидальное сечение было впервые спроектировано английским инженером *Д. Филлипсом* в 1846 г. В технике известно несколько типов этих сечений; наиболее употребительный из них имеет следующее очертание (черт, 201): радиус полуциркульного верхнего свода $= r$; радиус боковых стен $= 3r$ и радиус лотка $= 0,5r$; высота всего сечения $H = 3r$. Если определить

следующие гидравлические элементы: глубину воды h; площадь живого сечения ω; смачиваемый периметр χ; гидравлический радиус R; скорость течения V и расход Q — для случаев: *а*) когда сечение наполнено до пят верхнего свода (глубина воды $h = \frac{2}{3} H$); *б*) когда вода идет полным сечением (глубина воды H); *в*) когда горизонт воды соответствует *maxim.* V и *г*) когда горизонт воды соответствует *maxim.* Q, то получим следующую таблицу XXII гидравлических элементов для обыкновенного овоидального сечения.

Таблица XXII.

Гидравлические элементы обыкновенного овоидального сечения.	Центральный угол $2\alpha =$			
	180°	$248\frac{1}{2}$° *maxim.* V.	$297\frac{1}{2}$° *maxim.* Q.	360°
Глубина воды h	$0{,}667\,H$	$0{,}854\,H$	$0{,}952\,H$	H
Площадь живого сечения ω	$3{,}023\,r^2$	$4{,}086\,r^2$	$4{,}493\,r^2$	$4{,}594\,r^2$
Смачиваемый периметр χ.	$4{,}788\,r$	$5{,}984\,r$	$6{,}841\,r$	$7{,}930\,r$
Гидравлический радиус R.	$0{,}631\,r$	$0{,}683\,r$	$0{,}657\,r$	$0{,}579\,r$
Скорость течения V . . .	$0{,}795C\sqrt{ri}$	$0{,}826C\sqrt{ri}$	$0{,}810C\sqrt{ri}$	$0{,}761C\sqrt{ri}$
Расход Q	$2{,}400C\sqrt{r^5i}$	$3{,}377C\sqrt{r^5i}$	$3{,}641C\sqrt{r^5i}$	$3{,}496C\sqrt{r^5i}$

Здесь коэфф. C в формуле Шези следует брать или по Г. Куттеру с коэфф. шероховатости $n = 0{,}013$, или по Базену с коэфф. шероховатости $\gamma = 0{,}16$. Относительно всех сечений для канализационных каналов следует сказать, что они закрыты сверху, а потому расход Q и скорость V получаются наибольшими не тогда, когда вода идет полным сечением, а при горизонте, который немного не доходит до самой верхней точки сечения. Следующая таблица XXIII гидравлических элементов для обыкновенного овоидального сечения может быть полезна при расчетах, когда горизонт воды лежит ниже пят верхнего свода.

Уширенное овоидальное сечение (черт. (202) имеет следующее очертание: радиус верхнего полуциркульного свода $= r$, радиусы боковых стен $= 1{,}5\,r$, радиус лотка $= 0{,}5r$, высота сечения $H = 2{,}367r$. Гидравлические элементы для этого сечения приведены в нижеследующей таблице XXIV.

Таблица XXIII.

Расстояние от пят свода вниз x.	Живое сечение ω.	Смачиваем. периметр χ.	Гидравлический радиус R.	Скорость V.	Расход Q.
0,00 r	3,023 r^2	,788 r	0,631 r	$0{,}795C\sqrt{ri}$	$2{,}400C\sqrt{r^5i}$
0,25 „	2,525 „	4,287 „	0,589 „	0,768 „	1,937 „
0,50 „	2,037 „	3,783 „	0,539 „	0,734 „	1,495 „
0,75 „	1,570 „	3,272 „	0,480 „	0,693 „	1,088 „
1,00 „	1,136 „	2,749 „	0,413 „	0,643 „	0,730 „
1,25 „	0,745 „	2,211 „	0,337 „	0,580 „	0,432 „
1,50 „	0,413 „	1,642 „	0,252 „	0,502 „	0,207 „
1,75 „	0,154 „	1,047 „	0,147 „	0,383 „	0,059 „

Таблица XXIV.

Гидравлические элементы уширенного овоидального сечения.	Центральный угол 2φ =			
	180°	256½° maxim. V.	306½° maxim. Q.	360°
Глубина воды h	0,577 H	0,839 H	0,954 H	H
Площадь живого сечения ω	2,054 r^2	3,200 r^2	3,560 r^2	3,625 r^2
Смачиваемый периметр χ.	3,665 r	4,997 r	5,874 r	6,507 r
Гидравлический радиус R.	0,560 r	0,640 r	0,606 r	0,532 r
Скорость течения V . . .	$0{,}748C\sqrt{ri}$	$0{,}800C\sqrt{ri}$	$0{,}778C\sqrt{ri}$	$0{,}730C\sqrt{ri}$
Расход Q	$1{,}534C\sqrt{r^5i}$	$2{,}561C\sqrt{r^5i}$	$2{,}771C\sqrt{r^5i}$	$2{,}645C\sqrt{r^5i}$

Лотковое сечение о 2-х центрах (черт. 203) состоит из верхнего полуциркульного свода радиуса r и нижнего свода, описанного радиусом $r' = r\sqrt{2} = 1{,}414\,r$, высота сечения $H = r' = 1{,}414\,r$, ширина сечения $b = 2r$. Применяется это сечение в канализациях преимущественно для ливнеотводов, т.-е. таких каналов, которые должны пропускать очень большие количества ливневой воды. Гидравлические элементы для этого сечения помещены в следующей таблице XXV.

Таблица XXV.

Гидравлические элементы лоткового сечения о 2-х центрах.	Центральный угол $2\alpha=$			
	180°	271° *maxim. V.*	314° *maxim. Q.*	360°
Глубина воды h	$0{,}293\,H$	$0{,}797\,H$	$0{,}944\,H$	H
Площадь живого сечения ω	$0{,}571\,r^2$	$1{,}865\,r^2$	$2{,}100\,r^2$	$2{,}142\,r^2$
Смачиваемый периметр χ.	$2{,}221\,r$	$3{,}810\,r$	$4{,}560\,r$	$5{,}363\,r$
Гидравлический радиус R	$0{,}257\,r$	$0{,}489\,r$	$0{,}460\,r$	$0{,}399\,r$
Скорость течения V . .	$0{,}507C\sqrt{ri}$	$0{,}700C\sqrt{ri}$	$0{,}680C\sqrt{ri}$	$0{,}632C\sqrt{ri}$
Расход Q	$0{,}383C\sqrt{r^5i}$	$0{,}955C\sqrt{r^5i}$	$0{,}983C\sqrt{r^5i}$	$0{,}925C\sqrt{r^5i}$

Лотковое сечение о 3-х центрах (черт. 204) имеет следующее очертание: радиус верхнего полуциркульного свода $=r$, радиус нижней лотковой части $=1{,}207\,r$, центр этой дуги лежит выше центра полуциркульного свода на расстоянии $=0{,}5\,r$, радиус боковых стен $=0{,}5r$, центры этих дуг лежат на одном уровне с пятами полуциркульного свода; высота сечения $H=1{,}707\,r$, ширина сечения $b=2r$. Каналы с такими сечениями применяются в канализации для ливнеотводов. Для этого сечения имеем следующую таблицу XXVI гидравлических элементов.

Таблица XXVI.

Гидравлические элементы лоткового сечения о 3-х центрах.	Центральный угол $2\alpha=$			
	180°	263° *maxim. V.*	$310\frac{1}{2}$° *maxim. Q.*	360°
Глубина наполнения h .	$0{,}414\,H$	$0{,}802\,H$	$0{,}946\,H$	H
Площадь живого сечения ω	$1{,}091\,r^2$	$2{,}313\,r^2$	$2{,}610\,r^2$	$2{,}662\,r^2$
Смачиваемый периметр χ.	$2{,}682\,r$	$4{,}133\,r$	$4{,}958\,r$	$5{,}823\,r$
Гидравлический радиус R	$0{,}407\,r$	$0{,}560\,r$	$0{,}526\,r$	$0{,}457\,r$
Скорость течения V . . .	$0{,}638C\sqrt{ri}$	$0{,}748C\sqrt{ri}$	$0{,}726C\sqrt{ri}$	$0{,}676C\sqrt{ri}$
Расход Q	$0{,}696C\sqrt{r^5i}$	$1{,}731C\sqrt{r^5i}$	$1{,}893C\sqrt{r^5i}$	$1{,}799C\sqrt{r^5i}$

Подковообразное сечение имеет несколько типов; наиболее простой тип был применен в канализации г. Бостона; он очерчивается следующим образом (черт. 205): радиус верхнего полуциркульного свода $= r$, радиус боковых стен $= 2r$, радиус лотка $= 2r$, высота всего сечения $H = 2r$, ширина сечения $b = 2r$. Также простой тип этих сечений получается следующим образом (черт. 206): радиус верхнего полуциркульного свода $= r$, высота боковых вертикальных стен $= \frac{1}{3} r$, радиус лотка $= 2r$. Каналы подковообразных сечений применяются для отвода очень больших количеств воды и очень распространены в канализациях городов С. Америки. Для подковообразного сечения по черт. 205, при наполнении *всего* сечения, получаются (таблица XXVII) следующие гидравлические элементы для сечений, имеющих горизонтальный диаметр сечения от 3 ф. до 13 ф. Для получения расхода Q нужно табличное число $\omega C \sqrt{R}$ умножить на $\sqrt{i}$. При этом была применена формула Г. и Куттера с коэфф. шероховатости $n = 0{,}013$. Меры в футах.

Таблица XXVII.

Горизонт. диаметр. футы.	Живое сечение ω.	Смачиваемый периметр χ.	Гидравлич. радиус R.	$\frac{Q}{\sqrt{i}} = \omega C\sqrt{R}$.	Горизонт. диаметр. футы.	Живое сечение ω.	Смачиваемый периметр χ.	Гидравлич. радиус R.	$\frac{Q}{\sqrt{i}} = \omega C\sqrt{R}$.
3,00	7,464	9,800	0,762	719,30	7,50	46,648	25,501	1,904	8330,44
3,25	8,759	10,617	0,825	893,51	8,00	53,075	26,134	2,031	9892,65
3,50	10,159	11,434	0,888	1092,27	8,50	59,917	27,768	2,158	11601,49
3,75	11,660	12,251	0,952	1311,91	9,00	67,173	29,401	2,285	13534,53
4,00	13,267	13,067	1,007	1559,31	9,50	74,844	31,035	2,412	15552,71
4,25	14,977	13,885	1,079	1834,44	10,00	82,930	32,668	2,536	17796,91
4,50	16,793	14,701	1,142	2131,35	10,50	91,430	34,301	2,665	20248,34
4,75	18,026	15,517	1,200	2453,57	11,00	100,345	35,935	2,793	22903,47
5,00	20,733	16,334	1,269	2834,06	11,50	109,675	37,568	2,920	25718,54
5,50	25,086	17,967	1,396	3655,92	12,00	119,419	39,202	3,046	28757,29
6,00	29,855	19,601	1,523	4612,35	12,50	129,578	40,835	3,174	32032,04
6,50	35,038	21,234	1,650	5699,92	13,00	140,152	42,468	3,301	35479,46
7,00	40,636	22,868	1,777	6944,26	—	—	—	—	—

Численный пример 1. Коллектор обыкновенного овоидального сечения (черт. 201) высотою $H=1{,}5$ м. уложен с уклоном $i=0{,}0005$: определить его *расход* при наполнении до пят верхнего свода.

Так как высота $H=3r$, то $r=0{,}5$ м.; при наполнении до пят свода, т.-е. на глубину $h={}^2/_3H=2r=1$ м. из вышеприведенной таблицы (стр. 353) имеем для расхода:

$$Q=2{,}4C\sqrt{r^5i}\,.$$

Коэфф. C определим по форм. Базена, полагая в ней коэфф. шероховатости $\gamma=0{,}16$. Так как гидравл. радиус

$$R=0{,}631r=0{,}316 \text{ м., то } C=\frac{87\sqrt{R}}{\sqrt{R}+0{,}16}=67{,}7.$$

Следовательно,

$$Q=2{,}4\,.\,67{,}7\sqrt{r^5\,.\,i}=0{,}6414 \text{ куб. м.}$$

Скорость найдем при помощи той же таблицы:

$$V=0{,}795C\sqrt{ri}=0{,}85 \text{ м.}$$

Численный пример 2. Определить *размеры* коллектора обыкновенного овоидального сечения для расхода $Q=0{,}75$ к. м. и для уклона $i=0{,}0006$, при наполнении коллектора до пят верхнего свода. Из таблицы гидравлических элементов (стр. 353) для этого сечения имеем:

$$Q=2{,}4C\sqrt{r^5i} \quad \text{и} \quad R=0{,}631r.$$

По формуле Базена при коэфф. $\gamma=0{,}16$ получается:

$$C=\frac{87\sqrt{R}}{\sqrt{R}+0{,}16}=\frac{87\,.\sqrt{0{,}631}\sqrt{r}}{\sqrt{0{,}631}\sqrt{r}+0{,}16}.$$

Вставляя это значение в выражение для Q, получаем для $Q=0{,}75$ к. м.

$$\frac{r^3}{\sqrt{0{,}631}\sqrt{r}+0{,}16}=0{,}1844.$$

Так как это уравнение получается высокой степени относительно r, то решаем его помощью последовательных приближений.

При $r=0{,}50$ левая часть равенства равна $0{,}172<0{,}184$,

„ $r=0{,}52$ „ „ „ „ $0{,}198>0{,}184$.

Очевидно, нужно принять $r=0{,}51$ м.; тогда высота сечения $H=3r=1{,}53$ м.; ширина сечения $b=2r=1{,}02$ м.

Численный пример 3. Определить *уклон* коллектора обыкновенного овоидального сечения, для которого $r=0{,}75$ м. Расход коллектора $Q=1{,}25$ м.³ и наполнение до пят верхнего свода.

Определяем сперва коэфф. C, принимая $\gamma = 0{,}16$ и, пользуясь приведенной на стр. 353 таблицей значений C для $R = 0{,}631r = 0{,}473$ м., получаем $C = 70{,}5$. Затем из таблицы гидравлических элементов для данного сечения имеем:

$$Q = 2{,}4C\sqrt{r^5 i}.$$

Отсюда выводим:

$$i = \left(\frac{Q}{2{,}4C}\right)^2 \frac{1}{r^5} = \left(\frac{1{,}25}{2{,}4\,.\,70{,}5}\right)^2 \frac{1}{(0{,}75)^5} = 0{,}00023 = \frac{1}{4346}\,.$$

Численный пример 4. Определить *размеры* лоткового сечения (черт. 204) для расхода $Q = 1{,}5$ к. м. и для уклона $i = 0{,}001$, принимая наполнение, соответствующее наибольшему расходу, т.-е. принимая глубину $h = 0{,}946H$.

По таблице гидравлических элементов для этого лоткового сечения (стр. 355) получаем:

$$R = 0{,}526r, \quad Q = 1{,}893C\sqrt{r^5 i}.$$

Коэфф. C определяем по форм. Базена при коэфф. $\gamma = 0{,}16$; получаем:

$$C = \frac{87\sqrt{R}}{\sqrt{R} + \gamma} = \frac{87\sqrt{0{,}526}\sqrt{r}}{\sqrt{0{,}526}\sqrt{r} + \gamma}\,.$$

Вставляя это значение в выражение для Q и полагая $Q = 1{,}5$ к. м. выводим окончательно:

$$\frac{r^3}{\sqrt{0{,}526}\sqrt{r} + \gamma} = 0{,}397\,.$$

Решаем это уравнение помощью последовательных приближений.

При $r = 0{,}6$ левая часть равенства равна $0{,}300 < 0{,}397$,
„ $r = 0{,}64$ „ „ „ „ $0{,}354 < 0{,}397$,
„ $r = 0{,}67$ „ „ „ „ $0{,}399 > 0{,}397$.

Принимаем окончательно $r = 0{,}67$ м.

Общий способ определения положения того горизонта воды в канализационных каналах, который соответствует наибольшей скорости или наибольшему расходу. При устройстве водостоков употребляются для коллекторов и вообще для каналов больших размеров, как упомянуто выше, сечения: овидальные обыкновенное и уширенное, полуэллиптическое, подковообразное, лотковое и т. п. Верхняя часть этих сечений полукруглая. Для всех этих сечений можно дать общий способ определения положения горизонта воды, при котором в них получается *maxim.* V и *maxim.* Q.

Рассмотрим, напр., овоидальное сечение (черт. 207); в нем верхняя часть представляет полуокружность *adc*. Если глубина воды изменяется от 0 до *bO*, то V и Q возрастают, так как гидравлический радиус R увеличивается. При дальнейшем увеличении глубины гидравлический радиус R сперва увеличивается, а потом уменьшается, переходя через *maximum*; поэтому V и Q переходят также через *maximum*, первое при глубине *be*, а второе при глубине *bf*. Это положение справедливо для всяких закрытых сечений каналов, в которых поверхность воды уменьшается постепенно до нуля при увеличении глубины воды; таковы сечения: круглые, овоидальные и т. п.

Возьмем любой горизонт воды *mn* выше диаметра *ac*; этому горизонту соответствует центральный угол $mOn = 2\delta$. Найдем выражения для живого сечения $\omega = mbnm$ и для смачиваемого периметра $\chi = mbn$, соответствующих этому горизонту. Обозначим площадь $abca = \omega_0$ и смачиваемый периметр $abc = \chi_0$; тогда

$$\omega = \omega_0 + \frac{\pi r^2}{2} - \frac{r^2}{2}(2\delta - \text{Sin}\, 2\delta),$$

$$\chi = \chi_0 + \pi r - 2r\delta.$$

Как известно из изложенного в § 58, наибольшая скорость V соответствует центральному углу 2δ, который определится из равенства:

$$\chi \frac{d\omega}{d\delta} = \omega \frac{d\chi}{d\delta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (a).$$

В нашем случае имеем:

$$\frac{d\omega}{d\delta} = r^2(\text{Cos}\, 2\delta - 1); \qquad \frac{d\chi}{d\delta} = -2r.$$

Подставляя в уравн. (a) полученные значения, находим:

$$(\chi_0 r + \pi r^2 - 2r^2\delta)\,\text{Cos}\, 2\delta = r\chi_0 - 2\omega_0 - r^2\,\text{Sin}\, 2\delta.$$

Если обозначить для краткости

$$\chi_0 r + \pi r^2 = m; \qquad r\chi_0 - 2\omega_0 = n,$$

то предыдущее равенство можно переписать так:

$$(m - 2r^2\delta)\,\text{Cos}\, 2\delta = n - r^2\,\text{Sin}\, 2\delta \quad \ldots \ldots \ldots (b).$$

Если применить это уравнение для обыкновенного овоидального сечения, то получим для него:

$$\omega_0 = 3{,}023r^2; \quad \chi_0 = 4{,}788r; \quad m = 7{,}930r^2; \quad n = -1{,}258r^2.$$

Тогда уравнение примет такой вид:

$$(7{,}930 - 2\delta)\,\text{Cos}\, 2\delta = -(1{,}258 + \text{Sin}\, 2\delta).$$

Это трансцендентное уравнение можно решить по способу последовательных приближений или графическим путем. По первому способу найдем довольно точно, что $2\delta = 111^\circ 30'$. Действительно будем иметь:

$$2\delta = 1{,}946; \quad \mathrm{Sin}\, 2\delta = 0{,}9304; \quad \mathrm{Cos}\, 2\delta = -0{,}3665.$$

Тогда левая часть последнего равенства равна $-2{,}1887$, а правая часть равна $-2{,}1884$. Итак, взятое значение для угла 2δ можно считать верным; тогда угол 2α дополнительный до 360° равен $248^\circ 30'$; эта величина для 2α и приводится обычно в руководствах. Для решения уравн. (b) графическим путем полагаем:

$$2\delta = x; \qquad \mathrm{Sin}\, 2\delta = \mathrm{Sin}\, x = y; \qquad \mathrm{Cos}\, 2\delta = \sqrt{1-y^2}.$$

Тогда уравн. (b) дает такой результат:

$$x = \frac{1}{r^2}\left(m + \frac{r^2 y - n}{\pm\sqrt{1-y^2}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (c).$$

Давая здесь различные значения для y, получим по два значения для x, по которым построим две кривых A и B (черт. 208); затем по уравн. $y = \mathrm{Sin}\, x$ строим синусоиду; абсциссы Oa, Ob, Oc, Od... точек m, n, p, q... пересечения ее с найденными кривыми дадут $x = 2\delta$, удовлетворяющие уравн. (b); для нашей задачи годятся только решения $x < \pi$ и $y < 1$; именно $x = Ob = 1{,}95$, что очень близко к $x = 1{,}946$, полученному вычислением.

Для определения угла 2δ, соответствующего *maximum*'у Q, нужно, как известно, воспользоваться уравнением, полученным в предположении, что $C =$ постоянно:

$$3\chi \cdot \frac{d\omega}{d\delta} = \omega \cdot \frac{d\chi}{d\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (d).$$

После подстановки сюда вышенайденных значений для χ, ω и их производных, получаем:

$$3(m - 2r^2\delta)\,\mathrm{Cos}\, 2\delta = p - r^2(4\delta + \mathrm{Sin}\, 2\delta) \quad \ldots\ldots (e),$$

где m имеет прежнее значение, а $p = 3\chi_0 r - 2\omega_0 + 2\pi r^2$.

Если рассматривать обыкновенное овоидальное сечение, то $p = 14{,}601$, а предыдущее уравнение примет такой вид:

$$3(7{,}930 - 2\delta)\,\mathrm{Cos}\, 2\delta = 14{,}601 - (4\delta + \mathrm{Sin}\, 2\delta) \quad \ldots\ldots (f).$$

Это уравнение решается так же, как и вышерассмотренное.

Решая его путем последовательных приближений, получаем, что угол $2\delta = 56^\circ 30'$. При этом значении левая часть предыдущего равенства равна 11,83, а правая $= 11{,}84$. Угол 2α дополнительный до

360° равен 303°30′; в руководствах обыкновенно приводится величина 297°30′. Это различие в результатах получилось оттого, что при наших вычислениях была принята форм. (253), выведенная в предположении, что коэфф. C постоянный, тогда как в действительности он переменный, и для вычисления угла 2δ нужно пользоваться формулой (252). Поэтому на полученное значение угла 2δ нужно смотреть как на первое приближение. Вообще, как это указано в § 58, угол 2δ, соответствующий *maxim.* Q, зависит от коэфф. шероховатости. Наоборот, угол 2δ, соответствующий *maxim.* V, не зависит от этого коэффициента.

Полученное уравнение (e) можно решить также графически, полагая:

$$2\delta = x, \qquad \operatorname{Sin} 2\delta = \operatorname{Sin} x = y, \qquad \operatorname{Cos} 2\delta = \operatorname{Cos} x = \sqrt{1 - y^2}.$$

Тогда получаем:

$$3(m - r^2 x)\sqrt{1 - y^2} = p - r^2(2x + y).$$

Возвышая обе части равенства в квадрат, получим квадратное уравнение по x и по y; решив его по одной из этих переменных, можем построить кривые, соответствующие данному уравнению. А построив затем синусоиду $y = \operatorname{Sin} x$, найдем пересечение ее с полученными кривыми; одно из этих пересечений даст x, удовлетворяющее данному уравн. (f). Подобным же образом можем найти углы, соответствующие *maxim.* V и *maxim.* Q для других сечений каналов.

Примечание. Большинство таблиц приведенных в этом § взято из сочинения: *L. Metcalf* and *H. Eddy*. American Sewerage Practice. 2 vol. 1914.

§ 61. Определение расхода в трапецоидальном составном сечении и в реке с широкой поймой. Рассмотрим трапецоидальное составное сечение (черт. 209); оно состоит из *нижней* трапеции с параллельными сторонами a и b, высотою h и с откосами, составляющими угол δ с горизонтом, и из *верхней* трапеции с параллельными сторонами a_1 и b_1, высотою h_1 и с такими же откосами. При расчете такого сечения следует иметь в виду, как это было упомянуто выше, что движение воды в среднем живом сечении *mnpqrs* существенно разнится от движения воды в двух боковых сечениях; скорость в средней части значительно больше, и продольные сечения *rs* и *pq* являются границами, отделяющими средний поток от боковых потоков; вдоль этих сечений проявляется значительное трение между средней массой воды и двумя боковыми. В виду этого, принимая площадь *mnpqrs* за живое

сечение среднего потока, следовало бы считать смачиваемый периметр равным обводу *rsmnpq*, но так как трение по сечениям *rs* и *pq* двух масс воды по своему характеру еще не изучено и потому нам неизвестно, то обыкновенно за смачиваемый периметр среднего живого сечения *rsmnpq* принимают только обвод *smnp*. Для пояснения сказанного приводим расчет составного трапецоидального сечения, предложенного *Прони* при составлении им проекта осушения Понтийских болот, вблизи Рима (черт. 210).

За основную величину взята высота e нижней трапеции *usml*: ширина $sm = b = 4{,}5e$; ширина $al = B = 7{,}5e$; откосы имеют горизонтальную проекцию $1{,}5e$. Высота верхней трапеции равна e; стороны $kl = uv = 6e$; откосы такие же, как и в нижней трапеции.

По этим размерам определим площади $\omega_1 = (lusmln)$ и $\omega_2 = (nlki) + (wvut)$; имеем:

$$\omega_1 = \tfrac{1}{2}(B + b)e = 6e^2; \qquad \omega_2 = \tfrac{1}{2}(12e + 15e)\,e = 13{,}5e^2.$$

Смачиваемый периметр для нижней трапеции: $\chi_1 = 4{,}5e + 2 \cdot 1{,}80e = 8{,}10e$; смачиваемый периметр для верхней трапеции: $\chi_2 = 12e + 2 \cdot 1{,}80e = 15{,}6e$.

Гидравлические радиусы для них равны

$$R_1 = \frac{\omega_1}{\chi_1} = 1{,}667e; \qquad R_2 = \frac{\omega_2}{\chi_2} = 0{,}865e.$$

По этим гидравлическим элементам определяем скорости; для коэфф. C берем формулу Базена; по степени шероховатости относим этот канал к четвертой категории, а потому берем коэфф. $\gamma = 0{,}85$. Тогда получаем для нижней трапеции:

$$V_1 = \frac{87 R_1 \sqrt{i}}{\sqrt{R_1} + \gamma} = \frac{87 \,.\, 1{,}667e \sqrt{i}}{\sqrt{1{,}667e} + 0{,}85} = \frac{145e \sqrt{i}}{1{,}29 \sqrt{e} + 0{,}85}\,.$$

Также для верхней трапеции:

$$V_2 = \frac{87 R_2 \sqrt{i}}{\sqrt{R_2} + \gamma} = \frac{75{,}25e \sqrt{i}}{0{,}93 \sqrt{e} + 0{,}85}\,.$$

Тогда для расходов в этих трапециях будем иметь выражения:

$$Q_1 = \omega_1 V_1 = \frac{145e \sqrt{i}}{1{,}29 \sqrt{e} + 0{,}85} \cdot 6e^2; \quad Q_2 = \omega_2 V_2 = \frac{75{,}25e \sqrt{i}}{0{,}93 \sqrt{e} + 0{,}85} \,.\, 13{,}5e^2.$$

Следовательно, расход для всего канала будет равен:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{870e^3 \sqrt{i}}{1{,}29 \sqrt{e} + 0{,}85} + \frac{1015{,}9e^3 \sqrt{i}}{0{,}93 \sqrt{e} + 0{,}85} \;.\;.\;.\;.\;. \quad (a).$$

По заданным расходу Q канала и по уклону дна его i определим из этого уравнения e, а затем и все прочие размеры сечения канала.

Положим, что даны: $Q = 25$ куб. м. и $i = 0{,}0005187$.

Подставляя это значение i в уравн. (a), приводим его к такому виду:

$$Q = \left[\frac{19{,}82}{1{,}29\sqrt{e} + 0{,}85} + \frac{23{,}14}{0{,}93\sqrt{e} + 0{,}85}\right] e^3 = 25.$$

Так как это уравнение высокой степени по e, то решаем его помощью последовательных приближений.

При $e = 0{,}952$ левая часть равенства равна $19{,}18 < 25$,

„ $e = 1{,}05$ „ „ „ „ $25{,}42 > 25$.

Полученный расход 25,42 к. м. довольно близок к заданному и при том больше заданного, то окончательно принимаем $e = 1{,}05$ м.

Если при решении этой задачи для определения коэфф. C воспользоваться форм. Г. и Куттера с коэфф. шероховатости $n = 0{,}025$, то получим $e = 0{,}952$ м., как это выводится в сочинении: *Ruhlmann*, Hydromechanik, откуда заимствован этот пример.

Найдем скорость для средней части канала и для боковых частей; получаем:

$$V_1 = \frac{145 e\sqrt{i}}{1{,}29\sqrt{e} + 0{,}85} = 3{,}47 \text{ м.}$$

$$V_2 = \frac{75{,}25 e\sqrt{i}}{0{,}93\sqrt{e} + 0{,}85} = 1{,}80 \text{ м.}$$

Итак, скорость в средней части почти в 2 раза больше, чем в боковых.

Грасхоф рассматривает трапецоидальное составное сечение следующих размеров: высота средней трапеции $= 1{,}5$ м., высота верхней трапеции $= 0{,}3$ м.; $b = 8$ м.; $kl = 10$ м.; откосы трех-четвертные; по этим данным и по уклону $i = 0{,}0005$ он определяет сперва частичные расходы, а затем расход для всего канала. Результаты вычислений следующие.

Для средней части: $\omega_1 = 18{,}6$ м.^{2}; $\chi_1 = 13{,}0$ м.; $R_1 = 1{,}431$ м.

„ остальной „ $\omega_2 = 6{,}12$ м.^{2}; $\chi_2 = 21{,}0$ м.; $R_2 = 0{,}291$ м.

При пользовании форм. Г. и Куттера с коэфф. шероховатости $n = 0{,}025$ находим:

$$V_1 = 1{,}144 \text{ м.};\quad Q_1 = 21{,}28 \text{ к. м.};\quad V_2 = 0{,}361 \text{ м.};\quad Q_2 = 2{,}21 \text{ к. м.}$$

Следовательно, $Q = 23{,}49$ к. м. В этом примере скорость в средней части в 3 раза больше, чем в боковых. Если определять скорость и

расход без разделения сечения на части, как показано выше, то мы найдем: $\omega = \omega_1 + \omega_2 = 24{,}72$ м.^{2}; $\chi = \chi_1 + \chi_2 = 34{,}0$ м.; $R = 0{,}727$ м.

Тогда скорость $V = 0{,}714$ м. и расход $Q = 17{,}66$ к. м., что меньше вышеисчисленного на 25%.

Определение расхода в реке с широкой поймой. На основании только что изложенных соображений, расход в реке, имеющей более или менее широкую пойму (черт. 211), нужно определять приемом, показанным выше, т.-е. определять расход отдельно для реки и отдельно для поймы; сумма этих двух расходов дает расход в реке при разливе по пойме.

Бресс, цитируя Беланже, приводит следующий пример подобного определения расхода при таких размерах живого сечения реки: в главном русле ширина по дну $b = 10$ м.; ширина по верху $B = 14$ м.; глубина $e = 1{,}6$ м.: профиль поймы имеет приблизительно вид равнобедренного треугольника; ширина разлива 30 м., глубина 0,35 м.; глубина на границе между поймой и рекой $ab = 0{,}1$ м.

По этим данным находим: для главного русла $abcde$ площадь живого сечения $\omega_1 = 19{,}30$ м.^{2}; $\chi_1 = 15{,}16$ м.; $R_1 = 1{,}273$ м.; для поймы $abgf$ те же элементы: $\omega_2 = 5{,}25$ м.^{2}; $\chi_2 = 30{,}10$ м.; $R_2 = 0{,}174$ м.

Уклон реки при разливе равен $i = 0{,}0005$. При пользовании форм. Г. и Куттера с коэфф. шероховатости для реки $n = 0{,}025$ и для поймы $n = 0{,}030$ вычисляем коэфф. C и находим: для главного русла $C_1 = 41$ и для поймы $C_2 = 19$. Тогда имеем:

скорость в главном русле: $V_1 = C_1\sqrt{R_1 i} = 41\sqrt{1{,}273 \cdot 0{,}0005} = 1{,}033$ м.;

скорость на пойме: $V_2 = C_2\sqrt{R_2 i} = 19\sqrt{0{,}174 \cdot 0{,}0005} = 0{,}176$ м.

В этом случае скорость в реке в 6 раз больше, чем на пойме.

Теперь находим: расход в главном русле $Q_1 = \omega_1 V_1 = 19{,}830$ м.^{3}; расход на пойме $Q_2 = \omega_2 V_2 = 0{,}924$ м.^{3}. Полный расход $Q = 20{,}754$ м.^{3}

Если определять расход, не отделяя главного русла от поймы, то найдем:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = 24{,}55 \text{ м.}^2; \quad \chi = \chi_1 + \chi_2 = 45{,}06 \text{ м.}; \quad R = 0{,}545 \text{ м.}$$

Тогда при заданном уклоне $i = 0{,}0005$ и, принимая в формуле Г. и Куттера коэфф. шероховатости средний между 0,025 и 0,030, т.-е. принимая $n = 0{,}0275$, находим коэфф. $C = 32$; следовательно,

$$V = 32\sqrt{0{,}545 \cdot 0{,}0005} = 0{,}521 \text{ м.}: \quad Q = 24{,}55 \cdot 0{,}521 = 12{,}79 \text{ м.}^3$$

Этот расход меньше, чем предыдущий на 39%.

§ 62. О наивыгоднейших поперечных сечениях каналов при заданных величинах: расходе Q и продольном уклоне i. При устройстве каналов необходимо проектировать поперечные размеры их так, чтобы было выполнено одно из следующих условий.

1) Чтобы при движении воды проявлялось наименьшее сопротивление или, другими словами, чтобы скорость была наибольшей или что тоже самое, чтобы живое сечение канала было наименьшим.

2) Чтобы стоимость устройства канала была наименьшей.

Наименьшей стоимости можно достигнуть разными путями, напр.: а) наименьшим количеством земляных работ, что приводится, очевидно, к наименьшему живому сечению; б) возможно более узкой полосой земли, подлежащей отчуждению, что достигается наименьшей шириной канала на поверхности; в) наименьшей стоимостью обделки или укрепления ложа, что получается при наименьшем смачиваемом периметре; г) наименьшею потерей воды в грунт, т.-е. наименьшей просачиваемостью воды, что получается, при равенстве прочих условий, наименьшей глубиною воды в канале.

Какую бы форму поперечного сечения канала мы не рассматривали (трапецоидальную, прямоугольную, треугольную, круглую), всегда возможно выразить живое сечение ω и смачиваемый периметр χ, а следовательно, и гидравлический радиус R через несколько независимых переменных: x, y, z...

Так при трапецоидальном сечении такими переменными будут *три* величины: ширина канала a по дну, глубина h и угол δ, составляемый откосом с горизонтом; при прямоугольном сечении — *две* величины: ширина a и глубина h, при круглом сечении — *две* величины: диаметр и центральный угол 2α, соответствующий ширине воды по верху; при треугольном сечении — *две* величины: глубина h и ширина b воды по верху или же угол при вершине.

Смотря по тому, которому из вышеперечисленных условий должен удовлетворить проектируемый канал, переменные x, y, z... или все или только часть их являются неизвестными.

При определении этих неизвестных *данными* являются *три* следующие элемента: 1) расход канала Q; 2) продольный уклон i дна канала, и 3) обделка ложа канала, а следовательно, и степень шероховатости стенок, определяющая коэфф. γ в форм. Базена или коэфф. n—в форм. Г. и Куттера. Эта обделка может быть: деревянной из досок строганных и нестроганных, кирпичной, каменной из чисто обтесанного камня или из грубо обтесанного камня, булыжной,земля-

ной и т. п. Само собою разумеется, что форма сечения канала должна быть также задана.

Не разбирая всех вопросов, касающихся наименьшей стоимости каналов, займемся подробно только одним из них — первым, а именно: определим размеры поперечного сечения канала по условию, чтобы при движении воды проявлялось наименьшее сопротивление при заданных Q, i и γ (или n). Это условие, очевидно, требует, чтобы скорость V была *наибольшей*. Так как

$$V = C\sqrt{Ri},$$

где C есть величина, зависящая от R, как это видно из формул Базена и Г. Куттера, то скорость при данном i зависит только от R. т.-е. от ω и χ.

С другой стороны расход

$$Q = \omega \cdot V = C\sqrt{\frac{\omega^3}{\chi}i} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

есть величина заданная, зависящая также от ω и χ. Таким образом поставленный выше вопрос сводится к отысканию *maxim.* V при условии, чтобы величина

$$Q = C\sqrt{\frac{\omega^3}{\chi}i} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

была постоянной. Если ω и χ суть функции n переменных x, y, z... то V и $C\sqrt{\frac{\omega^3}{\chi}i}$ будут функции тех же переменных. Следовательно, нужно найти, при каких значениях этих переменных получается *maxim.* $V = f(x, y, z...)$ при условии, чтобы

$$C\sqrt{\frac{\omega^3}{\chi}i} = F(x, y, z)$$

равнялось заданной величине Q. Как известно из анализа, это задача относительного *maximum*'а. Для решения этой задачи берем новую функцию

$$\varphi(x, y, z...) = f(x, y, z..) + \lambda F(x, y, z) = V(1 + \lambda\omega) \; . \; . \; . \; (b),$$

для которой и ищем условия абсолютного *maximum*'а; здесь λ — пока неизвестный постоянный множитель. Как известно, эти условия будут следующие:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (c)$$

всего n условий. К ним присоединяем уравн. (a); тогда имея $(n+1)$ уравнений, из них определим n неизвестных x, y, z... и множитель λ.

Уравнениям (c) можно придать другой вид. Имеем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1+\lambda\omega)\frac{\partial V}{\partial x} + V\cdot\frac{\partial(1+\lambda\omega)}{\partial x};$$

но $$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \chi}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial x}; \quad \text{также} \quad \frac{\partial(1+\lambda\omega)}{\partial x} = \lambda\frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

Следовательно получаем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1+\lambda\omega)\left[\frac{\partial V}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \chi}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial x}\right] + \lambda V\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0.$$

Также получаем, ограничиваясь тремя переменными:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = (1+\lambda\omega)\left[\frac{\partial V}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \chi}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial y}\right] + \lambda V\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = (1+\lambda\omega)\left[\frac{\partial V}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial \chi}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial z}\right] + \lambda V\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0.$$

Из каждого из этих уравнений получаем следующие:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}\left[(1+\lambda\omega)\frac{\partial V}{\partial \omega} + \lambda V\right] = -(1+\lambda\omega)\frac{\partial V}{\partial \chi}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y}\left[(1+\lambda\omega)\frac{\partial V}{\partial \omega} + \lambda V\right] = -(1+\lambda\omega)\frac{\partial V}{\partial \chi}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial z}\left[(1+\lambda\omega)\frac{\partial V}{\partial \omega} + \lambda V\right] = -(1+\lambda\omega)\frac{\partial V}{\partial \chi}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial z}.$$

Делением почленно первого уравнения на второе и на третье находим окончательно два следующие:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial y}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial x}\\ \frac{\partial \omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{\partial \omega}{\partial z}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial x}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d).$$

Таким образом мы имеем в результате *два* уравнения; к ним нужно присоединить еще условное уравнение (a).

Помощью этих *трех* уравнений найдем значения переменных x, y, z, соответствующих поставленной выше задаче. Постоянный множитель λ исключен и не входит в окончательный результат. Такой случай *трех* неизвестных представляется при рассмотрении трапецоидального сечения (a, h и $\mathfrak{c}$). При прямоугольном, треугольном и круглом сечениях имеем *две* неизвестных (a и h; h и b; r и 2α). В этих случаях вопрос решается помощью двух уравнений: одно уравнение есть первое

уравнение из уравн. (d), а другое уравнение есть условное уравн. (a). Полученные результаты применим к отдельным сечениям.

Трапецоидальное поперечное сечение. За переменные, определяющие ω и χ, принимаем ширину a канала по дну, глубину h воды и угол δ, составляемый откосами с горизонтом. Следовательно, в настоящем случае имеем: $x = a$; $y = h$; $z = \delta$. По предыдущему (§ 59) получаем:

$$\omega = (a + h \operatorname{Cotg} \delta)h; \qquad \chi = a + \frac{2h}{\operatorname{Sin} \delta}.$$

Находим производные ω и χ по переменным a, h и δ; получаем:

$$\frac{\partial\omega}{\partial a} = h; \quad \frac{\partial\omega}{\partial h} = a + 2h \operatorname{Cotg} \delta; \quad \frac{\partial\omega}{\partial\delta} = -\left(\frac{h}{\operatorname{Sin} \delta}\right)^2,$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial a} = 1; \quad \frac{\partial\chi}{\partial h} = \frac{2}{\operatorname{Sin} \delta}; \quad \frac{\partial\chi}{\partial\delta} = -\frac{2h \operatorname{Cos} \delta}{\operatorname{Sin}^2 \delta}.$$

Подставляем эти значения в уравнения (d) и находим:

$$\frac{2h}{\operatorname{Sin} \delta} = a + 2h \operatorname{Cotg} \delta,$$

$$\frac{2h^2 \operatorname{Cos} \delta}{\operatorname{Sin}^2 \delta} = \frac{h^2}{\operatorname{Sin}^2 \delta}.$$

Из последнего уравнения находим $\operatorname{Cos} \delta = \frac{1}{2}$ и угол $\delta = 60°$; $\operatorname{Sin} \delta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Этому углу соответствует приблизительно откос $3:5$; уклон такого откоса заключается между одиночным и полуторным. Затем из первого равенства получаем: ширина канала по дну:

$$a = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}h = 1{,}155h,$$

ширина на поверхности воды:

$$b = a + 2h \operatorname{Cotg} \delta = \tfrac{4}{3}\sqrt{3}h = 2a = 2{,}309h,$$

живое сечение:

$$\omega = \sqrt{3}h^2 = 1{,}732h^2,$$

смачиваемый периметр:

$$\chi = 2\sqrt{3}h = 3{,}464h,$$

гидравлический радиус:

$$R = \tfrac{1}{2}h.$$

Глубину h определим из условного уравнения (a), при чем коэфф. C возьмем по форм. Базена. Тогда находим:

$$V=\frac{87R\sqrt{i}}{\sqrt{R}+\gamma}=\frac{87\omega\sqrt{i}}{\sqrt{\omega\chi}+\gamma\chi}.$$

$$Q=\omega V=\frac{87\omega^2\sqrt{i}}{\sqrt{\omega\chi}+\gamma\chi}.$$

Подставим сюда вместо ω и χ найденные значения; тогда получим:

$$Q=\frac{87\sqrt{3i}h^3}{\sqrt{2h}+2\gamma} \text{ или } \frac{h^3}{\sqrt{2h}+2\gamma}=\frac{Q}{87\sqrt{3i}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (e).$$

Из этого уравнения определим искомую глубину h; это уравнение *шестой* степени по h, не приводящееся к кубическому; проще всего можно решать его по способу последовательных приближений, как это показано в нижеследующем численном примере.

Наивыгоднейшие размеры живого сечения показаны на черт. 212; оно представляет половину площади правильного шестиугольника; его можно построить следующим образом.

На ширине $b=2a$, как на диаметре, строим круг, в который вписываем правильный шестиугольник; тогда ширина канала по дну и боковые откосы представятся сторонами этого шестиугольника.

Численный пример 1. Определить наивыгоднейшие *размеры* трапецоидального поперечного сечения канала, имеющего расход $Q=0{,}4$ м.^{3} при уклоне $i=0{,}0005$. Обделка русла из гладкой тесовой кладки почему эту обделку следует отнести ко второй категории и принять в форм. Базена коэфф. $\gamma=0{,}16$.

Для первого приближения в условном уравн. (a) принимаем C постоянным и затем вместо ω и R подставляем найденные выше значения; тогда получаем:

$$Q=\sqrt{3}h^2C\sqrt{\tfrac{1}{2}hi}.$$

Отсюда выводим

$$h=\sqrt[5]{\frac{2Q^2}{3C^2i}}.$$

Здесь для первого приближения примем $C=50$ для метров. В таком случае для нашего численного примера получается:

$$h=\sqrt[5]{\frac{2.(0{,}4)^2}{3.(50)^2.0{,}0005}}=0{,}616 \text{ м.}$$

При $h=0{,}616$ м. левая часть урав. (e) равна 0,164, а правая=0,119,
„ $h=0{,}550$ м. „ „ „ „ $0{,}121>0{,}119$,
„ $h=0{,}540$ м. „ „ „ „ $0{,}115<0{,}119$,
„ $h=0{,}545$ м. „ „ „ „ $0{,}119=0{,}119$.

Итак, искомая глубина $h=0{,}545$ м.

Прямоугольное сечение. В этом случае имеем две неизвестных a и h. Для определения их нужно взять первое из уравн. (d) и условное уравн. (a). Так как $\omega=ah$ и $\chi=a+2h$, то

$$\frac{\partial\omega}{\partial a}=h;\quad \frac{\partial\omega}{\partial h}=a;\quad \frac{\partial\chi}{\partial a}=1;\quad \frac{\partial\chi}{\partial h}=2.$$

Следовательно, первое из уравн. (d) дает $a=2h$; затем

$$\omega=2h^2;\qquad \chi=4h;\qquad R=\tfrac{1}{2}h.$$

Итак, наивыгоднейшее прямоугольное сечение состоит из двух квадратов со стороною h, поставленных рядом (черт. 213).

Глубину h определим из уравн. (a), пользуясь форм. Базена для коэфф. C. Имеем подобно предыдущему сечению:

$$V=C\sqrt{Ri}=\frac{87\omega\sqrt{i}}{\sqrt{\omega\chi}+\gamma\chi}=\frac{87h\sqrt{i}}{\sqrt{2h}+2\gamma}.$$

$$Q=\omega V=\frac{87.2.h^3\sqrt{i}}{\sqrt{2h}+2\gamma}\quad\text{или}\quad\frac{h^3}{\sqrt{2h}+2\gamma}=\frac{Q}{87.2.\sqrt{i}}.$$

Это уравнение 6-й степени по h решаем по способу последовательных приближений совершенно так, как это показано в вышеприведенном численном примере.

Треугольное сечение. Для треугольного сечения имеем две неизвестных величины: ширину по верху b и глубину h. Здесь

$$\omega=\tfrac{1}{2}bh;\qquad \chi=\sqrt{b^2+4h^2};$$

тогда имеем:

$$\frac{\partial\omega}{\partial b}=\tfrac{1}{2}h;\quad \frac{\partial\omega}{\partial h}=\tfrac{1}{2}b;\quad \frac{\partial\chi}{\partial b}=\frac{b}{\sqrt{b^2+4h^2}};\quad \frac{\partial\chi}{\partial h}=\frac{4h}{\sqrt{b^2+4h^2}}.$$

Тогда из первого уравн. (d) находим $b=2h$; следоват., угол при вершине прямой и откосы одиночные (черт. 214). Тогда

$$\omega=h^2;\qquad \chi=h\sqrt{2};\qquad R=\frac{\sqrt{2}}{2}h.$$

Из условного уравн. (a) находим глубину h. Пользуясь формулой Базена для C, получаем:

$$V = \frac{87R\sqrt{i}}{\sqrt{R}+\gamma} = \frac{87h\sqrt{i}}{\sqrt{1{,}41h}+\gamma\sqrt{2}};$$

$$Q = \frac{87h^3\sqrt{i}}{\sqrt{1{,}41h}+\gamma\sqrt{2}}; \quad \text{отсюда} \quad \frac{h^3}{\sqrt{1{,}41h}+\gamma\sqrt{2}} = \frac{Q}{87\sqrt{i}}.$$

Из этого уравнения найдем h путем последовательных приближений, как показано выше в численном примере.

Круглое сечение. Для круглого сечения имеем *две* неизвестных: радиус r и угол α (черт. 197). Решаем задачу так же, как в случае прямоугольного сечения. Здесь имеем:

$$\omega = \frac{r^2}{2}(2\alpha - \operatorname{Sin} 2\alpha); \qquad \chi = 2r\alpha.$$

Дифференцируя ω и χ по r и по α, получаем:

$$\frac{\partial\omega}{\partial r} = r(2\alpha - \operatorname{Sin} 2\alpha); \quad \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} = r^2(1 - \operatorname{Cos} 2\alpha); \quad \frac{\partial\chi}{\partial r} = 2\alpha; \quad \frac{\partial\chi}{\partial\alpha} = 2r.$$

Затем из первого уравн. (a) находим:

$$r^2(1 - \operatorname{Cos} 2\alpha)\cdot 2\alpha = r(2\alpha - \operatorname{Sin} 2\alpha)\cdot 2r.$$

Отсюда получаем:

$$2\operatorname{Sin} 2\alpha = 2\alpha(1 + \operatorname{Cos} 2\alpha); \quad \text{тогда } \alpha = \operatorname{tg}\alpha.$$

Для решения этого трансцендентного уравнения поступаем как в § 58, а именно: обозначаем

$$2\alpha = x \quad \text{и} \quad \operatorname{Cos} 2\alpha = \operatorname{Cos} x = y;$$

тогда предыдущее уравнение принимает такой вид:

$$2\sqrt{1-y^2} = x(1+y), \text{ откуда } y = \frac{\pm 4 - x^2}{4 + x^2}.$$

Давая x различные положительные значения и удерживая верхний знак, получим кривую AB (черт. 215), а построив уравнение $y = \operatorname{Cos} x$, получим синусоиду. Абсциссы пересечения этой синусоиды с кривой AB будут удовлетворять нашему уравнению. Для нашей задачи получается абсцисса $x = Oa = 4{,}055$; следоват., угол. 2α равен:

$$2\alpha = \frac{4{,}055}{\pi}\cdot 180° = 1{,}298\cdot 180° = 232°30'.$$

При таком значении угла 2α находим:

$$h = 1{,}441r; \quad \omega = 2{,}423r^2; \quad \chi = 4{,}055r; \quad R = 0{,}598r.$$

Затем находим скорость, пользуясь, как и выше, для коэфф. C формулой Базена:

$$V = \frac{87\,R\sqrt{i}}{\sqrt{R}+\gamma} = \frac{87.0{,}598\,r\sqrt{i}}{\sqrt{0{,}598\,r}+\gamma}.$$

Потом вычисляем расход:

$$Q = \omega V = \frac{87.0{,}598.2{,}423 r^3 \sqrt{i}}{\sqrt{0{,}598\,r}+\gamma}.$$

Отсюда имеем окончательно:

$$\frac{r^3}{\sqrt{0{,}598\,r}+\gamma} = \frac{Q}{87.0{,}598.2{,}423\sqrt{i}} = \frac{Q}{126{,}06\sqrt{i}} \quad \ldots\ldots (f).$$

Это уравнение решаем по r по способу последовательных приближений.

Численный пример 2. Определить размеры *круглого* сечения канала который имеет расход $Q = 1{,}5$ м.^{3} при уклоне $i = 0{,}001$ в предположении, что степень наполнения канала соответствует наибольшей скорости, т.-е. глубине $h = 1{,}441 r$.

Так как Q и i даны, то радиус круглого сечения определится из уравн. (a). Для определения из него r путем последовательных приближений нужно задаться какой-либо величиной r. Эту первоначальную величину определим, положив коэфф. C постоянным и равным напр. 50 для мер метрических. Тогда, подставив в выражение для Q найденные выше значения для ω и R, находим:

$$Q = \omega C\sqrt{Ri} = 2{,}423 r^2 C\sqrt{0{,}598 ri}.$$

Отсюда

$$r = \sqrt[5]{\left(\frac{Q}{2{,}423.C}\right)^2 \cdot \frac{1}{0{,}598.i}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1{,}5}{2{,}423.50}\right)^2 \frac{1}{0{,}598.0{,}001}} = 0{,}761 \text{ м.}$$

При $r = 0{,}761$ м. левая часть урав. (a) равна 0,527, а правая $= 0{,}377$,
„ $r = 0{,}65$ м. „ „ „ „ $0{,}350 < 0{,}377$,
„ $r = 0{,}68$ м. „ „ „ „ $0{,}393 > 0{,}377$,
„ $r = 0{,}67$ м. „ „ „ „ $0{,}379 > 0{,}377$.

Принимаем окончательно $r = 0{,}67$ м.

Скорость $V = \frac{Q}{\omega} = \frac{1{,}5}{2{,}423.(0{,}67)^3} = 1{,}15$ м.

О наивыгоднейших поперечных размерах каналов при существовании дополнительных условий. Выше мы рассмотрели задачу об определении аивы годнейших размеров поперечных сечений каналов при заданных

Q и i. Во многих случаях бывает необходимо ввести в эту задачу еще *дополнительные* условия. По этим условиям требуется: или *а*) придать боковым откосам канала такие уклоны, какие допускаются местными условиями, или *б*) назначить скорость не более известного предела.

Рассмотрим оба эти условия.

а) При определении наивыгоднейших размеров трапецоидального и треугольного сечений мы нашли для откосов такие углы: для первого угол $\delta = 60°$ и для второго угол $\delta = 45°$. Такие откосы по своей крутости требуют искусственной обделки. Но во многих случаях подобную обделку нельзя устроить и нужно давать откосам уклон, допускаемый свойствами грунта. В таких случаях на угол δ нужно смотреть как на заданный, согласно местным условиям. Таким образом, наша задача о наивыгоднейших размерах поперечного сечения при заданных Q и i обращается в другую задачу, а именно: найти наивыгоднейшие размеры поперечного сечения по заданным Q, i и δ. Эта задача касается трапецоидальных и треугольных сечений, которые мы сейчас и рассмотрим.

Трапецоидальное сечение. Известно, что для этого сечения:

$$\omega = (a + h \operatorname{Cotg} \delta)h; \qquad \chi = a + \frac{2h}{\operatorname{Sin} \delta}.$$

Следовательно, ω и χ суть функции двух переменных a и h; угол δ задан сообразно местным условиям. Задача в этом случае решается по общему правилу, почему нужно для решения ее воспользоваться первым из уравн. (d) и условным уравн. (a). Так как здесь:

$$\frac{\partial \omega}{\partial a} = h; \quad \frac{\partial \omega}{\partial h} = a + 2h \operatorname{Cotg} \delta; \quad \frac{\partial \chi}{\partial a} = 1; \quad \frac{\partial \chi}{\partial h} = \frac{2}{\operatorname{Sin} \delta},$$

то первое из уравн. (d) дает:

$$a = \frac{2h(1 - \operatorname{Cos} \delta)}{\operatorname{Sin} \delta},$$

тогда:

$$\omega = \frac{h^2(2 - \operatorname{Cos} \delta)}{\operatorname{Sin} \delta}; \quad \chi = \frac{2h(2 - \operatorname{Cos} \delta)}{\operatorname{Sin} \delta}; \quad R = \frac{1}{2}h.$$

Подставим эти значения в условное уравн. (a); пользуясь, как и раньше, форм. Базена для коэфф. C, получаем:

$$Q = \omega C \sqrt{Ri} = \frac{87 \omega R \sqrt{i}}{\sqrt{R} + \gamma} = \frac{87 . (2 - \operatorname{Cos} \delta) h^3 \sqrt{i}}{2 \operatorname{Sin} \delta (\sqrt{\frac{1}{2}h} + \gamma)}.$$

Отсюда окончательно выводим:

$$\frac{h^3}{\sqrt{\frac{1}{2}h}+\gamma}=\frac{2\,Q\,\mathrm{Sin}\,\delta}{87(2-\mathrm{Cos}\,\delta)\sqrt{i}}\,.$$

Это уравнение решаем по h по способу последовательных приближений. Для первого приближения вычисляем h, полагая C постоянным равным напр. 50 для метров.

Треугольное сечение. В этом случае нет надобности пользоваться уравн. (d), так как ω и χ выражаются в зависимости от h, которое определяется из условного уравн. (a).

Имеем:

$$\omega=\frac{bh}{2}=h^2\mathrm{Cotg}\,\delta;\quad \chi=\frac{2h}{\mathrm{Sin}\,\delta};\quad R=\frac{1}{2}h\,\mathrm{Cos}\,\delta.$$

Подставим эти значения в выражение для расхода, получим:

$$Q=\omega C\sqrt{Ri}=\frac{87\omega R\sqrt{i}}{\sqrt{R}+\gamma}=\frac{87.\mathrm{Cos}\,\delta.\mathrm{Cotg}\,\delta.h^3\sqrt{i}}{2[\sqrt{\frac{1}{2}h\,\mathrm{Cos}\,\delta}+\gamma]}\,.$$

Отсюда окончательно выводим:

$$\frac{h^3}{\sqrt{\frac{1}{2}h\,\mathrm{Cos}\,\delta}+\gamma}=\frac{2Q}{87.\mathrm{Cos}\,\delta.\mathrm{Cotg}\,\delta.\sqrt{i}}\,.$$

Это уравнение решаем по h по способу последовательных приближений, как и в предыдущих случаях.

б) Рассмотрим теперь задачу о наивыгоднейших размерах сечений в предположении, что заданы: расход Q и живое сечение ω или, другими словами, что задана скорость V. Эта величина дается в зависимости от грунта, в котором будет вырыт проектируемый канал. Очевидно, что V должно быть меньше той скорости, при которой уже начинается размыв грунта. Должна быть также задана форма поперечного сечения. При этих условиях требуется определить: 1) *наименьший* смачиваемый периметр χ из всех периметров заданной формы и вмещающих требуемую площадь ω, и 2) продольный уклон i.

Всегда возможно периметр χ выразить через одну переменную, напр. глубину h, или для круга — через центральный угол 2α. Следовательно, будем иметь $\chi=f(h)$. Тогда из равенства

$$\frac{d\chi}{dh}=f'(h)=0$$

найдем значение глубины h, соответствующее *minimum*'у χ.

Другая искомая величина i определится из условного уравнения:

$$Q=\omega C\sqrt{Ri}\,.$$

Трапецоидальное сечение с заданным углом δ.

Здесь имеем:

$$\omega = (a + h \operatorname{Cotg} \delta) h; \qquad \chi = a + \frac{2h}{\operatorname{Sin} \delta}.$$

Из первого уравнения определяем a и вставляем во второе; тогда

$$\chi = \frac{\omega}{h} - h \operatorname{Cotg} \delta + \frac{2h}{\operatorname{Sin} \delta} = f(h).$$

Глубину h, для которой получается наименьший смачиваемый периметр χ, соответствующий данным Q, ω и δ, определим из равенства:

$$\frac{d\chi}{dh} = f'(h) = -\frac{\omega}{h^2} - \operatorname{Cotg} \delta + \frac{2}{\operatorname{Sin} \delta} = 0.$$

Отсюда искомая глубина:

$$h = \sqrt{\frac{\omega \operatorname{Sin} \delta}{2 - \operatorname{Cos} \delta}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g).$$

Затем получаем:

$$minim.\ \chi = \frac{2\omega}{h}; \quad a = 2h \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \delta; \quad R = \tfrac{1}{2} h.$$

Неизвестный уклон i найдем из условного уравнения, которое, при пользовании форм. Базена для коэфф. C, примет такой вид:

$$Q = \frac{87 \omega R \sqrt{i}}{\sqrt{R} + \chi} = \frac{87 . \omega h \sqrt{i}}{2[\sqrt{R} + \gamma]}.$$

Отсюда находим:

$$\sqrt{i} = \frac{2Q[\sqrt{\tfrac{1}{2} h} + \gamma]}{87 \omega h}.$$

В следующей таблице XXVIII для различных значений угла δ даны величины: глубина воды h, смачиваемый периметр χ, ширина a по дну и ширина b по поверхности воды.

Таблица XXVIII.

Трапецоидальное сечение.	Глубина h.	Смачиваем. периметр χ.	Ширина по дну a.	Ширина по поверхности воды b.
При уклоне откосов, соответств, $\angle \delta = 60°$	$0{,}76\sqrt{\omega}$	$2{,}63\sqrt{\omega}$	$0{,}88\sqrt{\omega}$	$1{,}76\sqrt{\omega}$
При одиночном уклоне откосов ($\angle \delta = 45°$). . . .	0,74 „	2,70 „	0,61 „	2,09 „
При полуторном уклоне откосов ($\angle \delta = 33°41'$) . .	0,69 „	2,86 „	0,42 „	2,48 „
При двойном уклоне откосов ($\angle \delta = 26°34'$) . . .	0,64 „	3,12 „	0,30 „	2,84 „

В случае угла $\delta = 60^\circ$ живое сечение представляет половину правильного шестиугольника, вписанного в круг диаметром $= b$.

Заметим, что при угле $\delta = 60^\circ$ получается *минимальный* продольный *уклон* i и *максимальная глубина* h. Действительно, выражение (g) показывает, что $h = f(\delta)$; следовательно, угол δ, соответствующий *maximum*'у h, найдем из уравнения:

$$\frac{dh}{d\delta} = f'(\delta) = 0.$$

Дифференцируя уравнение (g) по δ, получаем:

$$\frac{dh}{d\delta} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega(2 - \operatorname{Cos}\delta)}{\operatorname{Sin}\delta}} \cdot \frac{2\operatorname{Cos}\delta - 1}{(2 - \operatorname{Cos}\delta)^2} = 0.$$

Отсюда

$$2\operatorname{Cos}\delta - 1 = 0; \qquad \operatorname{Cos}\delta = \frac{1}{2} \text{ и угол } \delta = 60^\circ.$$

Итак, наибольшая глубина h соответствует углу 60°.

Для розыскания угла δ, соответствующего *minimum*'у i, берем уравнение для расхода Q, пользуясь для коэфф. C форм. Базена:

$$Q = \frac{87\omega R\sqrt{i}}{\sqrt{R} + \gamma} = \frac{87\omega h\sqrt{i}}{2[\sqrt{\tfrac{1}{2}h} + \gamma]}.$$

Отсюда находим уклон i как функцию h, следовательно как функцию δ:

$$i = \left(\frac{2Q}{87\,\omega}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{\tfrac{1}{2}h} + \gamma}{h}\right)^2 = A\left(\frac{\sqrt{\tfrac{1}{2}h} + \gamma}{h}\right)^2 = F(\delta).$$

Дифференцируя это выражение по h, рассматривая ее как функцию δ, получаем:

$$\frac{di}{d\delta} = -\frac{2A}{h^3}\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}h} + \gamma\right)^2 \frac{dh}{d\delta} = 0.$$

Отсюда следует $\frac{dh}{d\delta} = 0$. Это выражение мы только что рассмотрели и получили из него угол $\delta = 60^\circ$.

Итак, действительно наименьший уклон соответствует $\delta = 60^\circ$.

Для *прямоугольника* находим из тех же формул при $\delta = 90^\circ$:

$$h = 0{,}71\sqrt{\omega}; \qquad a = b = 1{,}41\sqrt{\omega}; \qquad \chi = 2{,}83\sqrt{\omega}.$$

Очевидно, это сечение состоит из 2 квадратов, поставленных рядом.

Круглое поперечное сечение. Для какого-либо живого сечения ABC (черт. 197), которому соответствует центральный угол 2α, находим:

$$\omega = \frac{r^2}{2}(2\alpha - \operatorname{Sin} 2\alpha); \qquad \chi = 2r\alpha.$$

Требуется определить радиус r и угол 2α по условию, чтобы при заданной площади ω сегмента ABC получить *minimum* смачиваемого периметра χ. Эта задача решается следующим образом. Из первого уравнения определяем r и находим:

$$r = \sqrt{\frac{2\omega}{2\alpha - \operatorname{Sin} 2\alpha}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (h).$$

Тогда второе уравнение примет вид:

$$\chi = 2\sqrt{2\omega}\sqrt{\frac{\alpha^2}{2\alpha - \operatorname{Sin} 2\alpha}} = f(\alpha).$$

Minimum χ получим из равенства: $\frac{d\chi}{d\alpha} = f'(\alpha) = 0.$

Тогда находим:

$$\frac{d\chi}{d\alpha} = \left(2\sqrt{2\omega}\right) \cdot \frac{\alpha(1 + \operatorname{Cos} 2\alpha) - \operatorname{Sin} 2\alpha}{(2\alpha - \operatorname{Sin} 2\alpha)^{3/2}} = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется при значениях угла α, получающихся из равенства:

$$\alpha(1 + \operatorname{Cos} 2\alpha) - \operatorname{Sin} 2\alpha = 0.$$

Это равенство удовлетворяется при $2\alpha = 180°$. Это значение дает искомое положение горизонта $A''B''$ (черт. 197). Затем из равенства (h) находим:

$$r = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} = 0{,}80\sqrt{\omega}; \quad \chi = \sqrt{2\pi\omega} = 2{,}51\sqrt{\omega}; \quad R = 0{,}40\sqrt{\omega}.$$

Наконец, продольный уклон i определим из выражения для расхода, пользуясь для коэфф. C формулой Базена, имеем:

$$Q = \frac{87\omega R\sqrt{i}}{\sqrt{R} + \gamma} = \frac{87 . 0{,}4\omega^{3/2}\sqrt{i}}{\sqrt{0{,}4\sqrt{\omega}} + \gamma}.$$

Отсюда выводим:

$$\sqrt{i} = \frac{Q(\sqrt{0{,}4\sqrt{\omega}} + \gamma)}{34{,}8\omega^{3/2}}.$$

Сечение с наибольшею скоростью при заданных: смачиваемом периметре χ и ширине b по верху воды. Эта задача сводится к следующей: определить вид кривой mpn (черт. 216), проходящей через точки m и n, имеющей заданную длину $mpn = \chi$ и дающей наибольшую площадь. Длина $mn = b$. Очевидно, при такой кривой получается наибольший гидравлический радиус $R = \frac{\omega}{\chi}$, а следоват. и наибольшая скорость. Определение вида кривой, удовлетворяющей поставленным условиям,

составляет одну из задач вариационного исчисления, где доказывается, что эта кривая есть *дуга круга*, проходящая через точки m и n и имеющая заданную длину χ.

Определим радиус такого круга, угол при центре и площадь mnp по заданным χ и $mn = b$. Так как

$$b = 2r \operatorname{Sin} \alpha; \qquad \chi = 2r\alpha,$$

то отсюда

$$\alpha = \frac{\chi}{b} \operatorname{Sin} \alpha = k \operatorname{Sin} \alpha .$$

Решаем это трансцендентное уравнение по способу последовательных приближений или графическим путем и находим угол α. Затем вычисляем r и ω; продольный уклон i найдем из выражения для расхода Q, пользуясь формулой Базена для коэфф. C и считая, что Q задано.

Решение предыдущего трансцендентного уравнения можно найти легко графическим путем. Для этого полагаем: $\alpha = x$ и $\operatorname{Sin} \alpha = \operatorname{Sin} x = y$; тогда наше уравнение примет вид: $x = ky$. Это уравнение представляет прямую OA (черт. 217). Далее строим синусоиду по уравнению $y = \operatorname{Sin} x$. Абсцисса Oa пересечения синусоиды с прямой OA дает решение нашего уравнения. Так как $\alpha > 0$ и $\alpha < \pi$, то получается только *одно* решение.

Определение диаметра круглого канала по наименьшей стоимости его при заданных: расходе Q и продольном уклоне i. При определении наивыгоднейших размеров поперечных сечений каналов одним из дополнительных условий может быть поставлена наименьшая стоимость канала. Как пример, покажем определение диаметра круглого канала по заданным Q и i при условии наименьшей стоимости его. Стоимость одной погонной единицы трубы ρ, включая сюда стоимость укладки ее, зависит от диаметра D и ее можно представить так, как об этом было уже упомянуто выше, а именно:

$$\rho = F(D).$$

Для водопроводных труб получается:

$$\rho = a + bD + cD^2.$$

Далее из выражения для расхода находим:

$$\frac{Q}{C\sqrt{i}} = \omega\sqrt{R} = \sqrt{\frac{\omega^3}{\chi}} = f(r;\ \alpha) \ldots\ldots\ldots (i).$$

Здесь для упрощения предположено, что C постоянно. Тогда левая часть при заданных Q и i постоянна, а правая — есть функция от r и α. Наша задача заключается в том, чтобы определить радиус трубы r и центральный угол α по условию наименьшей стоимости ρ, т.-е. $F(D)$, при удовлетворении условному уравн. (i). Это задача относительного *minimum*'а; она приводится к задаче абсолютного *minimum*'а другой функции $\Phi(r, \alpha)$, составленной из функций f и F, а именно:

$$\Phi(r, \alpha) = F(r) + \lambda f(r, \alpha),$$

где λ—постоянный множитель, пока неизвестный. Тогда условия абсолютного *minimum*'а выразятся такими уравнениями:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial r} + \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0.$$

Из последнего выражения видим, что так как λ не $= 0$, то должно быть:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0.$$

Дефференцируя уравн. (i) по α, получаем:

$$2\omega \sqrt{\frac{\chi}{\omega}} \frac{\left(3\chi \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \omega \frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\right)}{\chi^2} = 0.$$

Отсюда выводим окончательно:

$$3\chi \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \omega \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} = 0.$$

Это равенство тожественно с уравн. (253) в § 58, полученным при определении центрального угла 2α, соответствующего *max.* Q; там было найдено, что $2\alpha = 308°$; $\omega = 3{,}082 r^2$; $\chi = 5{,}377 r$ и $R = 0{,}573 r$. Необходимо определить r; он определится из условного уравн. (i), если подставить сюда только что полученные значения для ω и χ. Тогда получим:

$$\frac{Q}{C\sqrt{i}} = \sqrt{\frac{(3{,}082\, r^2)^3}{5{,}377\, r}}; \text{ отсюда } r = \sqrt[5]{0{,}1837 \left(\frac{Q}{C}\right)^2 \frac{1}{i}}.$$

Это значение r будет первым приближением к более точному, которое получим, взяв для C формулу Базена; тогда имеем:

$$Q = \frac{87 \omega R \sqrt{i}}{\sqrt{R} + \gamma} = \frac{87 . 3{,}082 . 0{,}573\, r^3 \sqrt{i}}{\sqrt{0{,}573\, r} + \gamma}.$$

Отсюда находим окончательно:

$$\frac{r^3}{\sqrt{0{,}573\,r+\gamma}}=\frac{Q}{153{,}64\sqrt{i}}.$$

Это уравнение решаем по r по способу последовательных приближений, взяв для начала вышенайденное значение r. Из только что изложенного видно, что условие наименьшей стоимости трубы приводится к условию *maxim.* Q, что вполне понятно; труба, проводящая наибольший расход, будет очевидно самая дешевая, так как будет иметь наименьший диаметр из всех труб, проводящих тот же расход.

§ 63. Задачи, относящиеся к проведению каналов. Решим несколько задач, относящихся к проведению каналов, которые, как уже упомянуто выше, устраиваются для различных целей, и рассмотрим канал, приводящий воду из реки или озера к гидравлическим двигателям; подобные каналы могут служить также для орошения и осушения.

I) Пусть M_0M_0 (черт. 218) представляет горизонт воды в озере, nn—дно канала, имеющего уклон i; порог канала n заложен на глубине H ниже горизонта M_0M_0. Горизонт воды при входе в канал быстро понижается, образует седловину M_0pq и далее имеет уклон дна канала. Пусть сечение канала прямоугольное шириною b, глубиною h; расход канала Q и скорость V_p. Найдем зависимость между величинами H, h, b, Q и i. Рассмотрим линию тока M_0pq; имеем;

$$\frac{V_p^2-V_0^2}{2g}+\zeta\frac{V_p^2}{2g}=(z_0-z_1)=c.$$

Здесь V_0 — начальная скорость, которою можно пренебречь по ее малости; V_p — скорость в канале, а следов., и в точке q; $\zeta\frac{V_p^2}{2g}$ — сопротивление на пути M_0pq; c — понижение горизонта воды в канале относительно горизонта воды в озере; очевидно $c=H-h$. Из предыдущего равенства выводим:

$$V_p=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta}}\sqrt{2gc}=\varphi\sqrt{2gc};\ \text{отсюда:}\ c=H-h=\frac{V_p^2}{\varphi^2.\,2g}=\frac{1}{\varphi^2.\,2g}\left(\frac{Q}{bh}\right)^2\ldots(a);$$

здесь φ — коэфф. скорости. Это уравнение дает зависимость между b, H, h и Q. Рассмотрим теперь линию тока M_0pqM, где точка M лежит в расстоянии L от точки q; имеем:

$$\frac{V_p^2}{2g}+\zeta_1\frac{V_p^2}{2g}=(z_0-z_2)=a.$$

Величина $\zeta_1 \frac{V_p^2}{2g}$ представляет гидравл. сопротивления на пути M_0M; эти сопротивления состоят из двух: местного сопротивления на пути M_0q равного $\zeta \frac{V_p^2}{2g}$, и общего — на пути qM и равного $b_1 \frac{L}{R} V_p^2$, где b_1 — основной коэфф. трения; R — гидравл. радиус $= \frac{\omega}{\chi} = \frac{bh}{b+2h}$, и $L = qM$.

Следовательно,

$$\zeta_1 \frac{V_p^2}{2g} = \zeta \frac{V_p^2}{2g} + b_1 \frac{L}{R} V_p^2.$$

Из предыдущего равенства получаем:

$$\frac{V_p^2}{2g}(1+\zeta) + b_1 \frac{L}{R} V_p^2 = a.$$

Здесь и далее основной коэфф. b_1 будем принимать для первого приближения постоянным. Из уравн. (a) находим:

$$\frac{V_p^2}{2g}(1+\zeta) = c = H - h \quad \text{и} \quad V_p^2 = \varphi^2 \cdot 2g(H-h).$$

Вставляя эти значения в предыдущее равенство, получаем:

$$(H-h) + b_1 \frac{L}{R} \varphi^2 \cdot 2g(H-h) = (H-h)\left[1 + b_1 \frac{L}{R} \cdot \varphi^2 \cdot 2g\right] = a.$$

Далее заменяем R равною ей величиною; тогда имеем:

$$abh = (H-h)\,[bh + b_1(b+2h)\,L\varphi^2 \cdot 2g] \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (b).$$

Это уравнение дает зависимость между величинами a, b, h, H.

Если, напр., определять глубину канала h из этого уравнения, то, обозначив $b_1 L\varphi^2 \cdot 2g = m$, получим следующее квадратное уравнение относительно h:

$$h^2 + \left[\frac{(a+m)\,b - (b+2m)H}{b+2m}\right] h - \frac{mbH}{b+2m} = 0 \;.\;.\;.\;.\;. \quad (c).$$

Затем имеем уравнение Шези:

$$V_p = \frac{Q}{bh} = \sqrt{\frac{1}{b_1}}\sqrt{Ri};$$

заменив здесь R, получим:

$$b_1(b+2h)\,Q^2 = (bh)^3 i \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (d).$$

Это уравнение дает зависимость между b, h, Q и i.

Если теперь соединить уравн. (d и a), то, исключив Q, находим:

$$\frac{2g\varphi^2(b+2h)(H-h)}{bh}=\frac{i}{b_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (e)$$

Здесь имеется зависимость между b, h, H и i.

Наконец, имеем еще такую зависимость; из чертежа находим:

$$a=c+Li \quad \text{или} \quad a=(H-h)+Li \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (f)$$

Полученные пять уравнений послужат для решения всех вопросов, относящихся к нашей задаче. В задачу входят следующие семь величин: H, h, b, i, Q, a, c.

а) Положим, даны величины: H, b и i; определить h, Q, a и c.

По этим данным сперва определим h из уравн. (c), которое будет квадратным по h.

Затем Q определяем из уравн. (d); величину a находим из равенства (f); наконец, величина $c=H-h$.

б) Пусть даны величины: H, b и a; определить h, Q, i и c. Глубина h определится из квадратного уравнения (c); уклон i найдем из равенства (f); расход Q — из равенства (d); наконец, $c=H-h$.

в) Пусть будут данными величины: Q, i и b; определить H, h, a и c. Глубину h находим из уравн. (d); глубину H на пороге найдем из равенства (e); высоту a получим из равенства (f); наконец, $c=$ $=H-h$.

г) Предположим, что даны величины: H, b и a; найти Q, i, h и c. Глубину в канале h определяем из равенства (b); уклон i находим из уравн. (f); расход Q — из уравн. (a или d); наконец $c=H-h$.

д) Пусть даны величины: Q, i и c; требуется определить H, h, b и a, Высоту a находим из уравн. (f). Что касается величин b и h, то определить их из вышеприведенных уравнений нельзя; в этом случае удобнее всего задаться отношением b к h; известно из предыдущего, что наивыгоднейшее соотношение этих величин таково: $b=2h$. Тогда глубину h находим из уравнения (d); затем $H=c+h$.

е) Положим, что даны величины: h, b и i; определить Q, H, a и c. Расход Q определяем из уравн. (d); глубину на пороге H из равенства (a); высоту a находим из равенства (f); наконец, $c=H-h$.

Численный пример. Как пример решим следующую задачу, заимствованную из сочинения *D'Aubuisson*. Hydraulique. Из озера должна быть проведена вода к гидравлическому двигателю каналом прямоугольного поперечного сечения, шириною 4 м., с каменною грубою обделкою; порог этого канала расположен на 2 м. ниже горизонта воды в озере. Определить глубину h воды в канале, расход Q и продольный уклон i

при условии, что гидравлический двигатель находится в расстоянии 265 м. от озера и что горизонт воды у двигателя на 0,44 м. ниже горизонта в озере.

Эту задачу мы сейчас рассматривали в пункте (*г*); здесь заданы: $H=2$ м.; $b=4$ м.; $a=0,44$ м.; $L=265$ м.; требуется определить Q, h, i и c.

Примем по Д'Обюиссону $\varphi=0,905$. Основной коэфф. b_1 определим следующим образом. По шероховатости каналы с каменною грубою обделкою нужно отнести к 3-й категории русел с коэфф. шероховатости $\gamma=0,46$. Для первого приближения примем:

$$C=\sqrt{\frac{1}{b_1}}=58; \text{ тогда } b_1=\frac{1}{(58)^2}=0,000297.$$

По этим данным вычисляем:

$$m=b_1L\varphi^2\cdot 2g=0,000297\cdot 265\cdot (0,905)^2\cdot 2\cdot 9,81=1,266.$$

Теперь уравн. (*c*) можно представить в таком виде:

$$h^2+\frac{(1,266+0,44)4-(2,532+4)^2}{4+2.1,266}h-\frac{2.4.1,266}{4+2.1,266}=0;$$

или:

$$h^2-0,955h-1,551=0; \text{ отсюда } h=1,812 \text{ м.}; \quad c=H-h=0,188 \text{ м.}$$

Расход определим так:

$$Q=\varphi bh\sqrt{2g(H-h)}=0,905\cdot 4\cdot 1,812\sqrt{19,62\cdot 0,188}=12,598 \text{ м.}^3$$

Скорость $V_p=\frac{Q}{bh}=\frac{12,598}{4.1,812}=1,812$ м.

Уклон $i=\frac{h+a-H}{L}=\frac{1,812+0,44-2}{265}=0,000951=\frac{1}{1052}$.

Гидравлический радиус: $R=\frac{bh}{b+2h}=\frac{4.1,862}{4+2.1,812}=0,951$ м.

Для русел 3-й категории для такого значения R получается коэфф. $C=59,1$, а нами взято для первого приближения $C=58$. В виду близости этих чисел можно принять вычисленные: глубину h, расход Q и уклон i за окончательные. *Рюльманн*, решая эту же задачу, находит: $h=1,863$ м.; $Q=11,126$ м.^{3}; $V=1,443$ м.; $i=0,00114$. *Д'Обюиссон* нашел для этой задачи: $Q=11,83$ м.^{3} и $i=0,001041$. Разность между числами, полученными нами и Рюльманном, об'ясняется тем, что этот автор принял шероховатость канала довольно значительной, для которой $C=45$, т.-е. отнес ее к 4-й категории с коэффициентом $\gamma=0,85$.

II) Рассмотрим следующую задачу. Из озера (черт. 219) вода отводится к гидравлическому двигателю—водяному колесу—каналом прямоугольного поперечного сечения, шириною b с заданною обделкою ложа и с уклоном дна i. Порог канала n заложен на глубине H ниже горизонта воды M_0M_0 в озере. В расстоянии L от начала в канале устроена поперечная стенка, в которой внизу имеется щитовое отверстие шириною b_1 и высотою d. Через это отверстие вода со скоростью V_1 направляется на водяное колесо.

Как и в предыдущей задаче, поверхность воды при входе на порог быстро понижается и получается седловина M_0pq; далее поверхность имеет уклон i такой же, как и уклон дна канала с глубиною воды h. У щита горизонт воды стоит ниже горизонта воды в озере на величину a.

Рассматривая линию тока MM' и обозначая: через V—скорость в канале, а следовательно и в точке M; через V_1—скорость в M' и через $\zeta\frac{V_1^2}{2g}$—высоту гидравлических сопротивлений на пути MM', получаем:

$$\frac{V_1^2-V^2}{2g}+\zeta\frac{V_1^2}{2g}=(h-\tfrac{1}{2}d);\ V_1=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta}}\sqrt{2g\left(h-\tfrac{1}{2}d+\frac{V^2}{2g}\right)}=$$

$$=\varphi\sqrt{2gh'},$$

где φ—коэфф. скорости и $h'=(h-\frac{1}{2}d)+\frac{V^2}{2g}$.

Расход через щитовое отверстие:

$$Q=\mu b_1 d\sqrt{2gh'}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (\alpha).$$

Здесь $\varphi=0{,}95$ и $\mu=0{,}65$ коэфф. скорости и расхода при вытекании через щитовое отверстие. Очевидно, расход в канале равен расходу через щитовое отверстие.

Расход Q надо считать известным; высота d и ширина b_1 определятся по правилам проектирования водяных колес; тогда из рав. (α) определится h' и затем h, если для первого приближения пренебречь высотою $\frac{V^2}{2g}$.

Таким образом при рассчете канала надо считать заданными: расход Q; ширину канала b; глубину воды h и расстояние L. По этим данным требуется определить: продольный уклон i дна канала, глубину воды на пороге H и понижение горизонта у щита a. Продольный

уклон i найдем из форм. Шези, в которой Q, ω и R будут известны. Затем глубину H найдем из выражения (a):

$$H = \frac{1}{\varphi^2 . 2g}\left(\frac{Q}{bh}\right)^2 + h.$$

Понижение горизонта воды у щита a проще всего определить из равенства (f).

Численный пример. Канал прямоугольного поперечного сечения с обшивкою из досок, шириною $b = 3{,}05$ м:, должен подводить воду в количестве $Q = 0{,}4$ м.^{3} к верхненаливному водяному колесу, находящемуся в расстоянии 100 м. от озера. Щитовое отверстие должно иметь: ширину $b_1 = 2{,}7$ м. и высоту $d = 0{,}062$ м.; скорость вытекания V_1 через это отверстие должна равняться 2,7 м.

Так как

$$V_1 = \varphi\sqrt{2gh'}, \text{ то: } h' = \frac{V_1^2}{\varphi^2 . 2g} = \frac{(2{,}7)^2}{(0{,}95)^2 . 2 . 9{,}81} = 0{,}413 \text{ м.}$$

Следовательно, глубина воды в канале равна (если пренебречь высотою $\frac{V^2}{2g}$):

$$h = 0{,}413 + \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}062 = 0{,}444 \text{ м.}$$

Живое сечение $\omega = b \cdot h = 3{,}05 \cdot 0{,}444 = 1{,}354$ м.^{2}; смачиваемый периметр $\chi = b + 2h = 3{,}938$ м.; гидравл. радиус $R = 0{,}344$ м. По этим значениям определяем i из форм. Шези с коэфф. b_1 по Базену при $\gamma = 0{,}16$.

$$i = \left[\frac{Q(\sqrt{R} + \gamma)}{87\omega R}\right]^2 = \left[\frac{0{,}4(\sqrt{0{,}344} + 0{,}16)}{87 . 1{,}354 . 0{,}344}\right]^2 = 0{,}0000544.$$

Глубину H на пороге вычислим по выражению:

$$H = \frac{1}{\varphi^2 . 2g}\left(\frac{Q}{bh}\right)^2 + h = \frac{1}{(0{,}95)^2 . 19{,}62}\left(\frac{0{,}4}{3{,}05 . 0{,}444}\right)^2 + 0{,}444 =$$

$$= 0{,}006 + 0{,}444 = 0{,}450 \text{ м.}$$

Понижение горизонта воды у щита определится так:

$$a = Li + H - h = 100 \cdot 0{,}0000544 + 0{,}450 - 0{,}444 = 0{,}011 \text{ м.}$$

III) **Определение наивыгоднейшей ширины и длины осушительного канала (задача Дюбюа).** При определении поперечных размеров канала могут быть поставлены еще особые условия, которым должен удовлетворять этот канал, напр., условие наименьшей стоимости его. Как пример приводим следующую задачу, решением которой занимался знаменитый гидравлик Дюбюа.

Для осушения площади M (черт. 220) требуется спроектировать канал прямоугольного поперечного сечения, который мог бы всю воду с этой площади отвести в реку BD, при условии наименьшей стоимости канала. Самый короткий, а потому самый дешевый канал AB не может отвести всю воду, потому что, как видно из чертежа, самый высокий горизонт воды mm в реке *выше дна* осушаемой площади на величину a, хотя горизонт реки ниже горизонта воды на этой площади. Поэтому необходимо провести более длинный канал по направлению CD, где приблизительно $BD = CD = y$. Падение реки на протяжении BD равно $\tau_1 > a$, следоват. уклон реки $i_0 = \frac{\tau_1}{y}$. Итак, падение, которым можно располагать для проведения канала, равно $CE = \tau_1 - a$, а уклон канала будет равен:

$$i = \frac{\tau_1 - a}{y} = i_0 - \frac{a}{y}.$$

Уклон реки i_0 будем считать известным. Глубина воды h в канале равна глубине воды на осушаемой площади; она должна быть также известной. Расход канала Q определится по наибольшему суточному выпадению атмосферных осадков и по притоку из ключей, питающих площадь M. Для определения ширины x и длины y канала имеем уравнение Шези:

$$Q = \omega C\sqrt{Ri} = hxC\sqrt{\left(\frac{hx}{x+2h}\right)\left(i_0 - \frac{a}{y}\right)} = f(x, y) \; . \; . \; . \; . \; (a);$$

здесь живое сечение канала $\omega = hx$; гидравлический радиус $R = \frac{hx}{x+2h}$; коэфф. C определяется по форм. Базена или Г. и Куттера, когда известна обделка канала, а следовательно, и шероховатость. Стоимость канала обусловливается главным образом количеством земляных работ. Объем W выемки канала можно приблизительно положить $W = \omega y = hxy$; следовательно, стоимость земляных работ можно представить так:

$$R = chxy + c' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b),$$

где: c — стоимость одного кубического метра выемки земли и c' — общие расходы по устройству канала.

Требуется определить ширину канала x так, чтобы стоимость R была наименьшей и чтобы при этом условное уравнение (a) было удовлетворено. Как уже не раз было объяснено выше, в анализе задача с такой постановкой называется задачей об отыскании относительного *minimum*'а R. В анализе эта задача приводится к розысканию абсо-

лютного *minimum*'а новой функции $F(x, y)$, составленной из функции R и условного уравнения (a) следующим образом:

$$F(x, y) = R + \lambda f(x, y) = R + \lambda Q,$$

где λ — постоянный множитель, который может быть определен впоследствии. Для нахождения абсолютного *minimum*'а $F(x, y)$ приравниваем нулю производные ее по x по y. Тогда получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial x} + \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial y} + \lambda \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c).$$

К этим двум уравнениям присоединим условное уравнение, получим 3 уравнения, из которых определим x, y и λ.

Из уравнения (c) находим:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -\lambda \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial R}{\partial x} \cdot \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial y} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d).$$

Найдем эти производные; имеем:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = chy; \quad \frac{\partial R}{\partial y} = chx.$$

В уравн. (a) положим для первого приближения коэфф. C постоянным и постоянную часть выражения для Q обозначим через β; тогда

$$Q = Ch\sqrt{h}\sqrt{\left(\frac{x^3}{x+2h}\right)\left(i_0 - \frac{a}{y}\right)} = \beta\sqrt{\left(\frac{x^3}{x+2h}\right)\left(i_0 - \frac{a}{y}\right)}.$$

Отсюда выводим:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \beta\sqrt{i_0 - \frac{a}{y}}\left[\frac{x^2(x+3h)}{\sqrt{x^3(x+2h)^3}}\right];$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \beta\sqrt{\frac{x^3}{x+2h}} \cdot \frac{a}{2y^2\sqrt{i_0 - \frac{a}{y}}}.$$

Подставим этот результат в уравн. (d), получим:

$$\frac{a}{y} = \left(i_0 - \frac{a}{y}\right) \frac{2(x+3e)}{x+2e};$$

Отсюда находим:

$$\frac{a}{y}(3x + 8h) = i_0 \cdot 2(x + 3e) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e).$$

Затем имеем:

$$i_0 - \frac{a}{y} = i_0 \left(\frac{x + 2h}{3x + 8h}\right).$$

Далее из условного уравнения выводим:

$$\frac{Q^2 (x + 2h)}{\beta^2 x^3} = i_0 - \frac{a}{y}.$$

Следоват.

$$\frac{Q^2 (x + 2h)}{\beta^2 x^3} = i_0 \left(\frac{x + 2h}{3x + 8h}\right).$$

Обозначив через m постоянную величину, именно положив:

$$m = \frac{\beta^2 i_0}{Q^2}$$

найдем из предыдущего уравнения следующее кубическое уравнение по x:

$$mx^3 - 3x - 8h = 0.$$

Решив это уравнение по x, найдем искомую ширину канала. Тогда другая неизвестная — длина канала y — определится из равенства (c); имеем:

$$y = \frac{a}{2i_0} \cdot \frac{3x + 8h}{x + 3h}.$$

Численный пример. Требуется осушить площадь в 24324277 м², для которой суточное выпадение атмосферных осадков и приток ключей составляет высоту в 0,0366 м. Для этой цели требуется спроектировать канал прямоугольного поперечного сечения с облицовкой из грубо околотого камня глубиною $h = 1{,}948$ м. При этом уклон реки, в которую спускается этим каналом вся вода с осушаемой площади, равен $i_0 = \frac{1}{3600}$. Дно осушаемой площади лежит на $a = 0{,}974$ м. ниже самого высокого горизонта в реке в точке B. Определить по условию наименьшей стоимости канала ширину x, длину его y и продольный уклон дна канала i.

Прежде всего определяем расход Q, который будет равен:

$$Q = \frac{24\,324\,277 \, . \, 0{,}0366}{86400} = 10{,}3 \text{ м}^3.$$

Канал с облицовкою из грубо околотого камня имеет шероховатость русел 3 категории с коэф. шероховатости $\gamma = 0{,}46$. При такой шероховатости можно для первого приближения принять коэф. $C = 60$. Тогда находим:

$$\beta = Ch^{3/2} = 60 \cdot (1,948)^{3/2} = 163,13$$

$$m = \frac{\beta^2 i_0}{Q^2} = \frac{(163,13)^2}{3600 \,.\, (10,3)^2} = 0.069678; \quad \frac{1}{m} = 14,352.$$

Вышенайденное кубическое уравнение будет иметь такой вид:

$$x^3 - 43,06\,x - 223,66 = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяет значение $x = 8,3$ м.

Тогда живое сечение $\omega = 1,948 \cdot 8,3 = 16,17$ м³. и смачиваемый периметр $\chi = 8,3 + 2 \cdot 1,948 = 12,196$ м.; следоват. гидравлический радиус $R = 1,326$ м. Этой величине R соответствует коэф. $C = 62,2$. В виду близости этого значения для C с принятым для вычисления можно считать полученное значение для x окончательным. Длина канала y равна:

$$y = \frac{0,974 \,.\, 3600}{2} \cdot \frac{3 \,.\, 8,3 + 8 \,.\, 1,948}{8,3 + 3 \,.\, 1,948} = 5018 \text{ м.}$$

Уклон канала равен:

$$i = i_0 - \frac{a}{y} = \frac{1}{3600} - \frac{0,974}{5018} = 0,000278 - 0,000194 = 0,000084.$$

Рюльманн, приводя решение этой же задачи, принимает значение коэф. $C = 36$, что соответствует руслам 5 категории (русла земляные очень шероховатые) и получает такие результаты: ширина канала $x = 13$ м.; длина канала $y = 5076$ м.; уклон канала $i = 0,0000858$. Отсюда видно, что более гладкая обделка ложа канала, как это принято в наших вычислениях, значительно уменьшает ширину канала мало изменяя длину и уклон его.

§ 64. Уравнение неравномерного движения в конечном и дифференциальном виде. Характерным признаком неравномерного движения является изменение средней скорости $V = \frac{Q}{\omega}$ при проходе от одного сечения к другому. Поэтому неравномерное движение имеет место там, где при переходе от одного сечения к другому меняется один или несколько из числа следующих трех элементов: расход Q, продольный уклон i дна и гидр. радиус R. Приведем примеры.

a) Если в канале с постоянными: поперечным сечением, уклоном дна и расходом где-нибудь установить поперечную стенку, преграждающую течение (черт. 221), то вода впереди стенки поднимается и будет переливаться через стенку. Живое сечение и смачиваемый периметр, а следов., R для канала впереди стенки будут изменяться от одного сечения к другому, а потому в канале, в части лежащей выше

стенки на некотором протяжении, будет существовать неравномерное движение.

б) Если канал постоянного поперечного сечения и с постоянным уклоном дна осушает местность, то расход в нем постепенно увеличивается и получается также случай неравномерного движения; тоже самое следует сказать относительно труб и каналов применяемых в канализациях; в них также проявляется неравномерное движение.

в) Водосборные каналы с постоянными: поперечным сечением и продольным уклоном имеют расход постепенно увеличивающийся, а потому здесь мы имеем случай неравномерного движения.

г) Если в канале землечерпанием углубить дно (черт. 222), то на некотором протяжении вверх по течению устанавливается неравномерное движение, так как на этом участке канала глубина воды постепенно уменьшается вниз по течению до углубленного места.

д) В канале, соединяющем два водохранилища A и B (черт. 223), в которых горизонты воды постоянны, устанавливается неравномерное движение; горизонт воды в канале представляется кривой ab или кривой ac, в зависимости от положения горизонта воды в нижнем водохранилище B; только в частном случае, когда горизонт в B имеет положение dd_1 глубина воды в канале получается постоянной и движение в нем будет равномерным.

е) Наконец все реки представляют примеры неравномерного движения, так как в них даже при постоянстве расхода изменяются постепенно уклон, живое сечение и смачиваемый периметр.

В природе очень редко приходится наблюдать случаи равномерного движения, наоборот чаще всего встречаются случаи неравномерного движения. Условия, при которых проявляется неравномерное движение в реках и на которые необходимо обращать внимание, представляются очень сложными по *двум* главным причинам. Первая причина заключается в том, что все элементы реки, за исключением расхода, изменяются от сечения к сечению, при чем это изменение является очень сложным и случайным, напр., изменение ω и χ. Вторая причина состоит в том, что течение больших масс жидкости весьма далеко от того простого течения по линиям параллельным между собою и перпендикулярным к живому сечению, которое предполагается по общим гипотезам гидравлики. Наблюдения в реках над скоростью воды в какой-либо точке живого сечения показывают, что как по величине, так и по направлению, скорость постоянно изменяется, колеблясь около некоторой средней величины. Это явление текучих вод известно с давних пор и называется пульсацией; она существует как в открытых

руслах, так и в закрытых (под напором), как при больших массах протекающей воды, так и при малых.

Теория неравномерного движения возникла и разработана благодаря трудам французских ученых Понсле, Беланже, Кориолиса, Вотье, Дюпюи, Бресса и Буссинека.

В основу теории неравномерного движения кладется *частная* гипотеза, что при этом движении ед. сила трения выражается также как и при равномерном движении, т.-е. что

$$\frac{t}{\Delta} = b_1 V^2$$

где для b_1 надо брать одно из выражений, приведенных в § 57 (формулы Базена и Г. и Куттера). Эта гипотеза допускается на том же основании, как и при неравномерном движении в трубах (§ 49), т.-е. по причине неизвестности более точного выражения для ед. силы трения.

Выведем теперь уравнение неравномерного движения в *конечном виде*. Для этого возьмем два сечения ab и $a'b'$ (черт. 224) в расстоянии $aa' = s$, считая по поверхности воды. Пусть ординаты и скорости в точках a и a' суть: z_0 и V_0; z и V; тогда, рассматривая линию тока aa', получаем:

$$\frac{V^2 - V_0^2}{2g} + (h'' - h_0'') = (z_0 - z) = y = a'c.$$

Здесь член $(h'' - h_0'')$ представляет высоту гидравл. сопротивлений на пути aa' и равен работе сил трения, взятой с обратным знаком, на единицу веса жидкости при перемещении частицы из a в a'. Для определения этого члена возьмем два смежные сечения mm и nn в расстоянии ds друг от друга; скорость частиц этого элементарного слоя можно принять одинаковой и равной V. Элементарная работа силы трения на ед. массы равна:

$$\varphi \cdot ds \cdot \mathrm{Cos}(\varphi; ds).$$

Так как сила трения направлена в сторону обратную движению, то $\mathrm{Cos}(\varphi, ds) = -1$. Трение проявляется по боковой поверхности рассмариваемого элементарного объема равной $\chi \cdot ds$; если t — ед. сила трения, то все трение равно $t \cdot \chi \cdot ds$. Масса жидкости в этом объеме равна $\frac{\Delta}{g} \cdot \omega \cdot ds$; следоват. сила трения φ на единицу массы равна:

$$\varphi = g \cdot \frac{t}{\Delta} \cdot \frac{\chi}{\omega} = g \frac{t}{\Delta} \cdot \frac{1}{R}.$$

Итак элементарная работа силы трения на ед. массы равна

$$\varphi \cdot ds \cdot \mathrm{Cos}\,(\varphi; ds) = -g\,\frac{t}{\triangle}\cdot\frac{ds}{R}.$$

Разделив это выражение на g, получим элементарную работу силы трения на ед. веса равную:

$$-\frac{t}{\triangle}\cdot\frac{ds}{R}.$$

Разобьем всю жидкость между сечением ab и $a'b'$ на подобные элементарные слои и определим для каждого из них работу силы трения; тогда, взяв сумму этих работ с обратным знаком, получим выражение для $(h'' - h_0'')$; следоват.

$$(h'' - h_0'')_{aa'} = \int_0^s \frac{t}{\triangle}\,\frac{ds}{R}.$$

Но только что было упомянуто, что при неравномерном движении величина $\frac{t}{\triangle}$ выражается через $b_1 V^2$; поэтому предыдущее выражение можно написать в таком виде:

$$(h'' - h_0'')_{aa'} = \int_0^s \frac{b_1 V^2}{R}\,ds.$$

Теперь уравнение неравномерного движения в конечном виде можем представить так:

$$\frac{V^2 - V_0^2}{2g} + \int_0^s \frac{b_1 V^2}{R}\,ds = y = z_0 - z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (254).$$

Если между сечениями ab и $a'b'$ расход постоянен, то, называя эти живые сечения через ω_0 и ω_n а переменное живое сечение mm и смачиваемый периметр через ω и χ, представим уравн. (254) в таком виде:

$$y = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\omega_n^2} - \frac{1}{\omega_0^2}\right) + Q^2\int_0^s \frac{b_1\chi}{\omega^3}\,ds \quad \ldots\ldots \quad (255).$$

Помощью этого уравнения можно определить расход Q в реке в тех случаях, когда нельзя применить другого более точного способа, напр., когда нужно определить Q при очень высоком горизонте реки. При таком горизонте не всегда возможно измерять скорости помощью вертушек по причине ледохода, очень больших скоростей и т. п., а часто за пропуском времени такого стояния воды; в последнем случае надо иметь на берегах ясные следы положения высокого горизонта

воды. Для вычисления расхода по предыдущей формуле необходимо определить для сечений ab; $a'b'$ а также для промежуточных сечений величины ω и χ. Обозначим эти величины ω_0; $\omega_1 \ldots$; ω_n и χ_0; $\chi_1 \cdots \chi_n$ а расстояния между ними l_1; $l_2 \ldots l_n$. Также нужно знать падение y, между крайними сечениями. Тогда по этим значениям находим приближенное значение интеграла в уравн. (255) по способу трапеций и в предположении, что основной коэф. b_1 имеет постоянную величину, именно получаем:

$$\int_0^s \frac{\chi}{\omega^3} ds = \frac{l_1}{2}\left(\frac{\chi_0}{\omega_0^3} + \frac{\chi_1}{\omega_1^3}\right) + \frac{l_2}{2}\left(\frac{\chi_1}{\omega_1^3} + \frac{\chi_2}{\omega_2^3}\right) + \cdots + \frac{l_n}{2}\left(\frac{\chi_{n-1}}{\omega_{n-1}^3} + \frac{\chi_n}{\omega_n^3}\right) \ldots$$

Затем из уравн. (255) находим искомый расход Q:

$$Q^2 = \frac{y}{\frac{1}{2g}\left(\frac{1}{\omega_n^2} - \frac{1}{\omega_0^2}\right) + \frac{b_1}{2}\left[\left(\frac{\chi_0}{\omega_0^3} + \frac{\chi_1}{\omega_1^3}\right) l_1 + \left(\frac{\chi_1}{\omega_1^3} + \frac{\chi_2}{\omega_2^3}\right) l_2 + \cdots\right]} \ldots (256).$$

Измеряемые сечения нужно выбирать так, чтобы они не отличались сильно друг от друга.

Пусть все сечения одинаковы, т.-е. $\omega_0 = \omega_1 \cdots = \omega_n$ и $\chi_0 = \chi_1 \cdots = \chi_n$; тогда:

$$\int_0^s \frac{\chi}{\omega^3} \cdot ds = \frac{\chi_0}{\omega_0^3} \cdot s$$

где $s = l_1 + l_2 + \cdots + l_n =$ расстояние между крайними сечениями.

Обозначая

$$i = \frac{y}{s} \text{ и } \sqrt{\frac{1}{b_1}} = C$$

находим:

$$Q^2 = \frac{1}{b_1 \frac{\chi_0}{\omega_0^3}} \cdot \frac{y}{s} = \frac{\omega_0^2 Ri}{b_1} \text{ и } Q = \omega C \sqrt{Ri}$$

что представляет известное уравнение равномерного движения.

Если расстояния между сечениями будут равны, то $l_1 = l_2 = \ldots = \frac{s}{n}$; здесь n — должно быть числом четным; тогда вместо способа трапеций можно выбрать способ Симпсона для приближенного вычисления интеграла; в таком случае имеем:

$$\int_0^s \frac{\chi}{\omega^3} ds = \frac{s}{3 . n}\left[\frac{\chi_0}{\omega_0^3} + \frac{\chi_n}{\omega_n^3} + 4\left(\frac{\chi_1}{\omega_1^3} + \frac{\chi_3}{\omega_3^3} + \cdots\right) + 2\left(\frac{\chi_2}{\omega_2^3} + \frac{\chi_4}{\omega_4^3} + \cdots\right)\right].$$

Численный пример. Пусть расстояние между крайними сечениями равно 400 м.; участок реки на этом протяжении можно разделить на 4 равные части по 100 м.; соответственные живые сечения равны: 102; 108; 110; 105 и 104 м.² и смачиваемые периметры равны: 120; 125; 130; 120 и 110 м. Падение реки на рассматриваемом участке $y = 0{,}4$ м. Основной коэф. b_1 примем постоянным и по Дюпюи равным: $b_1 = 0{,}0003855$. Приближенное значение интеграла найдем по форм Симпсона:

$$\int_0^s \frac{\chi}{\omega^3} ds = \frac{400}{3 \cdot 4}\left[\frac{120}{(102)^3} + \frac{110}{(104)^3} + 4\cdot\left(\frac{125}{(108)^3} + \frac{120}{(105)^3}\right) + 2\cdot\frac{130}{(110)^3}\right] = 0{,}040584.$$

Расход найдем по следующей формуле

$$Q^2 = \frac{y}{\frac{1}{2g}\left(\frac{1}{\omega_n^2} - \frac{1}{\omega_0^2}\right) + b_1 \int_0^s \frac{\chi}{\omega^3} ds} = \frac{0{,}4}{\frac{1}{2 \cdot 9{,}81}\left(\frac{1}{(104)^2} - \frac{1}{(102)^2}\right) + 0{,}0003855 \cdot 0{,}040584}$$

Следоват.

$$Q = \sqrt{\frac{0{,}4}{0{,}000015455}} = 160{,}8 \text{ м}^3.$$

Уравнение неравномерного движения в дифференциальной форме. Для получения уравнения неравномерного движения в дифференциальной форме рассмотрим безконечно тонкий слой между двумя смежными сечениями mm' и nn' (черт. 224); для точки m имеем скорость V и ординату z, а для точки n имеем $(V + dV)$ и $(z - dz)$. Тогда рассматривая бесконечно малую линию тока $mn = ds$ и имея в виду, что гидравл. сопротивления для рассматриваемого слоя, как было определено выше, равны $b_1 \frac{V^2}{R} ds$, получим из уравн. Д. Бернулли, пренебрегая бесконечно малой 2 порядка:

$$\frac{VdV}{g} + \frac{b_1 V^2}{R} ds = z - (z - dz) = dz \quad \ldots \ldots \quad (257).$$

Это же уравнение получим, дифференцируя уравн. (254) по переменным V; s и y; при этом нужно иметь в виду, что $y = (z_0 - z)$ и $y + dy = z_0 - (z - dz)$; следоват. $dy = dz$.

Уравнение (257) и есть искомое; оно выведено в предположении, что точка n поверхности воды лежит ниже точки m той же поверхности, что имеет место для кривой подпора (черт. 221) и для кривой спада (черт. 222); в этих кривых ордината z уменьшается по течению. Но могут быть случаи неравномерного движения, когда точка n лежит

выше точки m. Этот случай осуществляется тогда, когда вода выпускается из сосуда через щитовое отверстие (черт. 225); здесь струя, выйдя из отверстия, сжимается; получается сжатое сечение aa', затем поверхность воды принимает вид кривой ab обращенной выпуклостью книзу; далее на протяжении bc получается значительный местный подъем, так назыв. прыжок воды; наконец на длине cd поверхность имеет вид кривой выпуклой кверху; подходя к водосливу, вода, начиная от точки d, понижается. Итак на кривых ab и cd ордината z увеличивается по течению. Также она увеличивается и в случае перемены уклона с большего на меньший (черт. 237 a). Уравнение неравномерного движения в дифференциальной форме дает возможность определить вид кривой поверхности воды.

Мы теперь рассмотрим *два* случая неравномерного движения; *первый* случай имеет место тогда, когда уклон дна потока, а следоват. скорость V довольно малы, почему членом $\frac{VdV}{g}$ можно пренебречь; здесь мы разберем случай кривых подпора и спада; *второй* случай имеет место тогда, когда означенным членом пренебрегать нельзя.

§ 65. Кривые подпора и спада при малых уклонах дна.

a) **Уравнение кривой поверхности в дифференциальной форме.** Как было выше объяснено, при малых уклонах дна потока скорость V довольно мала и членом $\frac{VdV}{g}$ в дифференциальной форме уравнения неравномерного движения можно пренебречь по его малости; тогда из уравн. (257) получаем:

$$dz = \frac{b_1 V^2}{R} ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (258).$$

Это уравнение справедливо для кривых подпора и спада, т.-е. для кривых, в которых ордината z поверхности уменьшается вниз по течению. На черт. 226 показаны два смежные сечения mn и $m'n'$ в расстоянии dL друг от друга; *кривая подпора* есть кривая mm'; точка m' лежит *ниже* точки m по вертикали на $m'p = dz$; глубина воды в mn равна H, а глубина воды в $m'n'$ равна $(H + dH)$; уклон дна определяется углом α, составляемым линией ma с горизонтом mb.

По чертежу находим:

$$aq = dL \cdot \operatorname{Sin} \alpha ; q \ a = cp = cm' + m'p = dH \cdot \operatorname{Cos} \alpha + dz.$$

Следоват.

$$dL \cdot \operatorname{Sin} \alpha = dH \cdot \operatorname{Cos} \alpha + dz.$$

Так как по условию уклон дна, т.-е. угол α, весьма мал, то $\sin\alpha = tg\alpha = i$ и $\cos\alpha = 1$, а потому

$$dz = idL - dH = \frac{b_1 V^2}{R} dL \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (a).$$

На черт. 227 показаны два смежные сечения mn и $m'n'$ в расстоянии dL друг от друга; кривая mm' представляет *кривую спада*; точка m' лежит ниже точки m по вертикали на $m'p = dz$; глубина воды в сечении mn равна H, а глубина воды в $m'n'$ равна $m'n' = (H - dH)$; угол α представляет угол составляемый дном с горизонтом.

По чертежу находим:

$$ar = dL \cdot \sin\alpha; \; ar = cp = m'p - m'c = dz - dH \cos\alpha.$$

Следоват.

$$dL \cdot \sin\alpha = dz - dH \cos\alpha.$$

И здесь примем, что $\sin\alpha = tg\alpha = i$ и $\cos\alpha = 1$, поэтому

$$dz = idL + dH = \frac{b_1 V^2}{R} dL \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b).$$

Мы соединим оба эти случая и напишем для них одно дифференциальное уравнение (a), если примем для 2 случая, что dH отрицательно.

Из уравн. (a) находим:

$$dH = \left(i - \frac{b_1 V^2}{R}\right) dL \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (c).$$

Применим это уравнение к случаю, когда живое сечение потока можно представить довольно приблизительно в виде *прямоугольника* (черт. 228), в котором глубина H довольно мала сравнительно с шириной сечения b. Тогда

$$\omega = bH; \; \chi = b + 2H; \; R = \frac{bH}{b + 2H}.$$

Так как по условию H очень мало сравнительно с b, то здесь в знаменателе можно членом $2H$ пренебречь и тогда получим $R = H$. На черт. 221 и 222 показаны: кривая подпора и кривая спада. Обе эти кривые, будучи достаточно продолжены вверх по течению, сопрягаются с поверхностью воды, где установилось равномерное движение, т.-е. где поверхность воды параллельна дну. Глубину воды при равномерном движении обозначим через H_0; тогда для скорости V_0 равномерного движения получим по формуле Шези, принимая при этом гидравл. радиус $R_0 = H_0$:

$$V_0 = C\sqrt{R_0 i} = \sqrt{\frac{1}{b_1}}\sqrt{H_0 i}; \text{ отсюда: } i = \frac{b_1 V_0^2}{H_0}.$$

Расход потока в той части, где существует равномерное движение, и в той части, где проявляется неравномерное движение, выразим так:

$$Q = bH_0V_0 = bHV; \text{ следоват.: } V_0 = \frac{HV}{H_0}.$$

Тогда

$$i = \frac{b_1 V_0^2}{H_0} = \frac{b_1}{H_0}\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 V^2; \text{ отсюда } \frac{b_1 V^2}{H} = i\left(\frac{H_0}{H}\right)^3.$$

Теперь уравнение (c) можно переписать так:

$$dH = \left(i - \frac{b_1 V^2}{H}\right) dL = i\left(1 - \frac{H_0^3}{H^3}\right) dL = \frac{H^3 - H_0^3}{H^3} \cdot idL.$$

Из этого выражения находим окончательно:

$$idL = \left(1 + \frac{H_0^3}{H^3 - H_0^3}\right) dH \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (259).$$

Это уравнение дает в дифференциальной форме зависимость между абсциссой L и ординатой H и представляет уравнение кривой поверхности воды; оно было впервые получено *Вейсбахом*.

б) **Уравнение кривой поверхности воды в конечном виде.** Найдем уравнение кривой поверхности воды в конечном виде при помощи уравн. (259). Для этого нужно интегрировать это уравнение; интеграл его находится весьма просто и приводится к *lg nat* и *arctg*. Из уравн. (259) получается:

$$iL = H + H_0^3 \int \frac{dH}{H^3 - H_0^3}.$$

Так как

$$\frac{1}{H^3 - H_0^3} = \frac{1}{3H_0^2}\left[\frac{1}{(H - H_0)} - \frac{H + 2H_0}{H^2 + H_0 H + H_0^2}\right]$$

то

$$\int \frac{dH}{H^3 - H_0^3} = \frac{1}{3H_0^2}\int \frac{dH}{H - H_0} - \frac{1}{3H_0^2}\int \frac{(H + 2H_0)\, dH}{H^2 + H_0 H + H_0^2}.$$

Далее имеем:

$$\frac{H + 2H_0}{H^2 + H_0 H + H_0^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2H + H_0) + 3H_0}{H^2 + H_0 H + H_0^2}.$$

Поэтому:

$$\int\frac{(H+2H_0)\,dH}{H^2+H_0H+H_0^2}=\frac{1}{2}\int\frac{(2H+H_0)\,dH}{H^2+H_0H+H_0^2}+\frac{3H_0}{2}\int\frac{dH}{H^2+H_0H+H_0^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\lg nat\,(H^2+H_0H+H_0^2)+\frac{3H_0}{2}\cdot\frac{2}{H_0\sqrt{3}}\,arctg\left(\frac{2H+H_0}{H_0\sqrt{3}}\right).$$

Соединяя полученные результаты и разделяя обе части равенства на H_0, получаем:

$$\frac{iL}{H_0}=\frac{H}{H_0}+\frac{1}{3}\Big[\lg nat\,(H-H_0)-\frac{1}{2}\lg nat\,(H^2+H_0H+H_0^2)-$$

$$-\sqrt{3}\,arctg\left(\frac{2H+H_0}{H_0\sqrt{3}}\right)\Big]+C.$$

К выражению в больших скобках прибавим величину равную

$$-\frac{1}{3}\lg nat\,H_0+\frac{1}{6}\lg nat\,H_0^2$$

и туже величину, но с обратным знаком припишем к постоянной C; тогда предыдущее равенство можно переписать в таком виде:

$$\frac{iL}{H_0}=\frac{H}{H_0}+\frac{1}{3}\left[\lg nat\left(\frac{H-H_0}{H_0}\right)-\frac{1}{2}\lg nat\left(\frac{H^2+H_0H+H_0^2}{H_0^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\sqrt{3}\,arctg\left(\frac{2H+H_0}{H_0\sqrt{3}}\right)\right]+C_1 \quad \ldots\ldots\ldots (d)$$

или в такой общей форме:

$$\frac{iL}{H_0}=F\left(\frac{H}{H_0}\right)+C_1 \quad \ldots\ldots\ldots (e).$$

Здесь H обозначает глубину воды в сечении отстоящем на L от точки O (черт. 221 и 222), в которой глубина равна H_0, т.-е. глубине равномерного движения, и где начинается кривая подпора. Для другого сечения в расстоянии L_1 получается глубина H_1; тогда уравн. (e) примет вид:

$$\frac{iL_1}{H_0}=F\left(\frac{H_1}{H_0}\right)+C_1.$$

Вычитанием из этого равенства—предыдущего исключаем постоянную C_1 и находим:

$$\frac{i(L_1-L)}{H_0}=F\left(\frac{H_1}{H_0}\right)-F\left(\frac{H}{H_0}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (f).$$

Если в это равенство подставить значения $F\left(\frac{H_1}{H_0}\right)$ и $F\left(\frac{H}{H_0}\right)$, определяемые уравн. (d), то получим окончательно:

$$\frac{i(L_1-L)}{H_0}=\frac{H_1-H}{H_0}+\frac{1}{3}\left[lg\,nat\left(\frac{H_1-H_0}{H-H_0}\right)-\frac{1}{2}lg\,nat\left(\frac{H_1^2+H_0H_1+H_0^2}{H^2+H_0H+H_0^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\sqrt{3}\left\{arctg\left(\frac{2H_1+H_0}{H_0\sqrt{3}}\right)-arctg\left(\frac{2H+H_0}{H_0\sqrt{3}}\right)\right\}\right]\;\ldots\ldots\ldots\quad(260).$$

Здесь *lg nat*—натуральный.

Помощью этого уравнения, зная глубину воды H_1 напр. у плотины, можем определить расстояние $(L_1 - L)$ от плотины того сечения, в котором глубина равна заданной величине H. Чтобы определить L_1—расстояние от плотины точки O, от которой начинается подпорная линия, следует в предыдущем равенстве положить глубину H равной глубине равномерного движения H_0: но тогда получаем для одного из членов, стоящих в больших скобках:

$$lg\,nat\left(\frac{H_1-H_0}{H-H_0}\right)=lg\,nat\left(\frac{H_1-H_0}{0}\right)=lg\,nat\,\infty=\infty.$$

Следоват.

$$\frac{i(L_1-L)}{H_0}=\infty;\text{ а так как в этом случае } L=0$$

то $L_1=\infty$; следов. точка O находится в бесконечно большем расстоянии от плотины; другими словами прямая линия поверхности воды при равномерном движении есть ассимптота подпорной линии. Можно задаться глубиной H, которая достаточно мало разнится от глубины H_0 напр. на 0,01 м., и затем определить L, соответствующее этой глубине. Тогда расстояние $(L_1 - L)$ определенное по форм. (260) можно считать за практическую длину подпорной линии, т.-е. за длину, на которую распространяется подпруда производимая плотиной.

Так как вычисления по точной форм. (260) считаются практиками довольно сложными а потому мало удобными, то с целью упрощения вычислений можно дифференциальное уравн. (259) представить в другом виде, положив в нем:

$$H=H_0+y;\text{ тогда } dH=dy;$$

где y — высота подпруды, т.-е. увеличение глубины H_0 равномерного движения. Затем непосредственным делением находим:

$$idL=\left[1+\frac{H_0^3}{(H_0+y)^3-H_0^3}\right]dH=\left[1+\frac{H_0^3}{3H_0^2y+3H_0y^2+y^3}\right]dy.$$

или, производя деление, имеем:

$$idL = \left[1 + \left(\frac{H_0}{3y} - \frac{1}{3} + \frac{2y}{9H_0} - \frac{y^2}{9H_0^2} + \frac{y^3}{27H_0^3} - \frac{y^5}{85H_0^5} + \cdots\right)\right] dy.$$

Отсюда интегрированием получаем:

$$iL = \frac{H_0}{3} \lg nat\, y + \frac{2}{3} y + \frac{y^2}{9H_0} - \frac{y^3}{27H_0^2} + \frac{y^4}{108H_0^3} + \cdots + C.$$

Для точки в расстоянии L_1 от начала подпруды O (черт. 221) имеем величину подпруды y_1; тогда

$$iL_1 = \frac{H_0}{3} \lg nat\, y_1 + \frac{2}{3} y_1 + \frac{y_1^2}{9H_0} - \frac{y_1^3}{27H_0^2} + \frac{y_1^4}{108H_0^3} + \cdots + C.$$

Вычитанием из этого равенства—предыдущего исключаем C и после разделения всех членов на H_0 находим уравнение подпорной линии в *окончательном* виде:

$$\frac{i(L_1 - L)}{H_0} = \frac{1}{3} \lg nat\left(\frac{y_1}{y}\right) + \frac{2}{3H_0}(y_1 - y) + \frac{1}{9H_0^2}(y_1^2 - y^2) - \frac{1}{27H_0^3}(y_1^3 - y^3) + \cdots (261).$$

Здесь $\lg nat$—натуральный.

В этом выражении можно ограничиться членами с y^3, а иногда даже членами с y^2. При помощи этого уравнения нельзя определить расстояние L_1 начала подпруды O от плотины, но можно найти расстояние $(L_1 - L)$ от плотины такой точки, для которой подпруда y довольно мала, напр. равна 0,01 м. Очевидно, это расстояние можно принять за практическую длину подпруды. По уравн. (261) не трудно построить кривую подпруды по данным H_0; i и y; для этой цели задаемся значениями y'; $y''\cdots$ меньше y_1 и из уравнения определяем расстояния $(L_1 - L')$; $(L_1 - L'')\cdots$ Нанося эти величины на чертеж подобный черт. 221, вычертим искомую кривую.

Численный пример 1. Пусть глубина реки в неподпруженном месте $H_0 = 1{,}0$ м.; уклон реки в естественном состоянии $i = \frac{1}{3000}$; подпруда в некотором сечении $y_1 = 0{,}135$ м. Определить расстояние $(L_1 - L)$ от этого сечения—точки, для которой подпруда $y = 0{,}01$ м. Из уравн. (261) получаем:

$$i(L_1-L)=\frac{1}{3}\,lg\,nat\left(\frac{0{,}135}{0{,}01}\right)+\frac{2}{3}(0{,}135-0{,}01)+\frac{1}{9\,.\,1}(0{,}135^2-0{,}01^2)+\cdots$$

$$=0{,}86756+0{,}08333+0{,}00201-0{,}00009+\cdots=0{,}95282.$$

Следоват. искомое расстояние равно:

$$(L_1-L)=0{,}95282\cdot 3000=2858 \text{ м.}$$

Применение таблиц. Уравнение (261) удобно для определения расстояния (L_1-L), как это видно из только что приведенного численного примера. Для определения величины подпруды y по данным y_1 и расстоянию (L_1-L) это уравнение наоборот очень неудобно, так как оно трансцендентное относительно y. В этом случае могут принести существенную пользу таблицы составленые *Дюпюи* и дополненные *Рюльманном*; при помощи этих таблиц удобно решать все задачи касающиеся подпорной линии. Эти таблицы составлены по следующему плану. Уравнение (261) можно переписать в таком виде:

$$\frac{i(L_1-L)}{H_0}=\frac{1}{3}lg\,nat\left(\frac{\frac{y_1}{H_0}}{\frac{y}{H_0}}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{y_1}{H_0}-\frac{y}{H_0}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{y_1^2}{H_0^2}-\frac{y^2}{H_0^2}\right)-\frac{1}{27}\left(\frac{y_1^3}{H_0^3}-\frac{y^3}{H_0^3}\right)+\cdots$$

Вторая часть этого равенства очевидно представляет разность двух следующих функций:

$$F\left(\frac{y_1}{H_0}\right)=\frac{1}{3}\,lg\,nat\left(\frac{y_1}{H_0}\right)+\frac{2}{3}\frac{y_1}{H_0}+\frac{1}{9}\frac{y_1^2}{H_0^2}-\frac{1}{27}\frac{y_1^3}{H_0^3}+\cdots$$

$$F\left(\frac{y}{H_0}\right)=\frac{1}{3}\,lg\,nat\left(\frac{y}{H_0}\right)+\frac{2}{3}\frac{y}{H_0}+\frac{1}{9}\frac{y^2}{H_0^2}-\frac{1}{27}\frac{y^3}{H_0^3}.$$

Итак уравн. (261) можно представить в таком виде:

$$\frac{i(L_1-L)}{H_0}=F\left(\frac{y_1}{H_0}\right)-F\left(\frac{y}{H_0}\right)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(262).$$

В таблице *А* Дюпюи-Рюльманна даны значения $F\left(\frac{y}{H_0}\right)$ для различных значений аргумента $\left(\frac{y}{H_0}\right)$, начиная от 0,01 до 5 — для кривой подпора.

Употребление этой таблицы видно из решения следующих численных примеров.

Таблица А

Дюпюи-Рюльманна для определения подпорной линии.

$\frac{y}{H_0}$	$F\left(\frac{y}{H_0}\right)$	$\frac{y}{H_0}$	$F\left(\frac{y}{H_0}\right)$	$\frac{y}{H_0}$	$F\left(\frac{y}{H_0}\right)$	$\frac{y}{H_0}$	$F\left(\frac{y}{H_0}\right)$
0,010	0,0067	0,290	1,3243	0,570	1,7589	0,850	2,1095
0,015	0,1452	0,295	1,3336	0,575	1,7647	0,855	2,1154
0,020	0,2444	0,300	1,3428	0,580	1,7714	0,860	2,1213
0,025	0,3222	0,305	1,3519	0,585	1,7781	0,865	2,1272
0,030	0,3863	0,310	1,3610	0,590	1,7848	0,870	2,1331
0,035	0,4411	0,315	1,3700	0,595	1,7914	0,875	1,1390
0,040	0,4889	0,320	1,3789	0,600	1,7980	0,880	2,1449
0,045	0,5316	0,325	1,3877	0,605	1,8046	0,885	2,1508
0,050	0,5701	0,330	1,3964	0,610	1,8112	0,890	2,1567
0,055	0,6053	0,335	1,4050	0,615	1,8178	0,895	2,1625
0,060	0,6376	0,340	1,4136	0,620	1,8243	0,900	2,1683
0,065	0,6677	0,345	1,4221	0,625	1,8308	0,905	2,1742
0,070	0,6958	0,350	1,4306	0,630	1,8373	0,910	2,1800
0,075	0,7222	0,355	1,4390	0,635	1,8438	0,915	2,1858
0,080	0,7482	0,360	1,4473	0,640	1,8503	0,920	2,1916
0,085	0,7708	0,365	1,4556	0,645	1,8567	0,925	2,1974
0,090	0,7933	0,370	1,4638	0,650	1,8631	0,930	2,2032
0,095	0,8148	0,375	1,4720	0,655	1,8695	0,935	2,2090
0,100	0,8353	0,380	1,4801	0,660	1,8759	0,940	2,2148
0,105	0,8550	0,385	1,4882	0,665	1,8823	0,945	2,2206
0,110	0,8739	0,390	1,4962	0,670	1,8887	0,950	2,2264
0,115	0 8922	0,395	1,5041	0,675	1,8951	0,955	2,2322
0,120	0,9098	0,400	1,5119	0,680	1,9014	0,960	2,2380
0,125	0,9269	0,405	1,5197	0,685	1,9077	0,965	2,2438
0,130	0,9434	0,410	1,5275	0,690	1,9140	0,970	2,2496
0,135	0,9595	0,415	1,5353	0,695	1,9203	0,975	2,2554
0,140	0,9751	0,420	1,5430	0,700	1,9266	0,980	2,2611
9,145	0,9903	0,425	1,5507	0,705	1,9329	0,985	2,2668
0,150	1,0051	0,430	1,5583	0,710	1,9392	0,990	2,2725
0,155	1,0195	0,435	1,5659	0,715	1,9455	0,995	2,2782
0,160	1,0335	0,440	1,5734	0,720	1,9517	1,000	2,2839
0,165	1,0473	0,445	1,5809	0,725	1,9579	1,100	2,3971
0,170	1,0608	0,450	1,5884	0,730	1,9641	1,200	2,5083
0,175	1,0740	0,455	1,5958	0,735	1,9703	1,300	2,6179
0,180	1,0869	0,460	1,6032	0,740	1,9765	1,400	2,7264
0,185	1,0995	0,465	1,6106	0,745	1,9827	1,500	2,8337
0,190	1,1119	0,470	1,6179	0,750	1,9888	1,600	2,9401
0,195	1,1241	0,475	1,6252	0,755	1,9949	1,700	3,0458
0,200	1,1361	0,480	1,6324	0,760	2,0010	1,800	3,1508
0,205	1,1479	0,485	1,6396	0,765	2,0071	1,900	3,2553
0,210	1,1595	0,490	1,6468	0,770	2,0132	2,000	3,3594
0,215	1,1709	0,495	1,6540	0,775	2,0193	2,100	3,4631
0,220	1,1821	0,500	1,6611	0,780	2,0254	2,200	3,5664
0,225	1,1931	0,505	1,6682	0,785	2,0315	2,300	3,6694
0,230	1,2040	0,510	1,6753	0,790	2,0375	2,400	3,7720
0,235	1,2148	0,515	1,6823	0,795	2,0435	2,500	3,8745
0,240	1,2254	0,520	1,6893	0,800	2,0495	2,600	3,9768
0,245	1,2358	0,525	1,6963	0,805	2,0555	2,700	4,0789
0,250	1,2461	0,530	1,7032	0,810	2,0615	2,800	4,1808

Таблица *A*

Дюпюи-Рюльманна для определения подпорной линии.

(Продолжение).

$\frac{y}{H_0}$	$F\left(\frac{y}{H_0}\right)$	$\frac{y}{H_0}$	$F\left(\frac{y}{H_0}\right)$	$\frac{y}{H_0}$	$F\left(\frac{y}{H_0}\right)$	$\frac{y}{H_0}$	$F\left(\frac{y}{H_0}\right)$
0,255	1,2563	0,535	1,7101	0,815	2,0675	2,900	4,2823
0,260	1,2664	0,540	1,7170	0,820	2,0735	3,000	4,3845
0,265	1,2763	0,545	1,7239	0,825	2,0795	3,500	4,8911
0,270	1,2861	0,550	1,7308	0,830	2,0885	4,000	5,3958
0,275	1,2958	0,555	1,7376	0,835	2,0915	4,500	5,8993
0,280	1,3054	0,560	1,7444	0,840	2,0975	5,000	6,4018
0,285	1,3149	0,565	1,7512	0,845	2,1035	—	—

Численный пример 2. Глубина реки до устройства плотины $H_0 = 1,05$ м. и уклон $i = 0,000115$; определить расстояние от плотины такой точки, в которой подпор $y = 0,6$ м., если подпор у плотины $y_1 = 1,5$ м.

Так как

$$\frac{y_1}{H_0} = \frac{1,5}{1,05} = 1,4286 \text{ и } \frac{y}{H_0} = \frac{0,6}{1,05} = 0,571$$

то из таблицы *A* Дюпюи-Рюльманна для подпорной линии находим для аргументов 1,429 и 0,571 следующие значения функций:

$$F(1,429) = 2,7575 \text{ и } F(0,571) = 1,7600.$$

Следоват.

$$\frac{i(L_1 - L)}{H_0} = 2,7575 - 1,7600 = 0,9975$$

тогда

$$(L_1 - L) = \frac{0.9975 \,.\, 1,05}{0,000115} = 9108 \text{ м.}$$

Этот пример брали многие авторы и решали его, принимая во внимание в основном уравнении (257) член $\frac{VdV}{g}$; ими получены следующие решения:

по Беланже: $(L_1 - L) = 9244$ м.
„ Брессу: „ $= 9072$ „
„ Грасхофу: „ $= 9066$ „

Полученный нами результат мало разнится от этих чисел.

Численный пример 3. Для этого примера возьмем так называемую задачу *Прони*. Падение реки Сены между пунктами *Moissons* и *Poissy* равно 1,737 м. на длине 2020 м.; глубина H_0 в неподпруженной реке

на этом участке равна 1,59 м. Если в пункте *Moissons* подпор $y = 0,891$ м., то спрашивается, как велик подпор y_1 в пункте *Poissy*.

По этим данным получаем:

$$i(L_1 - L) = 1,737 \text{ м.}; \quad \frac{y}{H_0} = \frac{0,891}{1,59} = 0,56.$$

По этому аргументу находим из таблицы *A* Дюпюи-Рюльманна соответственное значение функции F; именно $F(0,56) = 1,7444$.

Тогда имеем:

$$\frac{i(L_1 - L)}{H_0} = \frac{1,737}{1,59} = 1,0927 = F\left(\frac{y_1}{H_0}\right) - 1,7444.$$

Отсюда находим:

$$F\left(\frac{y_1}{H_0}\right) = 2,8368.$$

По той же таблице получаем, что такому значению функции соответствует значение аргумента $\left(\frac{y_1}{H_0}\right) = 1,50$; следов.

$$y_1 = 1,50 \cdot 1,59 = 2,385 \text{ м.}$$

Уравнение кривой спада. При выводе уравн. (c) было упомянуто, что оно справедливо не только для подпорной линии, но также и для линии спада; только в последнем случае нужно принимать величину dH отрицательной. Далее при выводе уравн. (261) было принято, что для подпорной линии $H = (H_0 + y)$; для кривой спада очевидно нужно положить $H = H_0 - y$, т.-е. y нужно брать со знаком минус. Следоват. в уравн. (261) представляющем уравнение подпорной линии в окончательном виде нужно y заменить через $-y$; тогда член с lg сохранит свой знак; члены содержащие y в четных степенях также сохранят свой знак, а члены с y в нечетных степенях переменят знак. Таким образом мы найдем следующее уравнение кривой спада:

$$\frac{i(L_1 - L)}{H_0} = \frac{1}{3} lgnat\left(\frac{y_1}{y}\right) - \frac{2}{3H_0}(y_1 - y) + \frac{1}{9H_0^2}(y_1^2 - y^2) + \frac{1}{27H_0^3}(y_1^3 - y^3) + \cdots (263);$$

Это уравнение очень удобно для определения неизвестного растояния $(L_1 - L)$ по заданным y и y_1; во когда требуется по известным расстоянию $(L_1 - L)$ и y_1 определить y, то решение этого уравнения является затруднительным, так как оно трансцендентное по y. В виду этого *Дюпюи* составил таблицу, дополненную впоследствии *Рюльманном*, для случая кривой спада. Эта таблица составлена на основании тех же соображений, что и таблица данная ими для кривой подпора. Уравнение (263) можно рассматривать как разность следующих двух функций:

$$f\left(\frac{y_1}{H_0}\right)=\frac{1}{3}lg\,nat\left(\frac{y_1}{H_0}\right)-\frac{2}{3}\frac{y_1}{H_0}+\frac{1}{9}\frac{y_1^2}{H_0^2}+\frac{1}{27}\frac{y_1^3}{H_0^3}+\cdots$$

$$f\left(\frac{y}{H_0}\right)=\frac{1}{3}lg\,nat\left(\frac{y}{H_0}\right)-\frac{2}{3}\frac{y}{H_0}+\frac{1}{9}\frac{y^2}{H_0^2}+\frac{1}{27}\frac{y^3}{H_0^3}+\cdots$$

Итак уравнение (263) можно переписать еще так:

$$\frac{i(L_1-L)}{H_0}=f\left(\frac{y_1}{H_0}\right)-f\left(\frac{y}{H_0}\right)\quad\ldots\ldots\ldots\quad(264).$$

В таблице *B* Дюпюи-Рюльманна приведены значения $f\left(\frac{y}{H_0}\right)$ для различных значений аргумента $\left(\frac{y}{H_0}\right)$ от 0,01 до 1.

Употребление этой таблицы видно из решения следующих численных примеров.

Таблица *B*

Дюпюи-Рюльманна для определения кривой спада.

$\frac{y}{H_0}$	$f\left(\frac{y}{H_0}\right)$	$\frac{y}{H_0}$	$f\left(\frac{y}{H_0}\right)$	$\frac{y}{H_0}$	$f\left(\frac{y}{H_0}\right)$	$\frac{y}{H_0}$	$f\left(\frac{y}{H_0}\right)$
0,010	0,0067	0,175	0,8410	0,340	0,9632	0,505	1,0043
0,015	0,1251	0,180	0,8473	0,345	0,9652	0,510	1,0050
0,020	0,2287	0,185	0,8533	0,350	0,9671	0,515	1,0057
0,025	0,2888	0,190	0,8591	0,355	0,9690	0,520	1,0063
0,030	0,3463	0,195	0,8647	0,360	0,9708	0,525	1,0069
0,035	0,3943	0,200	0,8700	0,365	0,9725	0,530	1,0075
0,040	0,4356	0,205	0,8751	0,370	0,9742	0,535	1,0081
0,045	0,4715	0,210	0,8801	0,375	0,9759	0,540	1,0086
0,050	0,5034	0,215	0,8848	0,380	0,9775	0,545	1,0091
0,055	0,5319	0,220	0,8895	0,385	0,9790	0,550	1,0096
0,060	0,5577	0,225	0,8939	0,390	0,9805	0,555	1,0101
0,065	0,5811	0,230	0,8982	0,395	0,9819	0,560	1,0106
0,070	0 6025	0,235	0,9023	0,400	0,9833	0,565	1,0111
0,075	0,6222	0,240	0,9063	0,405	0,9847	0,570	1,0116
0,080	0,6405	0,245	0,9101	0,410	0,9860	0,575	1,0121
0,085	0,6575	0,250	0,9138	0,415	0,9873	0,580	1,0125
0,090	0,6733	0,255	0,9174	0,420	0,9885	0,585	1,0129
0,095	0,6881	0,260	0,9209	0,425	0,9897	0,590	1,0133
0,100	0,7020	0,265	0,9242	0,430	0,9909	0,595	1,0137
0,105	0,7150	0,270	0,9275	0,435	0,9920	0,600	1,0140
0,110	0,7273	0,275	0,9306	0,440	0,9931	0,650	1,0166
0,115	0,7389	0,280	0,9336	0,445	0,9941	0,700	1,0184
0,120	0,7500	0,285	0,9365	0,450	0,9951	0,750	1,0194
0,125	0,7603	0,290	0,9394	0,455	0,9961	0,800	1,0199
0,130	0,7703	0,295	0,9421	0,460	0,9971	0,850	1,0202
0,135	0,7796	0,300	0,9448	0,465	0,9980	0,900	1,0203
0,140	0,7886	0,305	0,9473	0,470	0,9989	0,950	1,0203
0,145	0,7971	0,310	0,9498	0,475	0,9998	1,000	1,0203
0,150	0,8053	0,315	0,9522	0,480	1,0006	—	—
0,155	0,8131	0,320	0,9546	0,485	1,0014	—	—
0,160	0,8205	0,325	0,9569	0,490	1,0022	—	—
0,165	0,8276	0,330	0,9591	0,495	1,0029	—	—
0,170	0,8344	0,335	0,9612	0,500	1,0036	—	—

Численный пример 4. Положим, река в естественном состоянии имеет глубину $H_0 = 1,2$ м.; уклон поверхности $i = 0,0003$. Землечерпанием достигнуто понижение горизонта воды у уступа $y_1 = 0,36$ м. (черт. 222); определить расстояние от уступа до той точки, для которой понижение $y = 0,12$ м.

По этим данным находим:

$$\frac{y_1}{H_0} = \frac{0,36}{1,2} = 0,3; \qquad \frac{y}{H_0} = \frac{0,12}{1,2} = 0,1 .$$

Затем из таблицы B получаем для аргументов 0,3 и 0,1 следующие значения функций f:

$$f\left(\frac{y_1}{H_0}\right) = 0,9448; \qquad f\left(\frac{y}{H_0}\right) = 0,7020.$$

Тогда из уравнения (264) получаем:

$$\frac{i(L_1 - L)}{H_0} = 0,9448 - 0,7020 = 0,2428;$$

следовательно,

$$(L_1 - L) = \frac{0,2428 . 1,2}{0,0003} = 971 \text{ м.}$$

Численный пример 5. Пусть глубина реки в естественном состоянии равна $H_0 = 1,0$ м., а уклон поверхности воды $i = \frac{1}{4000}$; землечерпанием достигнуто понижение воды на уступе $y_1 = 0,225$ м.; определить понижение воды y в расстоянии $(L_1 - L) = 1000$ м. от уступа. По этим данным вычисляем:

$$\frac{i(L_1 - L)}{H_0} = \frac{1000}{1 . 4000} = 0,25; \qquad \frac{y_1}{H_0} = 0,225;$$

затем из таблицы B находим для аргумента 0,225 значение $f(0,225) = 0,8939$. Далее из уравнения (264) определяем значение $f\left(\frac{y}{H_0}\right)$, именно имеем:

$$f\left(\frac{y}{H_0}\right) = 0,8939 - 0,25 = 0,6439.$$

По таблице B для этого значения функции находим по интерполяции аргумент $\frac{y}{H_0} = 0,081$; тогда искомое $y = 0,081$ м.

Примечание. В следующем § 66 указано, что для определения кривых спада в общем случае Брессом составлена особая таблица C. Эту таблицу следует применять предпочтительно перед табли-

цей B Дюпюи-Рюльманна по той причине, что по таблице B кривая спада может не достигнуть конца канала. При пользовании таблицей Бресса такой случай не встречается.

§ 66. Кривые подпора и спада в общем случае. В § 65 были рассмотрены кривые подпора и спада при малых уклонах реки, когда скорость довольно мала и членом $\frac{VdV}{g}$ в дифференциальном уравнении неравномерного движения можно пренебречь. Теперь рассмотрим это уравнение в общем случае, т.-е. не пренебрегая этим членом, выражающим живую силу потока; следоват., будем иметь такое уравнение:

$$dz = \frac{VdV}{g} + \frac{b_1 V^2}{R} ds \qquad (257).$$

При этом, как и в случае рек с малым уклоном, будем рассматривать лишь реки, в которых живое сечение можно приблизительно принять за *прямоугольник* шириною a и глубиною H, при значительном превышении ширины над глубиною; тогда гидравлический радиус $R = \frac{aH}{a+2H}$ можно приблизительно принять равным H, так как в знаменателе величина $2H$ довольно мала сравнительно с a. Расход Q для сечения mn (черт. 226) выразится так: $Q = aHV$; так как мы рассматриваем случай, когда Q = постоянно, то дифференцированием находим:

$$aHdV + aVdH = 0; \quad \text{отсюда:} \quad dV = -\frac{V}{H}dH;$$

затем получаем:

$$\frac{VdV}{g} = -\frac{V^2}{gH}dH = -\frac{Q^2dH}{ga^2H^3}.$$

Как было показано в § 65, из рассмотрения чертежа 226 получаем:

$$dz = idL - dH; \quad \text{следоват.,} \quad dL = ds = \frac{dz + dH}{i}.$$

Подставляя найденные значения для $\frac{VdV}{g}$ и ds в уравн. (257) и полагая в нем:

$$R = H \text{ и } V^2 = \left(\frac{Q}{aH}\right)^2$$

находим:

$$dz = -\frac{Q^2dH}{ga^2H^3} = \frac{b_1Q^2(dz + dH)}{iaH^3}.$$

Отсюда определяем dz; именно получаем:

$$dz = \frac{\left(1 - \frac{i}{b_1 g}\right) \cdot \frac{b_1 Q^2}{ia^2 H^3} \cdot dH}{1 - \frac{b_1 Q^2}{ia^2 H^3}} .$$

Пусть в реке при равномерном движении скорость и глубина равны V_0 и H_0; тогда по формуле Шези имеем:

$$V_0 = C\sqrt{Ri} = \sqrt{\frac{1}{b_1}}\sqrt{H_0 i}; \text{ отсюда } H_0 i = b_1 V^2 = \frac{b_1 Q^2}{a^2 H^2} .$$

Следовательно,

$$\left(\frac{H_0}{H}\right)^3 = \frac{b_1 Q^2}{ia^2 H^3} .$$

Поэтому предыдущее равенство можно представить в таком виде:

$$dz = \frac{\left(1 - \frac{i}{b_1 g}\right)\left(\frac{H_0}{H}\right)^3 dH}{1 - \left(\frac{H_0}{H}\right)^3} .$$

Обозначим

$$h = \frac{H}{H_0}; \text{ тогда } dH = H_0 dh$$

и выражение для dz примет такой окончательный вид:

$$dz = H_0\left(1 - \frac{i}{b_1 g}\right)\frac{dh}{h^3 - 1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (265).$$

Это искомое дифференциальное уравнение подпорной линии.

Уравнение кривой поверхности воды в конечном виде. Оно получается интегрированием предыдущего уравнения. Находим:

$$z = H_0\left(1 - \frac{i}{b_1 g}\right)\int \frac{dh}{h^3 - 1} + C \quad \ldots \ldots \ldots (a)$$

Найдем этот интеграл. Так как:

$$\frac{1}{h^3 - 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{h - 1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{h + 2}{h^2 + h + 1},$$

то

$$\int \frac{dh}{h^3 - 1} = \frac{1}{3}\int \frac{dh}{h - 1} - \frac{1}{3}\int \frac{(h + 2)dh}{h^2 + h + 1} = \frac{1}{3} lg\, nat(h - 1) - \frac{1}{3}\int \frac{(h + 2)dh}{h^2 + h + 1} .$$

Затем имеем:

$$\frac{h + 2}{h^2 + h + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2h + 1}{h^2 + h + 1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{h^2 + h + 1} .$$

Поэтому

$$\int\frac{(h+2)dh}{h^2+h+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(2h+1)dh}{h^2+h+1}+\frac{3}{2}\int\frac{dh}{h^2+h+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\,lg\,nat(h^2+h+1)+\frac{3}{2}\int\frac{dh}{h^2+h+1}.$$

Наконец,

$$\int\frac{dh}{h^2+h+1}=\int\frac{d(h+\frac{1}{2})}{(h+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\int\frac{dx}{x^2+k^2}.$$

Здесь обозначено $h+\frac{1}{2}=x$ и $\frac{3}{4}=k^2$; тогда выводим:

$$\int\frac{dx}{x^2+k^2}=\frac{1}{k}\,arctg\,\frac{x}{k}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,arctg\left(\frac{2h+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Соединяя полученные результаты, находим:

$$\int\frac{dh}{h^3-1}=\frac{1}{6}lg\,nat\left[\frac{(h-1)^2}{h^2+h+1}\right]-\frac{\sqrt{3}}{3}\,arctg\left(\frac{2h+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Теперь уравн. (a) получает такой вид:

$$z=H_0\left(1-\frac{i}{b_1g}\right)\left[\frac{1}{6}lg\,nat\left\{\frac{(h-1)^2}{h^2+h+1}\right\}-\frac{\sqrt{3}}{3}\,arctg\left(\frac{2h+1}{\sqrt{3}}\right)+C\right]\;.\;.\;.\;(b),$$

или

$$z=\varphi(h)+C=\varphi\left(\frac{H}{H_0}\right)+C\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(c).$$

Постоянную C можно определить по какому-либо условию, которому удовлетворяет подпорная линия. Напр., можно определить C, если взять за ось X, от которой считаются ординаты z, горизонтальную прямую, проходящую через нисшую точку M_1 поверхности воды у плотины. Если глубина воды у плотины H_1, то соответственное значение $h_1=\left(\frac{H_1}{H_0}\right)$. Очевидно, что при $h=h_1$ ордината z должна равняться *нулю* при линии принятой за ось X. Подставим эти значения h_1 и $z=0$ в уравн. (b) и полученный результат вычтем из уравн. (b); тогда постоянная C будет исключена и мы найдем искомое уравнение подпорной линии в таком общем виде:

$$z=\varphi(h)-\varphi(h_1)=\varphi\left(\frac{H}{H_0}\right)-\varphi\left(\frac{H_1}{H_0}\right).$$

Этот способ определения C вполне естественный, но приводит к довольно сложному выражению для z. Поэтому для этого определения удобнее воспользоваться приемом, который был предложен французским

гидравликом *Брессом*. Он предположил, что плотина, подпирающая воду в реке, находится в безконечно большом расстоянии от начала подпорной линии; очевидно, что глубина воды у такой плотины $H = \infty$; тогда $h = \left(\frac{H}{H_0}\right) = \infty$. За ось X, от которой считаются ординаты z, Бресс принимает горизонтальную линию, проходящую через самую пониженную точку M_0 поверхности воды у означенной воображаемой плотины. Следовательно, будем иметь у плотины: $h = \infty$ и $z = 0$.

Найдем, какие значения получают при $h = \infty$ члены, стоящие в больших скобках уравн. (b). Имеем:

$$lg\,nat\left\{\frac{(h-1)^2}{h^2+h+1}\right\}_{h=\infty} = lg\,nat\left\{\frac{h^2\left(1-\frac{1}{h}\right)^2}{h^2\left(1+\frac{1}{h}+\frac{1}{h^2}\right)}\right\}_{h=\infty} = lg\,nat\,1 = 0.$$

Затем:

$$arctg\left(\frac{2h+1}{\sqrt{3}}\right)_{h=\infty} = arctg\,\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда из уравн. (b) находим:

$$C = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\frac{\pi}{2}.$$

Далее имеем:

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}\,arctg\left(\frac{2h+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\frac{\pi}{2} - arctg\left(\frac{2h+1}{\sqrt{3}}\right)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\,arcCotg\left(\frac{2h+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Таким образом уравн. (b) можно представить в таком виде:

$$z = H_0\left(1-\frac{i}{b_1 g}\right)\left[\frac{1}{6}\,lg\,nat\left\{\frac{(h-1)^2}{h^2+h+1}\right\} + \frac{\sqrt{3}}{3}\,arcCotg\left(\frac{2h+1}{\sqrt{3}}\right)\right] \ldots (d).$$

Обозначим для краткости письма:

$$-\Psi(h) = \frac{1}{6}\,lg\,nat\left\{\frac{(h-1)^2}{h^2+h+1}\right\} + \frac{\sqrt{3}}{3}\,arcCotg\left(\frac{2h+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Тогда уравн. (d) можем переписать еще так:

$$z = -H_0\left(1-\frac{i}{b_1 g}\right)\Psi(h) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e).$$

По этому уравнению можно для всякого h вычислить соответственное значение z; но по этим величинам нельзя построить подпорную линию.

В виду этого исключим ординату z из этого уравнения и заменим ее через L—через расстояние точки M на подпорной линии от начала O подпорной линии OMM_1 (черт. 221). Из рассмотрения черт. 226 было выведено выше такое равенство:

$$idL = dz + dH = dz + H_0 \cdot dh.$$

Интегрированием получаем отсюда:

$$iL = z + H_0 \cdot h + C.$$

Пусть для точки M_1 на подпорной линии имеем: $L = L_1$; $z = z_1$ и $h = h_1$; тогда

$$iL_1 = z_1 + H_0 h_1 + C.$$

Вычтя из этого равенства предыдущее, исключаем постоянную C и получаем по разделении на H_0:

$$\frac{i(L_1 - L)}{H_0} = \frac{(z_1 - z)}{H_0} + (h_1 - h) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (f).$$

С другой стороны для тех же точек M_1 и M уравн. (e) дает:

$$z_1 = -H_0\left(1 - \frac{i}{b_1 g}\right)\Psi(h_1) \quad \text{и} \quad z = -H_0\left(1 - \frac{i}{b_1 g}\right)\Psi(h).$$

Вычитанием второго равенства из первого находим по разделении на H_0:

$$\frac{z_1 - z}{H_0} = \left(1 - \frac{i}{b_1 g}\right)\left[\Psi(h) - \Psi(h_1)\right].$$

Подставляя этот результат в равенство (f), получаем *искомое уравнение* подпорной линии в таком окончательном виде:

$$\frac{i(L_1 - L)}{H_0} = (h_1 - h) - \left(1 - \frac{i}{b_1 g}\right)\left[\Psi(h_1) - \Psi(h)\right] \;.\;.\;. (266).$$

Это уравнение дает зависимость между L и h, т.-е. между расстоянием какого-либо сечения mn от начала подпорной линии O (черт. 221) и глубиной $H = H_0 h$ в этом же сечении; при чем должны быть даны L_1 и h_1, т.-е. расстояние другого какого-либо сечения $m_1 n_1$ от той же точки и глубина $H_1 = H_0 h_1$ в этом сечении. Подпорная линия OMM_1 отнесена к осям O_1X_1 и OO_1. В противоположность кривым подпора и спада, найденным в § 65 для малых уклонов, здесь кривая зависит от основного коэффициента трения b_1. Для облегчения вычислений *Бресс* составил *две* таблицы для значений $\Psi(h)$ для различных значений аргумента h, именно таблицу C для *кривой спада* при значениях h от $h = 0$ до $h = 1$ и таблицу D *для кривой подпора* при значениях h от $h = 1$ до $h = \infty$.

ТАБЛИЦА С

Бресса для определения кривой спада.

h	Ψ (h)	h	Ψ (h)	h	Ψ (h)	h	Ψ (h)
0,00	—0,6046	0,44	—0,1547	0,790	0,3258	0,944	0,8226
0,01	—0,5946	0,45	—0,1438	0,795	0,3357	0,946	0,8354
0,02	—0,5846	0,46	—0,1327	0,800	0,3459	0,948	0,8487
0,03	—0,5746	0,47	—0,1216	0,805	0,3562	0,950	0,8624
0,04	—0,5646	0,48	—0,1104	0,810	0,3668	0,952	0,8767
0,05	—0,5546	0,49	—0,0991	0,815	0,3776	0,954	0,8916
0,06	—0,5446	0,50	—0,0878	0,820	0,3886	0,956	0,9071
0,07	—0,5346	0,51	—0,0763	0,825	0,3993	0,958	0,9233
0,08	—0,5246	0,52	—0,0647	0,830	0,4114	0,960	0,9402
0,09	—0,5146	0,53	—0,0530	0,835	0,4232	0,962	0,9580
0,10	—0,5046	0,54	—0,0412	0,840	0,4353	0,964	0,9767
0,11	—0,4946	0,55	—0,0293	0,845	0,4478	0,966	0,9965
0,12	—0,4845	0,56	—0,0172	0,850	0,4605	0,968	1,0174
0,13	—0,4745	0,57	—0,0050	0,855	0,4737	0,970	1,0396
0,14	—0,4645	0,58	0,0074	0,860	0,4872	0,971	1,0512
0,15	—0,4545	0,59	0,0199	0,865	0,5012	0,972	1,0632
0,16	—0,4444	0,60	0,0325	0,870	0,5156	0,973	1,0757
0,17	—0,4344	0,61	0,0454	0,875	0,5305	0,974	1,0886
0,18	—0,4243	0,62	0,0584	0,880	0,5459	0,975	1,1020
0,19	—0,4143	0,63	0,0716	0,885	0,5619	0,976	1,1160
0,20	—0,4042	0,64	0,0851	0,890	0,5785	0,977	1,1305
0,21	—0,3941	0,65	0,0987	0,895	0,5958	0,978	1,1457
0,22	—0,3840	0,66	0,1127	0,900	0,6138	0,979	1,1615
0,23	—0,3739	0,67	0,1268	0,902	0,6213	0,980	1,1781
0,24	—0,3638	0,68	0,1413	0,904	0,6289	0,981	1,1955
0,25	—0,3536	0,69	0,1560	0,906	0,6366	0,982	1,2139
0,26	—0,3434	0,70	0,1711	0,908	0,6445	0,983	1,2333
0,27	—0,3333	0,705	0,1787	0,910	0,6525	0,984	1,2538
0,28	—0,3230	0,710	0,1864	0,912	0,6607	0,985	1,2757
0,29	—0,3128	0,715	0,1943	0,914	0,6691	0,986	1,2990
0,30	—0,3025	0,720	0,2022	0,916	0,6776	0,987	1,3241
0,31	—0,2923	0,725	0,2102	0,918	0,6864	0,988	1,3511
0,32	—0,2819	0,730	0,2184	0,920	0,6953	0,989	1,3804
0,33	—0,2716	0,735	0,2266	0,922	0,7045	0,990	1,4125
0,34	—0,2612	0,740	0,2350	0,924	0,7138	0,991	1,4480
0,35	—0,2508	0,745	0,2434	0,926	0,7234	0,992	1,4876
0,36	—0,2403	0,750	0,2520	0,828	0,7332	0,993	1,5324
0,37	—0,2298	0,755	0,2607	0,930	0,7433	0,994	1,5841
1,38	—0,2192	0,760	0,2696	0,932	0,7537	0,995	1,6452
0,39	—0,2086	0,765	0,2785	0,934	0,7643	0,996	1,7200
0,40	—0,1980	0,770	0,2877	0,936	0,7753	0,997	1,8162
0,41	—0,1872	0,775	0,2970	0,938	0,7866	0,998	1,9517
0,42	—0,1765	0,780	0,3064	0,940	0,7982	0,999	2,1831
0,43	—0,1656	0,785	0,3160	0,942	0,8102	—	—

ТАБЛИЦА D

Бресса для определения кривой подпора.

$\frac{1}{h}$	$\Psi(h)$	$\frac{1}{h}$	$\Psi(h)$	$\frac{1}{h}$	$\Psi(h)$	$\frac{1}{h}$	$\Psi(h)$
0,999	2,1834	0,940	0,8188	0,780	0,3886	0,42	0,0909
0,998	1,9523	0,938	0,8079	0,775	0,3813	0,41	0,0865
0,997	1,8172	0,936	0,7973	0,770	0,3741	0,40	0,0821
0,996	1,7213	0,934	0,7871	0,765	0,3671	0,39	0,0779
0,995	1,6469	0,932	0,7772	0,760	0,3603	0,38	0,0738
0,994	1,5861	0,930	0,7675	0,755	0,3536	0,37	0,0699
0,993	1,5348	0,928	0,7581	0,750	0,3470	0,36	0,0660
0,992	1,4902	0,926	0,7490	0,745	0,3406	0,35	0,0623
0,991	1,4510	0,924	0,7401	0,740	0,3343	0,34	0,0587
0,990	1,4159	0,922	0,7315	0,735	0,3282	0,33	0,0553
0,989	1,3841	0,920	0,7231	0,730	0,3221	0,32	0,0519
0,988	1,3551	0,918	0,7149	0,725	0,3162	0,31	0,0486
0,987	1,3284	0,916	0,7069	0,720	0,3104	0,30	0,0455
0,986	1,3037	0,914	0,6990	0,715	0,3047	0,29	0,0425
0,985	1,2807	0,912	0,6914	0,710	0,2991	0,28	0,0395
0,984	1,2592	0,910	0,6839	0,705	0,2937	0,27	0,0367
0,983	1,2390	0,908	0,6766	0,700	0,2883	0,26	0,0340
0,982	1,2199	0,906	0,6695	0,69	0,2778	0,25	0,0314
0,981	1,2019	0,904	0,6625	0,68	0,2677	0,24	0,0290
0,980	1,1848	0,902	0,6556	0,67	0,2580	0,23	0,0266
0,979	1,1686	0,900	0,6489	0,66	0,2486	0,22	0,0243
0,978	1,1531	0,895	0,6327	0,65	0,2395	0,21	0,0221
0,977	1,1383	0,890	0,6173	0,64	0,2306	0,20	0,0201
0,976	1,1241	0,885	0,6025	0,63	0,2221	0,19	0,0181
0,975	1,1105	0,880	0,5884	0,62	0,2138	0,18	0,0162
0,974	1,0974	0,875	0,5749	0,61	0,2058	0,17	0,0145
0,973	1,0848	0,870	0,5619	0,60	0,1980	0,16	0,0128
0,972	1,0727	0,865	0,5494	0,59	0,1905	0,15	0,0113
0,971	1,0610	0,860	0,5374	0,58	0,1832	0,14	0,0098
0,970	1,0497	0,855	0,5258	0,57	0,1761	0,13	0,0085
0,968	1,0282	0,850	0,5146	0,56	0,1692	0,12	0,0072
0,966	1,0080	0,845	0,5037	0,55	0,1625	0,11	0,0061
0,964	0,9890	0,840	0,4932	0,54	0,1560	0,10	0,0050
0,962	0,9709	0,835	0,4831	0,53	0,1497	0,09	0,0041
0,960	0,9539	0,830	0,4733	0,52	0,1435	0,08	0,0032
0,958	0,9376	0,825	0,4637	0,51	0,1376	0,07	0,0025
0,956	0,9221	0,820	0,4544	0,50	0,1318	0,06	0,0018
0,954	0,9073	0,815	0,4454	0,49	0,1262	0,05	0,0013
0,952	0,8931	0,810	0,4367	0,48	0,1207	0,04	0,0008
0,950	0,8795	0,805	0,4281	0,47	0,1154	0,03	0,0005
0,948	0,8665	0,800	0,4198	0,46	0,1102	0,02	0,0002
0,946	0,8539	0,795	0,4117	0,45	0,1052	0,01	0,0001
0,944	0,8418	0,790	0,4039	0,44	0,1003		
0,942	0,8301	0,785	0,3962	0,43	0,0955		

В общем случае, так же как и при малых уклонах, нельзя определить расстояния, на котором находится от плотины начало кривой подпора, но можно определить глубину H в каком-либо сечении, очень мало отличающуюся от глубины H_0 равномерного движения, напр., отличающуюся на 0,01 м. При помощи означенных таблиц Бресса решим следующие численные примеры.

Численный пример 1. Пусть расход реки $Q = 40$ куб. м.; ширина реки $a = 70$ м.; уклон поверхности реки в естественном состоянии $i = 0{,}000115$; плотина подпирает воду на высоту $y_1 = H_1 - H_0 = 1{,}5$ м.

Определить, в каком расстоянии $(L_1 - L)$ от плотины находится сечение реки, в котором подпор $y = H - H_0 = 0{,}6$ м.

Найдем глубину H_0, соответствующую равномерному движению; при этом примем, что по степени шероховатости русла эту реку можно отнести к 4 категории Базена, т.-е примем коэфф. $\gamma = 0{,}85$. Тогда довольно приблизительно можно принять основной коэфф. $b_1 = 0{,}00044$ и $C = 48$. Затем из форм. Шези:

$$V_0 = C\sqrt{R_0 i} = \sqrt{\frac{1}{b_1}}\sqrt{H_0 i} = \frac{Q}{aH_0}$$

находим:

$$H_0^3 = b_1 \cdot \frac{Q^2}{a^2} \cdot \frac{1}{i} = 0{,}00044 \cdot \left(\frac{40}{70}\right)^2 \cdot \frac{1}{0{,}000115} \text{ и } H_0 = 1{,}077 \text{ м.}$$

Следовательно, глубина реки у плотины $H_1 = H_0 + y_1 = 2{,}577$ м. а глубина в рассматриваемом сечении $H = H_0 + y = 1{,}677$ м. Тогда получается:

$$h_1 = \frac{H_1}{H_0} = 2{,}393; \quad h = \frac{H}{H_0} = 1{,}557 .$$

Из таблицы D Бресса находим по интерполяции:

$$\Psi(h_1) = 0{,}0900; \qquad \Psi(h) = 0{,}2324.$$

Далее вычисляем:

$$\frac{i}{b_1 g} = \frac{0{,}000115}{0{,}00044 . 9{,}81} = 0{,}02664.$$

Теперь из уравн. (266) получаем:

$$\frac{i(L_1 - L)}{H_0} = (2{,}393 - 1{,}557) + (1 - 0{,}02664)(0{,}2324 - 0{,}0900) = 0{,}9746.$$

Отсюда искомое расстояние:

$$(L_1 - L) = 0{,}9746 \cdot \frac{1{,}077}{0{,}000115} = 9127 \text{ м.}$$

Многие авторы рассматривали эту задачу и нашли следующие значения для искомого расстояния: Беланже — 9244 м.; Бресс — 9063 м. При этом Бресс принимает основной коэфф. $b_1 = 0{,}0004$, т.-е. $C = 50$ и находит $H_0 = 1{,}043$ м. Грасхоф сперва принимает $H_0 = 1{,}05$ и и $C = 49$, что соответствует коэфф. n в формуле Г. и Куттера: $n = 0{,}0204$, и находит для первого приближения расстояние 9066 м., а потом по более точному вычислению находит его равным 8501 м.

Численный пример 2. Пусть расход реки $Q = 80$ куб. м.; ширина реки $a = 100$ м.; уклон реки в естественном состоянии $i = 0{,}0001$; подпор у плотины $y_1 = 2{,}0$ м. Определить, как велик подпор y в сечении, отстоящем от плотины в расстоянии $(L_1 - L) = 8000$ м.

Находим глубину H_0 до устройства плотины, принимая $b_1 = 0{,}0004$:

$$H_0^3 = b_1 \left(\frac{Q}{a}\right)^2 \frac{1}{i} = 0{,}0004 \left(\frac{80}{100}\right)^2 \frac{1}{0{,}0001} = 2{,}56 \text{ и } H_0 = 1{,}368 \text{ м.}$$

Следоват., $H_1 = H_0 + y_1 = 3{,}368$; $h_1 = \dfrac{H_1}{H_0} = \dfrac{3{,}368}{1{,}368} = 2{,}462$.

Затем вычисляем:

$$\frac{i}{b_1 g} = \frac{0{,}0001}{0{,}0004 . 9{,}81} = 0{,}0255.$$

Далее имеем:

$$\frac{i(L_1 - L)}{H_0} = \frac{0{,}0001 . 8000}{3{,}368} = 0{,}2375.$$

Наконец, по таблице D Бресса находим: $\Psi(h_1) = 0{,}0848$.

Тогда равенство (266) дает такой результат:

$$0{,}2375 = 2{,}462 - h - (1 - 0{,}0255)[\Psi(h) - 0{,}0848].$$

Отсюда получаем:

$$0{,}9745\,\Psi(h) - h = -2{,}1419.$$

Это трансцендентное уравнение по h решаем по способу постепенных приближений при помощи таблицы D и получаем $h = 2{,}24$. Тогда $\Psi(h) = 0{,}1034$; следоват., левая часть уравнения равна $-2{,}1392$, что довольно близко к значению правой части. Удерживая это значение для h, находим: $H = H_0 \cdot h = 3{,}064$ м.; следоват., подпор

$$y = H - H_0 = 1{,}696 \text{ м.}$$

§ 67. Прыжок воды. При соблюдении некоторых условий поверхность воды в канале может быстро подняться на довольно значительную высоту (черт. 229). Такое явление называется прыжком или

скачком воды и впервые было замечено и изучено итальянским гидравликом *Бидоном* в 1820 г. Оно имеет некоторую аналогию с быстрым расширением струи, происходящим от внезапного увеличения размеров трубы. Совершенно так же как в трубе (где жидкость движется под напором), в открытом канале (движение жидкости без напора) в этом случае проявляются значительные гидравлические сопротивления, которые определяются по существу тем же самым способом.

Однако между тем и другим явлением наблюдается существенное различие, а именно: при прыжке воды нет полости с жидкостью, находящеюся в состоянии близком к покою. А между тем значительные гидравлические сопротивления в трубе происходят именно вследствие существования этой полости.

Проведем поперечные сечения ab и cd (черт. 229) впереди прыжка и позади его. Для упрощения предположим, что дно канала и поверхность воды, за исключением места прыжка, горизонтальны, что возможно допустить, так как обыкновенно уклоны их бывают малы. Пусть Ω_0, V_0 и ζ_0 — поперечное сечение, скорость и расстояние центра тяжести C_0 от поверхности для сечения ab; Ω, V и ζ — те же элементы для сечения cd. Объем жидкости $abcd$ за момент времени dt переместится в положение $a_1b_1c_1d_1$, где $aa_1 = V_0dt$ и $cc_1 = Vdt$. В том и другом объеме заключаются одни и те же частицы. Определим количества движения для этих частиц, когда они занимают положение $abcd$ и $a_1b_1c_1d_1$ и спроектируем эти количества на ось l параллельную скорости V. Разность этих проекций представит приращение проекции количества движения частиц в объеме $abcd$ за момент времени dt. По известной теореме теоретической механики это приращение равняется элементарному импульсу всех внешних сил, действующих на объем $abcd$, спроектированному на ту же ось. Эта теорема выражается следующим равенством:

$$\left[\Sigma mv\cdot \mathrm{Cos}\,(vl)\right]_{t+dt} - \left[\Sigma mv\cdot \mathrm{Cos}\,(vl)\right]_t = d\left[\Sigma mv\cdot \mathrm{Cos}\,(vl)\right] = dt\cdot \Sigma P\cdot \mathrm{Cos}(\overline{Pl})$$

В этом равенстве левая часть представляет приращение проекции количества движения за время dt, а правая часть — элементарный импульс внешних сил, спроектированных на ось l.

Элементарные объемы aba_1b_1 и cdc_1d_1 и конечный объем a_1b_1cd обозначим последовательно цифрами: I, III и II. Тогда проекция количеств движения для объема $abcd$ в момент t равна:

$$\left[\Sigma mv\cdot \mathrm{Cos}\,(v\,l)\right]_t = \left[\Sigma mv\cdot \mathrm{Cos}\,(vl)\right]_{\mathrm{I}} + \left[\Sigma mv\cdot \mathrm{Cos}\,(vl)\right]_{\mathrm{II}}$$

В момент $t + dt$ для объема $a_1b_1c_1d_1$ имеем:

$$[\Sigma mv \cdot \mathrm{Cos}\,(vl)]_{t+dt} = [\Sigma mv \cdot \mathrm{Cos}\,(vl)]_{II} + [\Sigma mv \cdot \mathrm{Cos}\,(vl)]_{III}$$

Искомое приращение проекции количеств движения получается вычитанием первого равенства из второго, именно имеем:

$$d[\Sigma mv\,\mathrm{Cos}\,(vl)] = [\Sigma mv\,\mathrm{Cos}\,(vl)]_{III} - [\Sigma mv\,\mathrm{Cos}\,(vl)]_{I} \quad . \; . \; . \; . \; (a).$$

Так как мы рассматриваем установившееся движение, то во всякой геометрической точке объема II элементы m, v и $\mathrm{Cos}\,(vl)$ не изменяются с течением времени, а потому в означенных двух равенствах члены, относящиеся к объему II, один для времени t, другой для времени $t + dt$, будут равны между собою и при вычетании сократятся.

Объем I равен $\Omega_0 \cdot V_0 dt$; так как в объеме I скорости одинаковы и параллельны оси l, то масса этого объема равна

$$\frac{\Delta}{g} \cdot \Omega_0 V_0 dt \text{ и потому } [\Sigma mv\,\mathrm{Cos}\,(vl)]_I = \frac{\Delta}{g} \Omega_0 V_0 dt \cdot V_0.$$

Также найдем для объема III:

$$[\Sigma mv\,\mathrm{Cos}\,(vl)]_{III} = \frac{\Delta}{g} \Omega V dt \cdot V.$$

Теперь уравнение (a) можно переписать так:

$$d[\Sigma mv\,\mathrm{Cos}\,(vl)] = \frac{\Delta}{g} dt [\Omega V^2 - \Omega_0 V_0^2] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b).$$

Для определения внешних сил, действующих на объем $abcd$, отбросим жидкость, лежащую влево от ab, а также лежащую вправо от cd; также отбросим ложе канала. Взамен отброшенной жидкости и ложа приложим соответственные силы. Эти силы и вес жидкости образуют следующие 4 группы: 1) силы давлений в сечении ab; 2) давления в сечении cd; 3) сопротивление ложа; оно приводится к нормальным и касательным силам (силы трения); последними силами пренебрегаем по их малости; 4) вес объема жидкости $abcd$.

Пусть ед. давления в центрах тяжести сечений ab и cd суть p_0 и p_0'. Так как в этих сечениях скорости параллельны между собою, будучи перпендикулярными к сечениям, то по § 17 ед. давления в них изменяются по гидростатическому закону. Тогда проекции сил 1-й и 2-й группы равны $p_0\Omega_0$ и $-p_0'\Omega$; проекции сил 3-й и 4-й группы равны нулю, потому что они перпендикулярны к оси l.

Так как $p_0 = \Delta\xi_0$ и $p_0' = \Delta\xi$, то имеем для проекции элементарного импульса:

$$dt\Sigma P \operatorname{Cos}(Pl) = (p_0\Omega_0 - p_0'\Omega)\,dt = \Delta dt\,(\Omega_0\xi_0 - \Omega\xi). \quad . \quad . \quad (c).$$

Приравнивая уравнения (b) и (c), получаем основное уравнение для прыжка воды:

$$(\Omega_0\xi_0 - \Omega\xi) = \frac{1}{g}(\Omega V^2 - \Omega_0 V_0^2) = \frac{Q}{g}(V - V_0) \quad . \quad . \quad . \quad (267).$$

Рассматривая какую-либо линию тока между сечениями ab и cd, напр., лежащую на поверхности воды, напишем:

$$\frac{V^2 - V_0^2}{2g} + (h'' - h_0'')_{bd} = \left(z_0 + \frac{p_0}{\Delta}\right) - \left(z + \frac{p}{\Delta}\right) = (z_0 - z) = H - h \ldots (d).$$

Здесь H и h глубина воды в канале до и после прыжка. Помощью этих двух уравнений определяем высоту прыжка и высоту гидравлических сопротивлений $(h'' - h_0'')_{bd}$, что всего удобнее сделать, если задамся формой поперечного сечения канала.

Прыжок в канале прямоугольного поперечного сечения. Пусть канал имеет прямоугольное сечение шириною b; глубина воды до и после прыжка равна H и h. Тогда $\Omega_0 = bH$; $\xi_0 = \frac{1}{2}H$; $\Omega_0\xi_0 = \frac{1}{2}bH^2$; также $\Omega\xi = \frac{1}{2}bh^2$.

Следовательно,

$$\Omega_0\xi_0 - \Omega\xi = \frac{1}{2}b\,(H^2 - h^2).$$

Так как

$$Q = bHV_0 = bhV, \text{ то } V = \frac{H}{h}V_0.$$

Теперь уравн. (267) примет следующий вид:

$$\frac{1}{2}b(H^2 - h^2) = \frac{1}{g}bHV_0\left(\frac{H}{h}V_0 - V_0\right).$$

Отсюда

$$H + h = \frac{2HV_0^2}{gh} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e).$$

Решая это квадратное уравнение по h, находим:

$$h = -\frac{1}{2}H + \frac{1}{2}\sqrt{H^2 + \frac{8HV_0^2}{g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f).$$

Таким образом, высота прыжка воды равна

$$h - H = -\frac{3}{2}H + \frac{1}{2}\sqrt{H^2 + \frac{8HV_0^2}{g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (268).$$

Теперь помощью уравнения (d) можно определить высоту гидравлических сопротивлений. Из уравн. (e) получается:

$$\frac{V_0^2}{2g}=\frac{(H+h)h}{4H}.$$

Тогда
$$\frac{V^2}{2g}=\left(\frac{H}{h}\right)^2\frac{V_0^2}{2g}=\frac{(H+h)H}{4h}.$$

Следовательно,

$$(h''-h_0'')_{bd}=(H-h)+\frac{V_0^2-V^2}{2g}=\frac{(h-H)^3}{4Hh} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . (g).$$

Эта формула принадлежит французскому гидравлику *Беланже*. При прыжке высота гидравл. сопротивлений получается меньше, чем следует по теореме Борда. Докажем это. Обозначим потерю по Борда через

$$(h''-h_0'')_B.$$

Тогда по теореме Борда имеем:

$$(h''-h_0'')_B=\frac{(V_0-V)^2}{2g}=\frac{1}{2g}\left(V_0-\frac{HV_0}{h}\right)^2=\frac{V_0^2}{2g}\left(\frac{h-H}{h}\right)^2=\frac{(h-H)^2(h+H)}{4Hh}.$$

Отношение найденных высот гидравлических сопротивлений равно:

$$\frac{(h''-h_0'')_{bd}}{(h''-h_0'')_B}=\frac{h-H}{h+H}<1,$$

что и требовалось доказать. *Буссинек* в формулы (f) и (268) вводит поправочный коэфф. $\alpha'=1{,}1$ вследствие неравенства скоростей в одном и том же поперечном сечении; так что в этих формулах нужно взять $\alpha' V_0^2$ вместо V_0^2; он воспользовался опытами Дарси—Базена и определил по форм. (268) с коэфф. α' высоту прыжка воды в 13 наблюденных случаях; оказалось замечательное согласие теории с опытом, как это видно из помещенной здесь таблицы XXIX.

ТАБЛИЦА XXIX.

№№	H	V_0	h опыт.	h теория.	№№	H	V_0	h опыт.	h теория.
1	0,270	0,516	0,36	0,35	8	0,174	0,361	0,34	0,33
2	0,158	0,258	0,24	0,24	9	0,186	0,413	0,37	0,37
3	0,252	0,516	0,38	0,38	10	0,213	0,516	0,43	0,43
4	0,173	0,319	0,30	0,29	11	0,241	0,568	0,44	0,44
5	0,268	0,516	0,37	0,36	12	0,191	0,361	0,30	0,31
6	0,090	0,154	0,19	0,20	13	0,430	1,571	0,92	0,94
7	0,127	0,258	0,28	0,28		меры	в мет	рах.	

Для того, чтобы прыжок осуществился, необходимо, чтобы в уравнении (f): $h > H$, т.-е. чтобы

$$-\frac{1}{2}H+\frac{1}{2}\sqrt{H^2+\frac{8\alpha' H V_0^2}{g}}>H.$$

Отсюда получается необходимое условие:

$$\frac{\alpha' V_0^2}{gH}>1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (h).$$

Так как

$V_0=\frac{Q}{aH}$, то это условие дает $\frac{\alpha' Q^2}{ga^2}>H^3$;

отсюда

$$H<\sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{ga^2}}.$$

Величина, стоящая здесь в правой части, называется *критической глубиной* H_k, т.-е., полагая $\alpha=1$, имеем:

$$H_k=\sqrt[3]{\frac{Q^2}{ga^2}}; \text{ для возможности прыжка: } H<H_k \quad . \quad . \quad . \quad (i)$$

На основании условия (h) течения всех рек, ручьев, каналов и т. п. могут быть разделены на две категории. Если скорость V_0 настолько значительна, что условие (h) удовлетворено, то такое течение наз. *горным;* при нем возможны прыжки. В противном случае течение назыв. *равнинным;* здесь прыжки невозможны. Прыжок получается напр. тогда, когда продольный уклон дна на небольшом протяжении сразу делается значительным. При таком именно условии существует прыжок воды в одном месте Краппонского канала во Франции (черт. 230); высота его $= 0{,}915 - 0{,}430 = 0{,}485$ м.; протяжение его равно 1,5 м. В опытах Бидона (черт. 231) прыжок проявлялся в канале шириною 0,325 м. с уклоном $i=0{,}023$; канал был прегражден поперечной высокой стенкой; таким образом получился водослив; высота прыжка равна $0{,}170 - 0{,}064 = 0{,}106$ м. Для этого прыжка получается: $V_0=1{,}69$ м.; $V=0{,}636$ м.; $H=0{,}064$ м.; тогда

$$\frac{\alpha' V_0^2}{gH}=\frac{1{,}1.(1{,}69)^2}{9{,}81.0{,}064}=5>1$$

и условие (h) выполнено. Высота гидравл. сопротивлений по уравн. (g) равна 0,027 м. Та же высота, исчисленная по формуле Борда, равна:

$$\frac{(1{,}69-0{,}636)^2}{2.9{,}81}=0{,}056 \text{ м.},$$

что в два раза больше предыдущего.

Заслуживают внимания опыты профес. *Бахметева* в гидравлической лаборатории Петроградского Политехнического Института, описанные им в сочинении: „О неравномерном движении жидкости в открытом русле“ 1912. Вода из сосуда A впускалась через щитовое отверстие (черт. 232) в лоток, длиною 3200 м.м. и шириною 100 м.м., при уклоне в 0,02. В конце лотка был устроен водослив B; высота стенки водослива 100 м.м. При глубине воды в сосуде A в 600 м.м, и при высоте щитового отверстия в 80 м.м. струя в лотке имела вид кривой abc, обращенной выпуклостью книзу; затем высота струи быстро увеличивалась с 53 до 194 м.м.; далее поверхность струи была близка к горизонтальной плоскости; перед водосливом поверхность воды немного понижалась. Таким образом получился прыжок высотою $194 - 53{,}5 = 140{,}5$ м.м. на длине 940 м.м.

§ 68. Исследование вида поверхности воды в частных случаях. Это исследование можно произвести разными способами; изложенный способ, как наиболее простой, заимствован из сочинения: *Collignon*. Hydraulique. 1870. Более сложные способы дали Бресс, Грасхоф и др.

Рассмотрим основное уравнение неравномерного движения (§ 64 уравн. 257):

$$dz = \frac{VdV}{g} + \frac{b_1 V^2}{R} ds \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (257).$$

В этом уравнении произведем следующие замены: *а*) Можно принять $ds = dL$. *б*) Будем рассматривать реки, живое сечение которых можно принять за *прямоугольник* шириною a и глубиною H, при чем вследствие значительного превышения a над H можно принять, что $R = \frac{aH}{a + 2H}$ равен H. *в*) Если V_0 и H_0 — представляют скорость и глубину реки в естественном состоянии, то по формуле Шези получаем:

$$R_0 i = H_0 i = b_1 V_0^2; \quad \text{отсюда} \quad i = \frac{b_1 V_0^2}{H_0}.$$

Затем из равенства

$$Q = aH_0 V_0 = aHV$$

получается:

$$V_0 = \left(\frac{H}{H_0}\right) V; \quad \text{тогда} \quad i = b_1 \frac{H^2}{H_0^3} V^2.$$

Следовательно,

$$\frac{b_1 V^2}{R} = \frac{b_1 V^2}{H} = i \left(\frac{H_0}{H}\right)^3.$$

г) Так как расход Q постоянная величина, а H и V переменные, то, дифференцируя равенство: $Q = aHV$, находим:

$$HdV + VdH = 0; \text{ следовательно } \frac{dV}{V} = -\frac{dH}{H}.$$

Тогда получаем:

$$\frac{VdV}{g} = -\frac{V^2 dH}{gH}.$$

д) В § 65 было получено такое равенство (a):

$$dz = idL - dH.$$

Внеся вышеперечисленные замены в уравн. (257), получим:

$$idL - dH = -\frac{V^2 dH}{gH} + i\left(\frac{H_0}{H}\right)^3 dL.$$

Отсюда получаем искомое уравнение в таком *окончательном* виде:

$$\frac{dH}{dL} = i\left[\frac{1 - \left(\frac{H_0}{H}\right)^3}{1 - \left(\frac{V}{\sqrt{gH}}\right)^2}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (269).$$

Исследуем это уравнение. Соответственно тому, будет ли числитель или знаменатель второй части этого уравнения положителен или отрицателен, здесь могут быть следующие *четыре* случая:

$$V < \sqrt{gH} \text{ (знаменатель} > 0)$$

$$H > H_0 \text{ (числитель} > 0); \quad \frac{dH}{dL} > 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{I случай.}$$

$$H < H_0 \text{ (числитель} < 0); \quad \frac{dH}{dL} < 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{II случай.}$$

$$V > \sqrt{gH} \text{ (знаменатель} < 0)$$

$$H > H_0 \text{ (числитель} > 0); \quad \frac{dH}{dL} < 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{III случай.}$$

$$H < H_0 \text{ (числитель} < 0); \quad \frac{dH}{dL} > 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{IV случай.}$$

Исследуем каждый из этих случаев в отдельности. Необходимо заметить, что условие

$$V < \sqrt{gH} \text{ дает } \frac{V^2}{gH} < 1.$$

Так как $Q = aHV$, то $V^2 = \frac{Q^2}{a^2 H^2}$, а потому наше условие можно переписать так:

$$\frac{Q^2}{ga^2 H^3} < 1, \text{ откуда } H > \sqrt[3]{\frac{Q^2}{ga^2}}.$$

Здесь правая часть, как было упомянуто в § 67 при рассмотрении прыжка воды, назыв. *критической* глубиной H_k. Итак получается $H > H_k$. Таким образом I и II случаям соответствует $H > H_k$, а III и IV случаям: $H < H_k$.

Первый случай. Так как здесь $H > H_0$, то подпорная линия CMA (черт. 233) во всех своих точках лежит *выше* линии CBE, соответствующей горизонту при равномерном движении. Так как затем $\frac{dH}{dL} > 0$, то с увеличением абсциссы L глубина H все возрастает и при $L = \infty$ получается $H = \infty$; тогда

$$\frac{H_0}{H} = 0; \quad \frac{V}{\sqrt{gH}} = 0; \text{ следовательно, } \left(\frac{dH}{dL}\right)_{L=\infty} = i.$$

Итак, касательная к подпорной линии в бесконечности представляется горизонтальной линией AB. С уменьшением L глубина H уменьшается, оставаясь все время больше H_0, так что числитель дроби в правой части уравн. (269) приближается к нулю; следовательно при пределе, когда $H = H_0$, получим $\frac{dH}{dL} = 0$; т.-е. касательная к подпорной линии совпадает с линией CBE. Отсюда видно, что рассматриваемая подпорная линия имеет две ассимптоты AB и BC. Такой вид имеет подпорная линия в большинстве естественных потоков, прегражденных плотинами для образования подпора. В подобных случаях можно вычертить приблизительно подпорную кривую следующим способом, предложенным еще Дюбюа. Определяем по формуле для плотин толщину AD переливающегося слоя (черт. 234) и откладываем ее вверх от верхней грани плотины. Через точку A проводим горизонтальную линию AB до пересечения с CB, представляющей горизонт реки в естественном виде. От точки B откладываем $BC = AB$ и через точки A и B проводим дугу круга AMC касательную к AB и BC. Эта дуга представляет приблизительно подпорную линию; длина AMC приблизительно равна

$$AB + BC = 2AB; \quad AB = \frac{AE}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{y_1}{i},$$

где $y_1 = AE$ — подпор плотины. Итак, длина подпорной линии $S = \frac{2y_1}{i}$.

За длину подпорной линии можно приблизительно принять длину прямой AF; из чертежа видно, что

$$AF = \frac{AG}{i} = \frac{H_0 + y_1}{i}.$$

Если $H_0 = y_1$, то оба способа дают одинаковый результат.

Подпорная линия осуществляется также тогда, когда канал соединяет два водохранилища A и B (черт. 236), при чем горизонт nn в нижнем водохранилище лежит выше линии ab, соответствующей равномерному движению в этом канале. Тогда горизонт воды в канале располагается по подпорной линии an.

Условиям первого случая удовлетворяет также другая кривая BC (черт. 237). Здесь

$$V < \sqrt{gH};\ H > H_0 \text{ и, следоват., } \frac{dH}{dL} > 0.$$

С увеличением L глубина H увеличивается и при $L = \infty$ получается:

$$\left(\frac{dH}{dL}\right)_{L=\infty} = i.$$

Итак касательная к кривой BC в бесконечности есть горизонтальная линия MN; другими словами MN представляет ассимптоту кривой BC. С уменьшением H скорость увеличивается и при

$$V = \sqrt{gH} \text{ имеем } \frac{dH}{dL} = \infty.$$

Следовательно касательная BG в точке B перпендикулярна к дну канала. Глубина BG равна критической глубине H_k; действительно, имеем:

$$V = \frac{Q}{aH} = \sqrt{gH};\ \text{отсюда } H = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{ga^2}} = H_k.$$

По такой кривой, называемой также подпорной линией, поверхность воды располагается в водотоках с большим уклоном, где проявляется прыжок воды; непосредственно за прыжком воды поверхность принимает вид кривой BC, как это видно из черт. 232. По этой же кривой поверхность воды располагается также и в том случае, когда крутой уклон канала переходит в пологий (черт. 237 *a*); поверхность воды на протяжении ab представляется кривой BC.

Второй случай. Здесь $H < H_0$, следоват., мы имеем дело с кривой DF, которая лежит *ниже* линии CB (черт. 233), соответствующей равномерному движению; эта кривая называется *кривой спада*. Так как затем $\frac{dH}{dL} < 0$, то с увеличением L глубина H все уменьшается. Но чем меньше H, тем больше V, которая, постепенно увеличиваясь, может достигнуть величины, при которой $V = \sqrt{gH}$. Тогда знаменатель

второй части уравн. (269) обращается в нуль и $\frac{dH}{dL} = \infty$, т.-е. касательная FG к кривой нормальна к линии BE. С уменьшением L глубина H увеличивается, пока, наконец, H сделается равным H_0; тогда числитель второй части того же уравнения обращается в 0 и $\frac{dH}{dL} = 0$, т.-е. линия спада имеет ассимптотой линию CB.

Кривая спада получается, напр. тогда, когда землечерпанием в каком-либо месте реки достигнуто значительное углубление и таким образом на дне образуется уступ. В своих опытах *Базен* получил кривую спада, сделав дно опытного канала с уступом глубиною 0,2 м. (черт. 235). Если канал соединяет два водохранилища A и B (черт. 236), при чем горизонт mm в нижнем водохранилище лежит ниже горизонта b, соответствующего равномерному движению в этом канале, то действительный горизонт воды в канале представляется линией спада am. Заметим, что глубина GF, при которой получается $V = \sqrt{gH}$, равна критической глубине H_k. Действительно имеем:

$$V = \frac{Q}{aH} = \sqrt{gH}; \text{ следоват., } H = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{ga^2H^2}} = H_k.$$

Третий случай. Так как здесь $H > H_0$, то поверхность воды представляется линией AB, лежащей *выше* линии KL (черт. 237), соответствующей равномерному движению. С увеличением L глубина H уменьшается и при $L = \infty$ получим $H = H_0$; тогда:

$$\frac{H_0}{H} = 1 \text{ и следоват., } \left(\frac{dH}{dL}\right)_{L=\infty} = 0.$$

Следовательно кривая имеет ассимптоту, совпадающую с горизонтом KL равномерного движения. При уменьшении L глубина H увеличивается, а V уменьшается и при $V = \sqrt{gH}$ знаменатель дроби правой части уравн. (269) равен нулю; тогда

$$\left(\frac{dH}{dL}\right) = \infty.$$

Это показывает, что кривая имеет в точке B касательную BG перпендикулярную к дну канала. Эта кривая осуществляется при вытекании воды через щитовое отверстие, как это видно из чертежа 232; здесь поверхность струи, выходящей из отверстия, на протяжении ab соответствует рассматриваемой кривой AB. Глубина BG равна критической глубине H_k, как это было показано в первом случае при рассмотрении кривой BC.

Четвертый случай. Здесь $H < H_0$, а потому кривая DE лежит *ниже* линии KL (черт. 237); по условию $\frac{dH}{dL} > 0$, а потому с увеличением L глубина H увеличивается. Очевидно, что H, постепенно увеличиваясь, достигнет значения H_0; тогда числитель второй части уравнения (269) равен нулю и $\frac{dH}{dL} = 0$, т.-е. кривая имеет ассимптотой линию KL. Вторая ассимптота ее представляется горизонтальной линией FG. Действительно, при $H = -\infty$ находим в том же уравнении:

$$\left(\frac{H_0}{H}\right)^3_{H=-\infty} = 0; \quad \left(-\frac{V}{\sqrt{gH}}\right)^2_{H=-\infty} = 0 \text{ и следоват., } \left(\frac{dH}{dL}\right)_{H=-\infty} = i.$$

По такой кривой поверхность воды располагается в случае вытекания воды из щитового отверстия в русло с большим уклоном.

Условиям четвертого случая удовлетворяет также кривая FJ (черт. 233); она имеет горизонтальную ассимптоту AP а в точке F касательную FG, перпендикулярную к дну канала. Глубина FG равна критической глубине H_k, как это было только что доказано. Эта кривая осуществляется в случае вытекания воды из щитового отверстия в русло с малым уклоном; так на черт. 232 поверхность воды на длине bc представляется кривой JF.

Рассмотренные кривые поверхности воды осуществляются в натуре обыкновенно только некоторою довольно малою своею частью; кривые подпора AMC и спада DF (черт. 233), а также кривая подпора BC (черт. 237) могут проявляться большею своею частью. Затем нужно иметь в виду, что кривые DF и FJ (черт. 233) не представляют собою одной кривой, а суть разные кривые; тоже самое нужно сказать и относительно кривых BC и AB (черт. 237).

Из вышеизложенного видно, что поверхность воды в свободных потоках может располагаться в зависимости от условий движения по *шести* разным кривым. а) При *малых* уклонах, когда $H_0 > H_k$ получаются *три* кривые: CMA, DF и JF (черт. 233); первая занимает положение выше H_0; вторая — между H_0 и H_k; третья — ниже H_k. б) При *больших* уклонах, когда $H_0 < H_k$ получаются также *три* кривые: BC, BA и DE (черт. 237); первая занимает положение выше линии H_k; вторая — между H_k и H_0; третья — ниже H_0.

Сделаем еще одно замечание относительно исследованных шести кривых. В общем дифференциальном уравнении неравномерного движения:

$$dz + \frac{VdV}{g} + \frac{b_1 V^2}{R} ds = 0$$

количества dz и dV могут быть: $dz \gtrless 0$; $dV \gtrless 0$. Третье количество—высота гидравлич. сопротивлений—всегда > 0. Здесь могут быть три следующих случая.

а) Если $dz > 0$ но $dV < 0$, то при таком движении кинетическая энергия (dV) тратится на увеличение потенциальной (dz) и на гидравлические сопротивления. Этот случай имеет место для *двух* кривых: IF (черт. 233), лежащей ниже линии H_k, и BC (черт. 237), лежащей выше линии H_k.

б) При $dz < 0$ и $dV > 0$ движение происходит так, что потенциальная энергия тратится на увеличение кинетической энергии и на гидравлич. сопротивления. Этот случай наблюдается в *двух* кривых: DF (черт. 233) и BA (черт. 237); обе кривые лежат ниже линии H_k.

в) При $dz < 0$ и $dV < 0$ движение происходит так, что обе энергии, убывая, тратятся на гидравлические сопротивления. Этому условию удовлетворяют *две* кривых: CMA (черт. 233) и DE (черт. 237); первая лежит выше линии H_0, а вторая ниже H_0.

Очевидно других комбинаций изменения dz и dV не может быть, так как комбинация $dz > 0$ и $dV > 0$ не может существовать, потому что член, представляющий гидравлические сопротивления, всегда > 0.

§ 69. Применение теории неравномерного движения к расчету канала, соединяющего два водохранилища. Положим, что два водохранилища (два озера, озеро и река и т. п.) соединены между собою каналом длиною L с уклоном дна i прямоугольного поперечного сечения шириною b (черт. 236). Пусть глубина воды на пороге канала равна H и на конце канала равна H_1. По этим данным требуется определить расход Q канала.

Предполагаем, что ширина канала b весьма велика сравнительно с глубиною H, почему можно принять, что гидравлический радиус $R = H$. Прежде всего определим глубину H_0 в канале при равномерном движении; по формуле Шези имеем:

$$Q_0 = \omega C \sqrt{Ri} = bH_0 C \sqrt{H_0 i}$$

Если глубина H_1 в конце канала равна глубине H в начале канала, то очевидно должно быть $H = H_1 = H_0$ и движение воды в канале будет равномерное. Если же $H_1 > H$ или $H_1 < H$, то движение в канале неравномерное.

Как было показано в предыдущем §, поверхность воды в канале устанавливается по некоторой кривой, которая или вся будет лежать выше линии равномерного движения (при $H < H_1$) или вся будет лежать

ниже этой линии (при $H > H_1$); в первом случае это будет подпорная линия и расход $Q < Q_0$; во втором случае будем иметь линию спада и расход $Q > Q_0$.

При решении поставленной задачи — определения расхода Q — лучше всего поступить следующим образом.

а) Пусть $H < H_1$. Задаемся произвольной глубиною равномерного движения $H'_0 < H$; по этой глубине определяем расход Q'_0 равномерного движения. Так как на пороге действительная глубина H, то на пороге получается подпор $y' = H - H'_0$. По данным величинам Q'_0; i; L и y' находим величину подпора y'_1 в конце канала, где глубина будет равна $H'_1 = H'_0 + y'_1$. Затем задаемся другой произвольной глубиною равномерного движения $H''_0 < H$; вычисляем соответственный расход Q''_0 и величину подпора y'' на пороге: $y'' = H - H''_0$. По известным величинам Q''_0; i; L и y'' вычисляем величину подпора y''_1 в конце канала, где будет глубина $H''_1 = H''_0 + y''_1$ и т. д. Из полученных результатов составляем таблицу расходов Q'_0; $Q''_0 \cdots$ и соответственных глубин в конце канала H'_1; $H''_1 \cdots$ Если заданная глубина H_1 находится между H'_1 и H''_1, то действительный расход Q в канале будет заключаться между Q'_0 и Q''_0 и вычислится по интерполяции. Рассмотренный случай относится к подпорной линии, когда $Q < Q_0$.

б) Если $H > H_1$, то будет иметь место кривая спада и $Q > Q_0$. Здесь следует поступать следующим образом. Задаемся произвольной глубиною равномерного движения $H'_0 > H$; так как на пороге глубина равна H, то очевидно на пороге имеется понижение $y' = H'_0 - H$; затем определяем расход Q'_0 равномерного движения. По этим данным: Q'_0; i; L и y' определяем понижение воды в конце канала y'_1. Тогда глубина воды в конце канала $H'_1 = H'_0 - y'_1$. Затем задаемся другой величиной глубины равномерного движения $H''_0 > H$ и решаем те же вопросы. Поступая таким образом далее, получим ряд расходов Q'_0; $Q''_0 \cdots$ и соответственных им глубин в конце канала H'_1; $H''_1 \cdots$ Если заданное H_1 находится между H'_1 и H''_1, то действительный расход в канале будет заключаться между Q'_0 и Q''_0 и определится по интерполяции.

Таким путем мы определим расход в канале для случаев, когда $H > H_1$ и $H < H_1$. Если по оси абсцисс откладывать величины расходов Q'_0; $Q''_0 \cdots$ а по оси ординат — соответственные им значения H_1, то получим кривую расходов по каналу. В пояснение к изложенному приводим следующий численный пример, заимствованный из труда проф. *Бахметева*: „О неравномерном движении жидкости в открытом русле". 1912.

Численный пример. Рассмотрим канал, соединяющий два водохранилища, длиною $L = 10000$ м., очень широкого поперечного сечения с уклоном дна $i = 0{,}0001$; глубина воды на пороге канала $H = 2{,}5$ м.; русло канала земляное, по шероховатости относится к 5-ой категории русел по Базену с коэф. $\gamma = 1{,}30$. Определить расход в канале, предполагая, что глубина воды на пороге постоянна, а глубина в конце канала изменяется. Расход в канале будем относить не на всю ширину канала b, а на ед. ширины; такой единичный расход обозначим через q; тогда весь расход канала $Q = bq$.

Определяем расход q_0 при равномерном движении при глубине $H = H_0 = 2{,}5$ м.. По формуле Шези получаем:

$$q_0 = \omega C\sqrt{Ri} = CH_0\sqrt{H_0 i} = 47{,}7.2{,}5\sqrt{2{,}5.0{,}0001} = 1{,}88 \text{ м}^3.$$

Здесь $C = 47{,}7$ взято по Базену для русел 5-ой категории при коэф. $\gamma = 1{,}30$ м. для $R = 2{,}5$ м.

Рассмотрим сперва кривые подпоров.

а) **Кривые подпоров.** В этом случае расход канала q будет меньше $q_0 = 1{,}88$ м³.. Зададимся произвольною глубиною равномерного движения $H'_0 < H$; напр. берем $H'_0 = 1{,}25$ м. Тогда соответственный расход получим из форм. Шези:

$$q'_0 = 40{,}2.1{,}25\sqrt{1{,}25.0{,}0001} = 0{,}562 \text{ м}^3.$$

Здесь $C = 40{,}2$ взято по Базену для $R = 1{,}25$ м. Подпор на пороге канала:

$$y' = H - H'_0 = 2{,}5 - 1{,}25 = 1{,}25 \text{ м.; тогда } \frac{y'}{H'_0} = \frac{1{,}25}{1{,}25} = 1.$$

По этим значениям: $q'_0 = 0{,}562$ м³.; $L = 10000$ м.; $H'_0 = 1{,}25$ м. и $y' = 1{,}25$ м. найдем подпор y'_1 на конце канала по формуле (262):

$$\frac{i(L_1 - L)}{H'_0} = F\left(\frac{y'_1}{H'_0}\right) - F\left(\frac{y'}{H'_0}\right)$$

Получаем при помощи таблицы Дюпюи-Рюльманна для аргумента 1:

$$\frac{0{,}0001.10000}{1{,}25} = F\left(\frac{y'_1}{H'_0}\right) - F\left(\frac{1{,}25}{1{,}25}\right) = F\left(\frac{y'_1}{H'_0}\right) - 2{,}284.$$

Следоват.

$$F\left(\frac{y'_1}{H'_0}\right) = 2{,}284 + 0{,}8 = 3{,}084.$$

По интерполяции находим: $\frac{y'_1}{H'_0} = 1{,}74$; $y'_1 = 1{,}74.1{,}25 = 2{,}18$ м.; тогда глубина в конце канала $H_1 = H'_0 + y'_1 = 1{,}5 + 2{,}18 = 3{,}43$ м.

Совершенно таким же образом задаемся другими произвольными величинами глубины равномерного движения, а именно: 0,50; 0,75; 1,00; 1,25; 1,50; 1,75; 2,25 и 2,5 м. и находим для них соответственные расходы, подпоры в начале канала и др. элементы, помещенные в нижеприведенной таблице XXX.

Таблица XXX.

Глубина равн. дв. H'_0	Коэф. C по Базену.	Расход q'_0	В начале канала. Подпор y'	$\frac{y'}{H'_0}$	$F\left(\frac{y'}{H'_0}\right)$	$\frac{i(L_1-L)}{H'_0}$	В конце канала. $F\left(\frac{y'_1}{H'_0}\right)$	$\frac{y'_1}{H'_0}$	Подпор y'_1	Глубина H'_1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,50	30,6	0,108	2,00	4,00	5,396	2,00	7,396	5,98	2,99	3,49
0,75	34,8	0,226	1,75	2,33	3,700	1,33	5,033	3,64	2,72	3,47
1,00	37,8	0,378	1,50	1,50	2,834	1,00	3,834	2,46	2,46	3,46
1,25	40,2	0,562	1,25	1,00	2.284	0,80	3,084	1,74	2,18	3,43
1,50	42,2	0,776	1,00	0,667	1,883	0,667	2,549	1,24	1,86	3,36
1,75	44	1,920	0,75	0,428	1,555	0,572	2,127	0,865	1,51	3,26
2,00	45,3	1,280	0,50	0,250	1,246	0,500	1,746	0,562	1,12	3,12
2,25	46,5	1,570	0,25	0,111	0,874	0,445	1,319	0,287	0.65	2,90
2.50	47,7	1,880	*0*	*0*	—	—	—	—	—	2,50

б) **Кривые спада.** В этом случае расход канала будет больше $q_0 = 1{,}88$ м³. Задаемся произвольными глубинами для равномерного движения $H'_0 = 2{,}55$; 2,60 м. и т. д.; определяем соответственные расходы $q'_0 = 1{,}95$; 2,01 м³. и т. д., а затем вычисляем и другие величины, как это показано ниже для $H'_0 = 2{,}55$ м.

Находим отношение

$$h = \frac{H}{H'_0} = \frac{2{,}50}{2{,}55} = 0{,}98.$$

По таблице C Бресса находим для аргумента 0,98 такое значение $\Psi(0{,}98) = 1{,}178$. Затем, принимая как среднее значение для $C = 48$ и имея в виду, что основной коэф. $b_1 = \frac{1}{C^2}$, получаем:

$$\frac{i}{b_1 g} = \frac{iC^2}{g} = \frac{0{,}0001 . (48)^2}{9{,}81} = 0{,}025.$$

Далее по формуле (266):

$$\frac{i(L_1 - L)}{H'_0} = \left(h_1 - h\right) - \left(1 - \frac{i}{b_1 g}\right)\left[\Psi(h_1) - \Psi(h)\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (266)$$

находим:

$$\frac{0{,}0001 . 10000}{2{,}55} = \left(h_1 - 0{,}98\right) + \left(1 - 0{,}025\right)\left[1{,}178 - \Psi(h_1)\right]$$

Следоват.

$$h_1 - 0{,}975\ \Psi(h_1) = 0{,}224 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (a).$$

Решаем это трансцендентное уравнение попытками, а именно: задаемся $h_1 = 0{,}924$, тогда левая часть равна $0{,}229 > 0{,}224$

„ $h_1 = 0{,}926$ „ „ „ „ $0{,}221 < 0{,}224$.

Берем $h_1 = 0{,}925$; следоват. $H_1 = 0{,}925 . 2{,}55 = 2{,}36$ м.

Подобным же образом сделаем вычисления и для других значений H'_0. Соединяя найденные результаты, получим следующую таблицу XXXI.

Таблица XXXI.

Глубина равном. дв. H'_0	Коэф. C по Базену.	Расход q'_0	В начале канала.		$\frac{i(L_1 - L)}{H'_0}$	В конце канала.	
			$h = \frac{H}{H'_0}$	$\Psi(h)$		$h_1 = \frac{H_1}{H'_0}$	H_1
1	2	3	4	5	6	7	8
2,55	47,9	1,95	0,980	1,178	0,392	0,925	2,36
2,60	48,1	2,01	0,960	0,940	0,385	0,830	2,16
2,65	48,3	2,08	0.944	0,823	0,377	0,725	1,92
2,68	48,4	2,12	0,933	0,759	0,373	0,600	1,61
2,70	48,5	2,15	0,926	0,723	0,370	0,440	1,19
2,71	48,55	2,165	0,920	0,709	0,369	—	—

Из этой таблицы видно, что если $H'_0 = 2{,}70$ м., то при глубине в начале канала $H = 2{,}50$ м. глубина в конце $H_1 = 1{,}19$ м.; следоват. понижение горизонта воды в начале $H'_0 - H = 0{,}20$ м., а в конце $H'_0 - H_1 = 1{,}51$ м. Затем при глубине $H'_0 = 2{,}71$ м. при той глубине в начале канала глубина в конце вовсе не может быть определена, так как никаких значений для h_1 нельзя подобрать для удовлетворения трансцендентного уравнения подобного уравн. (a); это значит, что вершина F кривой спада DF (черт. 233) не доходит до конце канала. Предельное возможное положение кривой спада имеет место тогда, когда вершина F кривой DF будет лежать на конце канала; для этого случая вычислим: расход $q_0' = 2{,}16$ м.^{3} и глубину $H_1 = 0{,}80$ м. Затем при дальнейшем понижения горизонта воды в нижнем водохранилище

нельзя получить большого расхода в канале, чем 2,16 м.³. На черт. 238 по оси абсцисс откладываем расходы q_0', а по оси ординат — соответственные глубины H_1 на конце канала; тогда кривая AB представит кривую расходов q_0' в канале при постоянном горизонте воды в верхнем водохранилище (глубина воды на пороге канала постоянна и равна 2,5 м.) и при переменном горизонте в нижнем водохранилище (глубина воды в конце канала изменяется в пределах от 3,49 м. до 0,80 м.); разность горизонтов обоих водохранилищ составляет от 0,01 м. до 2,70 м.

Подобным же образом решается задача в том случае, когда горизонт в нижнем водохранилище постоянный, а в верхнем — переменный.

Если горизонты в *обоих* водохранилищах *переменные* и требуется определить расход в данном канале при различных положениях горизонтов в том и другом водохранилищах, то задача решается следующим образом. Пусть горизонт воды в верхнем водохранилище изменяется в пределах, при которых глубина воды в начале канала изменяется от H' до H''. Промежуток $H' - H'' = e$ разделим на n равных частей и затем предполагаем такие случаи постоянного горизонта в верхнем водохранилище, когда глубина в начале канала равна:

$$H', \ H' + \frac{e}{n}, \ H' + \frac{2e}{n} \ldots$$

Для каждого из этих случаев предполагаем горизонт воды в нижнем водохранилище переменным. Тогда задача для каждого положения горизонта в нижнем водохранилище решается так, как было сейчас указано. Если затем по оси абсцисс откладывать расходы q_0', а по оси ординат — соответственные глубины H_1 в конце канала, то получим черт. 239, на котором изобразится ряд кривых для расходов в канале. Напр., кривая ab представляет кривую расходов при постоянной глубине H' в начале канала; кривая cd — кривую расходов при постоянной глубине H'' и т. д. Ординаты Oa, Oc... представляют наибольшие глубины H_1', H_1''... на конце канала, соответствующие глубинам H', H''... в начале канала.

Пусть требуется при помощи этого чертежа определить расход в канале при глубине в начале канала H'' и при глубине $h = Ob'$ в конце канала. Пересечение прямой $b'b''$ с кривой расходов cd дает точку α; абсцисса $b'\alpha = Om$ представит искомый расход в канале.

Если глубина воды в начале канала H''', то абсцисса $b'\beta = On$ представит расход канала при глубине в конце канала h и т. д. Отложим отрезки: $mq = H''$, $nr = H'''$... и точки q, r, s... соединим кривой

MN; тогда эта кривая представит зависимость между расходами в канале и различными глубинами в начале канала при постоянной глубине в конце канала, равной $Ob' = h$.

Положим, даны: глубина воды в начале канала равна $H°$, а глубина воды в конце канала равна h; тогда для определения расхода в канале откладываем $Ot = H°$ и проводим прямую tu до пересечения с найденной кривой MN; абсцисса tu представит искомый расход канала.

Промышленный канал с переменным расходом. Промышленными каналами называются каналы, служащие для подвода воды к гидравлическим установкам; эти установки могут служить для разных заводов и фабрик, для электрических станций и т. п. Работа гидравлических двигателей может быть в течение суток постоянной или переменной. В зависимости от этого канал должен в разные часы суток подводить то большее, то меньшее количество воды. В виду этого задача о проектировании канала с переменным расходом становится более сложной. Не входя в подробности, ограничимся лишь следующими замечаниями, заимствованными из вышеупомянутого труда професс. *Бахметева.*

Сперва предполагаем, что глубина воды в начале канала постоянная. Тогда канал с переменным расходом нужно проектировать так, чтобы он при равномерном движении пропускал *наибольший* расход. Следоват., при нормальном расходе поверхность воды в канале представится кривой подпора.

При таком расчете канала уклон дна нужно назначать несколько больше расчетного в виду недостаточной точности в определении шероховатости стенок канала.

Если уровень воды в начале канала можно регулировать, напр., помощью щитов с отверстиями, то вопрос о регулировании расхода в канале значительно упрощается.

Глава VII. Определение скоростей и расходов в открытых и закрытых руслах.

§ 70. О различных способах измерения скоростей и расходов.

Для измерения *малых* расходов, каковы расходы: небольших источников, ручьев, небольших каналов, труб небольших диаметров и т. п., применяются следующие устройства и приборы.

Если течение воды без напора, то применяются: водяной дюйм и водослив. Если течение происходит с напором (в трубах), то употребляются водомеры скоростные и объемные.

Для измерения *больших* расходов, каковы расходы: речек, рек, больших источников, каналов больших поперечных сечений, труб большого диаметра и т. п., применяются следующие приборы: для открытых течений — водосливы, трубка Пито-Дарси, поплавки и вертушки; для течений под напором — водомеры Вентури, Вольтмана, Ланге и др.

Так как измерение расходов помощью водослива было уже подробно изложено, то об этом способе более упоминать не будем.

a) **Измерение расхода помощью водяного дюйма.** Для измерения небольших расходов в открытых руслах служит так называемый водяной дюйм. Он применяется в странах, где орошение играет особо важную роль, напр. в Туркестане, на Кавказе, в Южной Франции, в Северной Италии, в Испании и др. странах. Водяной дюйм также применяется в Калифорнии для измерения воды, потребляемой для горных работ.

Водяной дюйм введен в употребление *Мариоттом* и представляет количество воды, вытекающее в *сутки* через круглое отверстие в тонкой стенке с определенным диаметром d и при определенном напоре над центром H. *Старый* французский дюйм составлял 19,1953 м.^{3} = = 677,9 ф.^{3} при диаметре $d = 1$ парижскому дюйму = 27,07 м.м. и при $H = 7$ парижских линий = 15,79 м. м.; здесь получается коэфф. расхода $\mu = 0{,}693$.

Новый французский дюйм (*pouce fontainier*) составляет в *сутки* 20 м.^{3} = 706,33 ф.^{3} при $d = 20$ м.м. и при $H = 40$ м. м.; коэффициент $\mu = 0{,}832$.

В Калифорнии для горных работ применяется особый водяной дюйм (*miner's inch*), который в разных местностях имеет разную величину, но значительно большую, чем французский дюйм; величина его колеблется в пределах от 1,20 до 1,76 ф.^{3} в минуту. Так, напр., при прямоугольном отверстии высотою 4 д. и шириною 250 д. при $H = 9$ д. получается суточный расход равный 1000 водяных дюймов; при прямоугольном отверстии высотою 12 д. и шириною 12,75 д. при $H = 12$ д. получается суточный расход равный 200 вод. дюймов; при прямоугольном отверстии высотою 1 д., и шириною n дюймов при $H = 4$ д. получается суточный расход равный n водяных дюймов; при прямоугольном отверстии высотою 2 д., шириною n д. при $H = 7$ д. и при толщине стенки в 3 д. получается расход для каждого квадратного дюйма площади отверстия равный 0,026 ф.^{3} в секунду; 1,57 ф.^{3} в минуту; 94,2 ф.^{3} в час и 2260,8 ф.^{3} в сутки (коэфф. $\mu = 0{,}616$).

Водяной модуль представляет расход равный 100 литров (0,1 м.^{3}) в секунду; он делится на десятые, сотые и тысячные доли; это коли-

чество протекает или через прямоугольное отверстие или через водослив. Количество воды равное 1 литру в секунду или 86,4 м.^{3} в сутки называется *litre continu* и обозначается *l. c.* В Италии водяной модуль в 100 л. в секунду представляет узаконенную меру воды при отпуске ее для орошения, но в контрактах на орошение употребляется другая мера, наз. *once*, различная в разных местностях; так в Милане *once* составляет 37 *l. c.*, т.-е. 0,037 м.^{3} в секунду; в Пьемонте 28 *l. c.*, т.-е. 0,028 м.^{3} в секунду и т. д. В Испании применяется мера назыв. *real fontanero*, различная в разных местностях: так в Мадриде она равна 3,245 м.^{3} в сутки; в Малаге — 1,2 м.^{3} в сутки и т. п.

б) **Измерение небольших расходов в трубах помощью водомеров.** Для определения расходов воды, протекающей по водопроводным трубам небольшого диаметра, употребляются *водомеры*. Различных систем водомеров очень много, несколько десятков; все они могут быть разделены на *две* группы: к первой группе относятся водомеры, измеряющие количество протекающей воды по числу оборотов особого колеса, приводимого в движение давлением струи воды; эти водомеры называются скоростными или крыльчатыми водомерами; ко второй группе относятся водомеры, измеряющие количество протекающей воды по числу наполнений определенного объема; эти водомеры называются объемными водомерами. Из водомеров первой группы опишем устройство водомера Сименса и Гальске, а из водомеров второй группы — устройство водомера Фраже.

Скоростный водомер Сименса и Гальске (крыльчатый) применяется к трубам диаметром от 10 мм. до 250 мм. Он состоит из цилиндра *MN* (черт. 240) и двух боковых патрубков *a* и *b* с нарезками, которыми водомер соединяется с водопроводной трубой. Цилиндр *MN* состоит из 3 частей: нижней части *A*, в которую вода притекает через патрубок *a*; средней части или камеры *B*, в которой помещается вертушка; и верхней части или коробки *C*, в которой находится счетный механизм. Вертушка состоит из вертикальной оси *g*, на которой укреплены 4 лопасти или крыла *f*; внизу ось поддерживается подпятником *c*; верхнею своею частью ось проходит через отверстие *d* в коробку *C*; здесь на ось насажена шестерня, сцепляющаяся с зубчатым колесом; на оси зубчатого колеса имеется другая шестерня, сцепляющаяся с другим зубчатым колесом и т. д. Все эти шестерни и колеса составляют счетный механизм. На верху коробки укреплена доска *h* с одним большим и несколькими малыми циферблатами, по которым ходят стрелки счетного механизма. Вода из патрубка *a* проходит через отверстия *e* в камеру *B*, при этом ударяет на крылья *f* вертушки

и приводит ось *g* в быстрое вращательное движение, которое передается счетному механизму; далее вода из камеры *B* проходит в патрубок *b* и поступает в водопроводную трубу.

Для предохранения водомера от попадания в него посторонних мелких плавающих тел в конце патрубка *a* помещена металлическая дырчатая коробка *m*, через отверстия которой проходит вода, направляющаяся в водомер; в этой коробке задерживаются все подобные тела. Очистку коробки можно производить через отверстие, закрытое пробкой *n*.

Вышеупомянутые циферблаты имеют: большой — 100 делений, соответствующих каждое одной десятой ведра; малые циферблаты имеют по 10 делений и показывают: первый—десятки ведер; второй — сотни ведер; третий — тысячи; четвертый — десятки тысяч; пятый — сотни тысяч.

В скоростных или крыльчатых водомерах объем проходящей воды определяется по скорости протекания воды, а скорость воды определяется числом оборотов вертушки; при этом предполагается, что число оборотов пропорционально скорости воды.

В употреблении известны скоростные водомеры и других систем, напр., водомеры: Мейнеке, Фаллера, Тейлора, Доат, Глоб.

Все подобные водомеры широко применяются в городских водопроводах, где вообще нужно вести строгий учет воды потребляемой в каждом доме. С этою целью на каждой трубе, проводящей в дом воду из уличной водопроводной линии, должен быть поставлен водомер.

Объемный водомер Фраже (поршневой) отличается довольно сложным устройством и большим весом, но показывает достаточно точно объем протекающей воды. Он состоит из двух главных частей: нижней и верхней (черт. 241). Нижняя часть водомера состоит из двух цилиндров *AB* и *CD*, отлитых вместе; в них ходят вверх и вниз вследствие давления воды поршни *b* и b_1 и приводят в движение штоки *a* и a_1.

Верхняя часть представляет цилиндр *MM*, в середине которого находится распределитель *FF*, который окружен камерой *EE*. Вода из водопроводной трубы входит по патрубку *c* в камеру *EE*, поступает в распределитель, откуда направляется в верхнюю часть цилиндров *AB* и *CD*, давит на поршни сверху вниз и заставляет их опускаться; тогда вода, находящаяся под поршнями, т.-е. в нижней части этих цилиндров, направляется по особым каналам вверх в распределитель и поступает, наконец, в патрубок *g* и далее направляется в водопроводную трубу. Таково движение воды при положении поршней, показанном на чертеже. При другом положении поршней вода из

распределителя поступает под поршни, давит на них снизу вверх, заставляя их подниматься; вода над поршнями уходит в распределитель, а оттуда в патрубок g' и далее в водопроводную трубу.

Распределитель состоит из отливки N, в средине которой проходит вертикальный канал g, соединяющийся с выходным патрубком; внизу канала g имеется два отверстия m и n, по которым вода проходит в канал g. Справа и слева к отливке N прикреплены две доски — зеркала u,u, по которым скользят вверх и вниз особые коробки, т. наз. золотники v,v, скрепленные со штоками a и a_1. В каждом зеркале имеется по 3 отверстия: нижнее, среднее и верхнее, против которых в отливке N помещены отверстия: с правой стороны — 4, n, 2, и с левой стороны — 1, m, 3. При движении штока a_1 вниз золотник скользит по зеркалу, открывает отверстие 4 и соединяет отверстия 2 и n. При движении штока a_1 вверх золотник открывает отверстие 2 и соединяет отверстия 4 и n.

Подобным же образом шток a при движении вниз открывает отверстие 1 и соединяет m и 3; а при движении вверх открывает отверстие 3 и соединяет m и 1. В отливке N имеются особые каналы, соединяющие отверстие 4 с верхнею частью цилиндра AB и отверстие 3 с верхнею частью цилиндра CD. Когда отверстия 4 и 3 открыты, то вода из камеры E поступает по этим каналам в верхнюю часть цилиндров. В той же отливке N имеется также два особых канала, помощью которых отверстия 1 и 2 соединяются с нижними частями AB и CD; для этой цели сбоку цилиндров имеются вертикальные каналы 5 и 6; отверстие 1 соединено с каналом 5, а отверстие 2 — с каналом 6.

При такой конструкции движение воды в водомере происходит следующим образом. Положим сперва, что оба поршня движутся *вниз*, при чем поршень b_1 находится в нижней части цилиндра, а поршень b — вверху цилиндра. Тогда отверстия 4 и 3 будут открыты и вода из камеры E будет проходить через эти отверстия и затем по каналам 3 — C и 4 — A поступит в верхние части цилиндров CD и AB и своим давлением на поршни заставит их опускаться. Вода, находящаяся под поршнями, будет уходить таким путем: из B по каналу 5 в отверстие 1, затем по золотниковой полости в отверстие m и далее в патрубок g'. Вода из D пойдет по каналу 6 в отверстие 2, по золотниковой полости в отверстие n и далее в патрубок g'.

Если поршни движутся *вверх*, то открываются отверстия 1 и 2; вода из камеры E проходит через эти отверстия и направляется по каналам 2 — 6 в нижнюю часть цилиндра CD а по каналам 1 — 5 —

в нижнюю часть цилиндра AB и давит на поршни снизу вверх. Вода, находящаяся над поршнями, уходит в патрубок g' таким образом: из A по каналу $A-4$ в отверстие 4, по золотниковой полости и в отверстие n; из C по каналу $C-3$ в отверстие 3, потом по золотниковой полости и в отверстие m. В патрубке g' помещен клапан k, препятствующий обратному току воды.

Таким образом, вода постоянно наполняет цилиндры, входя в них то сверху, то снизу, и затем выдавливается из них в распределитель и далее в патрубок g'. Если сосчитать число наполнений цилиндров за время t, то, зная объем воды в цилиндрах, определим количество воды, прошедшее через водомер за время t.

Для этой цели служит счетчик, состоящий, как и в предыдущем водомере, из системы зубчатых колес и шестерен, приводимых в движение от штока a. Циферблаты счетчика устраиваются так же, как описано выше, и показывают прямо объем протекшей воды или в ведрах, или в куб. футах, или в куб. метрах.

Водомер Фраже считается практиками одним из лучших и применяется довольно часто в городских водопроводах.

Кроме водомера Фраже существует еще несколько других систем объемных водомеров: Кеннеди, Сименса и Гальске (дисковые водомеры), Шрейбера, Фрост-Табене, Самен, Томсона, Тридент, Герсей и др.

в) **Измерение больших расходов в трубах помощью водомеров.** Для измерения больших расходов в трубах, т.-е. в трубах крупного диаметра применяются, как упомянуто выше, водомеры Вентури, Вольтманна, Ланга и др.; они устанавливаются на трубах диаметром от 100 до 1000 мм.

Водомер Вольтманна представляет один из наиболее простых водомеров для больших труб; он вошел в употребление сравнительно недавно и назван по имени немецкого гидравлика Вольтманна, изобретателя вертушки, служащей для определения скоростей в реках.

Водомер состоит из короткого звена трубы того же диаметра (черт. 242), как и водопроводная труба; на концах этого звена укреплены внутри бронзовые кольца, с которыми соединены по 3 спицы a и b; эти спицы поддерживают подшипники c и d для оси e. На этой оси укреплено несколько криволинейных лопастей ff; эти лопасти вместе с осью образуют вертушку, которая вращается вследствие давления на лопасти протекающей воды. Для счета числа оборотов оси e служит червячная передача; для чего на оси имеется винтовая нарезка h, соединяющаяся с зубчатым колесом g, насаженным на ось k. Ось k поддерживается внизу подпятником m и проходит через стенку

и трубы в коробку p, заключающую в себе счетный механизм, устройство которого такое же, как и в других вышеописанных водомерах.

Отсюда видно, что по способу обмера протекающей воды этот водомер нужно отнести к числу скоростных водомеров.

Водомер Вентури, изобретенный американским инженером *Гершелем* и названный им по имени итальянского гидравлика Вентури, отличается простотою своего устройства и своеобразным способом учета протекающей воды, именно по разности давлений в двух сечениях трубы водомера.

В том месте водопроводной трубы AB (черт. 243), где предполагается производить измерение, помещаются две конические насадки: короткая C и длинная D; первая устанавливается со стороны движения воды; обе насадки соединены короткой цилиндрической трубой, наз. горлом.

На продольной оси трубы возьмем две точки: M — перед короткой конической насадкой C, и M_1 — в горле. Пусть для них V, z, p — и V_1, z_1, p_1 представляют скорость, ординату и давление; тогда для линии тока MM_1 имеем:

$$\frac{V_1^2 - V^2}{2g} + \zeta \frac{V_1^2}{2g} = \left(z + \frac{p}{\triangle}\right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\triangle}\right) = H$$

здесь $\zeta \frac{V_1^2}{2g}$ высота гидравл. сопротивлений на линии MM_1 и H — разность горизонтов воды в пьезометрах, поставленных в M и M_1. Если поставить третий пьезометр на трубе B там, где кончается насадка D, то горизонт в нем будет ниже, чем в первом, на величину гидравл. сопротивлений по пути MM_2. Соединяя уровни пьезометров прямыми линиями, получаем приблизительную линию давлений $kmqst$. Пусть Ω и ω — поперечные сечения трубы A и горла; тогда

$$Q = \Omega V = \omega V_1$$

и предыдущее равенство примет вид:

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \sqrt{2g\left(H + \frac{V^2}{2g}\right)} = \mu \sqrt{2g\left(H + \frac{V^2}{2g}\right)}$$

здесь коэфф. расхода и скорости $\mu = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}}$. Помощью предыдущего равенства можно отсюда исключить V и тогда получается:

$$V_1 = \mu \sqrt{\frac{2gH}{1 - \left(\frac{\mu\omega}{\Omega}\right)^2}} = A\sqrt{2gH}; \text{ тогда } Q = \omega V_1 = A\omega\sqrt{2gH} \ldots (270)$$

где

$$A = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mu\omega}{\Omega}\right)^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a).$$

Из выражений для V_1 и Q видно, что при постоянном коэфф. μ эти количества пропорциональны $\sqrt{H}$. Из опытов оказывается, что при скоростях в горле от 8 до 28 ф. коэфф. μ изменяется для труб большого диаметра от 0,97 до 1. Для каждого водомера необходимо вперед особыми измерениями определить величины μ для разных скоростей в горле, т.-е. нужно тарировать водомер. Тогда достаточно измерить разность горизонтов H и по форм. (270) определим расход. Разность H показывается на особом регистрирующем аппарате, который для каждого значения H дает прямо или в ведрах, или в куб. футах или в куб. метрах количество воды, проходящее по трубе. Подробности устройства и действия этого аппарата описаны в труде проф. *Тимонова*: „Водоснабжение и водостоки“ 1904.

Водомер Ланге отличается простотою своего устройства; он принадлежит к числу *партиальных* водомеров, т.-е. таких, в которых измеряется весьма небольшая, наперед известная часть всей протекающей воды. Он состоит из двух конически сходящихся насадок (черт. 244): короткой A и длинной B, которые фланцами соединяются с соседними звеньями водопроводной трубы. В начале короткой насадки имеется кольцеобразная полость aa, отделенная от насадки дырчатым кольцом bb. В месте соединения обеих насадок имеется вторая кольцеобразная полость cc, отделенная от насадок дырчатым кольцом dd. Полости a и c соединены между собою трубкою efg малого диаметра, на которой поставлен малый водомер C, применяемый обычно для труб малого диаметра (скоростный или объемный); на этой же трубе поставлены вентили D и E, дозволяющие, вслучае надобности, снять трубку efg вместе с водомером. Действие водомера следующее. Вода, вступая в насадку A, разделяется на две части; большая часть идет прямо по насадке A и далее входит в насадку B и затем в водопроводную трубу. Меньшая же часть воды через отверстия в кольце b идет по трубке efg в водомер C и затем вновь вступает в насадку через отверстия в кольце d и присоединяется к остальной массе воды. Если предварительно тарировать водомер AB и определить, какая именно часть всего расхода Q отделится в трубку efg, то сейчас же можно знать весь расход. Циферблаты водомера C показывают прямо полный расход воды, протекающей через насадку AB.

г) **Измерение небольших расходов в открытых руслах.** *Трубка Пито-Дарси.* Этот аппарат был изобретен Пито еще в 1732 г., но применялся редко, пока Дарси не усовершенствовал его и пока не показал его полной пригодности во многих случаях практики. Он состоит из двух стеклянных трубок a и b (черт. 245) укрепленных на деревянной доске c; они имеют две обоймы: верхнюю i с краном f и с резиновой трубкой n, и нижнюю g с краном z, запирающимся помощью шнурков A и B. Ниже этой обоймы стеклянные трубки заменены латунными, которые изогнуты под прямым углом и выступают против течения; на конце трубки a' имеется тонкое отверстие, выходящее против течения, почему струя воды ударяет прямо в отверстие; конец трубки b' изогнут в горизонтальной плоскости под прямым углом, а потому струя не ударяет в него, а только скользит по плоскости отверстия. Доска c помощью трех обойм m, i, k может скользить по штанге, упертой нижним концом в дно реки; кольцо l зажимается на штанге винтом и поддерживает обойму m и весь аппарат. К обойме k прикреплен руль s; течение, действуя на него, поворачивает весь аппарат на штанге и устанавливает его вдоль течения. Между трубками a и b помещена шкала, разделенная на м. м.; по трубкам могут двигаться нониусы x и y для установки их на уровне воды в трубках.

Для производства наблюдений необходимо установить штангу и закрепить на ней аппарат так, чтобы концы трубок a'; b' находились на требуемой глубине H от поверхности воды. Тогда помощью шнурков A и B открывают кран z и горизонты воды в трубках устанавливаются так: в трубке a горизонт выше, чем в b. Но так как эти горизонты находятся вблизи поверхности воды и неудобны для наблюдения, то помощью трубки n воздух высасывается; вследствие разрежения воздуха уровни воды в трубках поднимаются на высоту, удобную для наблюдения. Далее кран z закрывается, почему столбы воды в трубках будут зафиксированы и можно будет прочесть на шкале показания уровней. Если уровни воды нельзя удобно наблюдать, то надо поднять вверх по штанге весь аппарат и произвести отсчет.

Скорость V течения в точке a' на глубине H определится по формуле:

$$V = \varphi \sqrt{2g\,(h_1 - h_2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

где h_1 и h_2—показания уровней воды в трубках; φ—коэфф. скорости, имеющий определенную величину для каждой трубки; величину φ нужно определить предварительной тарировкой аппарата. Это формула выводится следующим образом. Пусть V, z, p обозначают скорость,

ординату и ед. давление в точке a'; V', z', $p'=p_0$ — те же элементы на уровне воды x в трубке a. Тогда уравнение Д. Бернулли для линии тока напишется в таком виде, принимая в соображение, что это уравнение справедливо для всякого установившегося движения, а в частности и для покоя жидкости:

$$\frac{0-V^2}{2g}=\left(z+\frac{p}{\Delta}\right)-\left(z'+\frac{p_0}{\Delta}\right)=\left(z-z'\right)+\frac{p-p_0}{\Delta}.$$

Здесь: $V'=0$ и $(z-z')=-h_1$. Затем для трубки b имеем:

$$\frac{p-p_0}{\Delta}=h_2.$$

Тогда получается;

$$\frac{V^2}{2g}=h_1-h_2\text{; откуда } V=\sqrt{2g(h_1-h_2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c).$$

Действительная скорость определится, если полученный результат умножить на коэфф. φ и тогда получаем форм. (b). Точное определение этого коэффициента представляется делом очень важным, так как от его значения зависит точность в определении расхода потока Наблюдатели, работавшие с трубкой, как-то: Дарси, Базен, профес. Тиме и др. для определения φ применяли различные приемы, а именно:

а) Трубка перемещалась в стоячей воде с определенною скоростью.

б) Помощью трубки определялся расход в особом канале, а затем тот же расход определялся помощью водослива.

в) Помощью трубки определялась скорость вблизи поверхности воды потока, а затем в той же точке скорость определялась поплавками.

г) Помощью трубки определялась скорость в какой-либо точке живого сечения потока а затем в той же точке определялась скорость помощью вертушки.

Во многих случаях для φ были получены значения от 0,8 до 1,13; Базен принимал $\varphi=1$.

Трубка Пито-Дарси представляет прибор очень удобный для определения скорости в тех случаях, когда живое сечение потока очень мало, когда нужно определить скорость вблизи стенок, вблизи поверхности воды, в различных точках водосливной струи (Базен) и т. п. Принцип, на основании которого определяется скорость трубкой, был использован Дарси, Базеном и многими другими также для определения скорости в различных точках поперечного сечения водопроводных труб.

Подробности устройства трубки Пито-Дарси и других подобных приборов изложены в труде проф. *Тяпкина*: „Приборы для опреде-

ления скоростей и расходов воды в открытых руслах (реках и каналах)". 1901.

д) **Измерение больших расходов в открытых руслах.**

Поплавки употребляются для определения скоростей на поверхности потоков; поплавками могут служить: деревянные шары диаметром от 4 до 12 д.; стеклянные или жестяные бутылки; обрубки дерева толщиною 2 д. и длиною 4—8 д.; деревянные кружки диаметром 4 д. и толщиною 1 д.; при больших реках поплавки делаются из двух врубленных на крест досок толщиною 1 д., шириною 6 д. и длиною около 3 ф., поставленных на ребро; на верху ставится железный стержень с шаром, окрашенным в яркий цвет.

Поплавок должен сидеть в воде на большую часть своего объема; для этого вес поплавков увеличивается тем, что в поплавки вбиваются гвозди или снизу прикрепляются свинцовые кружки. Если для поплавков взяты полые металлические шары, то для увеличения веса они наполняются песком, водою, дробью. Поверхность поплавков окрашивается какой-либо яркой краской (белой или красной).

Для производства наблюдений выбирается такое место реки, где имеются на некотором протяжении приблизительно параллельные берега. Положим, нужно определить поплавками скорости в профиле BF (черт. 246). Тогда выше и ниже этого профиля провешиваются две створные линии AE и CG в расстоянии около 20 саж. друг от друга. Затем выбирается линия MN вверх по течению в расстоянии около 10 саж. от створа AE. Устанавливая лодку в точках a, b, $c \cdots$, спускают с нее поплавки. Замечают по секундомеру время прохода каждого поплавка сперва через створ AE, а затем через створ CG. Положим, поплавок, спущенный в точке a, употребил время t для прохода между этими створами. Тогда по известному расстоянию s между AE и CG находим скорость этого поплавка

$$V_0 = \frac{s}{t}.$$

Эта скорость соответствует точке α в профиле BF. Положение этой точки определяется засечками с берега по сигналам, которые подаются, когда поплавок проходит через створ BF. Таким образом будут известны скорости в тачках α, β, γ, а также и положение самих точек. Предварительно этих измерений нужно произвести промеры глубин в профиле BF. Зная скорости в точках α, β, γ, определим по формулам средние скорости V_m на вертикалях, проходящих через эти точки. Из § 56 известно, что зависимость между V_0 и V_m можно представить так:

$$V_m = aV_0$$

где в среднем коэфф. $a = 0{,}85$. Затем расстояния $\alpha\beta$ и $\beta\gamma$ делим пополам; получим точки m и n; проведем на чертеже через точки m и n вертикали mm' и nn' и найдем площадь ω_1, ограниченную этими вертикалями, поверхностью воды и дном реки; тогда частный расход через площадь ω_1 будет равен:

$$Q_1 = \omega_1 V_m.$$

Подобным же образом вычислим и другие частные расходы, а затем, взяв сумму таких расходов, получим полный расход через весь профиль BF.

Подробности, касающиеся измерения расходов как поплавками так и другими аппаратами, имеются в труде профессора *Тяпкина*: „Приборы для определения скоростей и расходов воды в открытых руслах (реках и каналах)“. 1901.

Вертушки. Вертушка была впервые применена для измерения скорости течения воды *Вольтманном* в 1790 г. С тех пор устройство этого аппарата неоднократно изменялось с целью лучшего приспособления для измерения скоростей. В последнее время он был значительно усовершенствован. В таком виде этот аппарат известен под названием вертушек: Амслера, Гарлахера, Гайоша, Отта и др. В России особенно часто употребляется вертушка Отта, устройство которой постоянно видоизменяется и улучшается. При глубинах небольше 5 саж. вертушка закрепляется на полой стальной штанге диаметром до 75 м.м. и длиною до 14 м., которая устанавливается в воде вертикально и упирается в дно реки (черт. 248). По мере производства измерений вертушка передвигается по штанге при помощи тросса (стального каната) и устанавливается на требуемой глубине. Можно также вертушку закрепить на конце штанги и затем вместе со штангой опускать ее в воду на требуемую глубину; этот прием практикуется в России, Франции, С. Америке, а первый—в Австрии и Германии. При глубинах больших 5 саж. вертушка подвешивается с лодки на троссе и опускается в воду на требуемую глубину.

Вертушка Отта состоит из следующих главных частей: лопастей или крыльев A, корпуса B и руля C (черт. 247). Лопасти числом 2—3 и более имеют поверхность гелисоидальную или параболическую; они насажены наглухо на горизонтальной оси a; конец оси c ближайший к лопастям имеет шариковый подшипник, а другой конец b—агатовый подшипник; эти подшипники уменьшают трение до *minimum*'а. На оси нарезан бесконечный винт d, сцепляющийся с небольшим зубчатым колесом e с 25, 50 или 100 зубцами; этот винт с колесом обра-

зует червячную передачу. На колесе укреплен штифт f, который при каждом обороте колеса сцепляется на короткое время с пружиной g; тогда за время сцепления происходит замыкание тока, который идет из батареи у наблюдателя через штангу или тросс в колесо, в штифт f, пружину g, зажим h и наконец по проволоке в батарею. Замыкание тока происходит через 25, 50 или 100 оборотов лопастей. При замыкании тока получается звонок, который прерывается, как только штифт пройдет пружину.

Колесо помещается в особой камере, устроенной в корпусе B вертушки. С корпусом скрепляется руль C, который своим весом уравновешивает вертушку и облегчает ей сохранять горизонтальное положение в том случае, когда вертушка опускается на штанге; если же вертушка опускается на троссе, то руль устанавливает вертушку по направлению течения. Вертушка на штанге устанавливается наблюдателем так, чтобы ось ее была нормальна к плоскости живого сечения. Штанга делается полого сечения круглого или эллиптического с направляющим выступом i; на штанге вертушка закрепляется винтом D. Если вертушка перемещается по штанге, упирающейся в дно реки, то вертушка не закрепляется на ней, а подвешивается крючком на троссе E, перекинутом через блок и закрепленном в особом зажиме H (черт. 248). Внутри тросса проходят две изолированные проволоки, проводящие ток из батареи в вертушку. Отсчет времени производится по секундомеру, бьющему $^1/_5$ доли секунды.

Пусть по отсчету времени t сек. и по числу оборотов N мы вычислили, что в одну секунду вертушка сделала n оборотов; тогда скорость течения в данном месте определим по формуле

$$V = \alpha + \beta n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d).$$

Если на оси абсцисс откладывать n, а по оси ординат скорости V, то эта формула представит прямую ab (черт. 249); коэфф. α соответствует $n = 0$ и показывает наименьшую скорость, которую может измерять данная вертушка; меньших скоростей она измерять не может вследствие трения оси в подшипниках; в вертушках хорошей конструкции и находящихся в полной исправности $\alpha = (0{,}01 - 0{,}05)$ м. Коэфф. α и β должны быть определены для каждой вертушки при помощи особой тарировки или на месте работ или, что гораздо точнее, на особых станциях. Коэфф. α, очевидно, равен отрезку Oa, а коэфф. β представляет $tg\,\delta$.

При помощи вертушки можно определить скорость на какой-либо вертикали различными способами. *Первый* способ (основной) заклю-

чается в том, что находят измерением скорость в нескольких определенных точках вертикали; по этим скоростям вычисляется средняя скорость на вертикали при помощи формул § 56. Этот способ требует много времени на измерение и на вычисление. *Второй* способ (интеграционный) состоит в том, что вертушку равномерно и медленно двигают по штанге, начиная с поверхности воды до дна и обратно, т.-е. на всю глубину вертикали; тогда средняя скорость V_m для данной вертикали выразится так:

$$V_m = \alpha + \beta n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

где α и β — коэфф. вертушки, а n — число оборотов в секунду при перемещении вертушки по штанге на всю глубину вертикали.

Этот способ требует меньше времени на измерение, но по точности уступает основному способу. Он требует, чтобы для плавного передвижения по штанге при вертушке был барабан или лебедка; затем вертушка должна давать сигналы в телефон через каждый оборот, а не только через 25—100 оборотов; при больших глубинах, когда вертушка подвешивается на троссе, этот способ совсем не применим. Здесь вертушка не учитывает ни донных, ни поверхностных скоростей, почему скорость V_m получается больше истинной.

Число вертикалей в каком-либо живом сечении не должно быть больше 15, так как только при этом условии возможно в этом сечении окончить измерения в один день. Поэтому число вертикалей N и расстояние между ними L будет зависеть от ширины реки B. В этом отношении может быть полезна следующая таблица:

Ширина реки B в саж.	*Число вертикалей N.*	*Расстояние L.*
1 саж.	4	0,2 саж.
1— 5 „	5	0,2—0,5 „
5— 10 „	8	0,5—1 „
10— 30 „	10	1—2 „
30— 50 „	10	3—4 „
50— 80 „	10	5—7 „
80—120 „	10	8—12 „
120—300 „	12	12—20 „
более 300 „	15	20—30 „

Продолжительность наблюдения в какой-либо точке играет важную роль. Чем дольше продолжается измерение скорости в какой-либо точке, тем точнее получится результат, так как влияние пульсации

будет при этом невелико. Однако необходимость в экономии времени кладет предел такой продолжительности. При этом можно руководиться следующими нормами, выработанными русскою практикою:

на измерение вблизи дна		необходимо	5—8	минут;
„ „	на 0,8 H	„	4—8	„
„ „	„ 0,6 H	„	3—5	„
„ „	„ 0,2 H	„	2—3	„
„ „ вблизи поверхности		„	2—3	„

Практика З. Европы установила меньшую продолжительность измерений, а именно: Швейцарское Гидрометрическое Бюро принимает норму $2-2^1/_2$ м. на одно измерение; Венское Гидрографическое Бюро считает достаточным 1 м. и только при неспокойном течении — 3 м. и более; известный своими гидрометрическими работами инженер *Ясмунд* считает вполне достаточной продолжительность измерения в $3^1/_2$—5 минут.

Какую роль играет пульсация при измерении, скоростей видно из нижеследующего. Профес. ***Гарлахер*** при своих измерениях на р. Эльбе помощью хронографа нашел следующие калебания скорости в этой реке на одной и той же вертикали на глубине 0,2 м. от поверхности и 0,25 м. выше дна реки, т.-е. на глубине 1,57 м. (черт. 249*a*). По оси абсцисс он откладывал промежутки времени через 1 секунду (на черт. показаны промежутки в 5 сек.), а по оси ординат скорости через 0,1 м. Верхняя кривая показывает изменение скорости вблизи поверхности, а нижняя—вблизи дна; оказывается, что вблизи поверхности скорость изменялась на 0,36 м. при средней скорости в 1,1 м., а вблизи дна на 0,58 м. при средней скорости в 0,6 м. На основании своих наблюдений Гарлахер полагает, что продолжительность измерения для получения средней скорости в какой-либо точке должна быть не менее 5 м. Пульсацию он объясняет как следствие вихревого движения воды, проявляющегося от трения жидкости о стенки; чем шероховатее стенка, тем резче проявляется пульсация.

Тарировка вертушки, т.-е. определение постоянных коэффициентов α и β в форм. (d), представляется делом весьма важным, почему на нее нужно обратить особенное внимание. Неверности в этих коэффициентах влекут за собою неверность в определении расхода в данном живом сечении и неверность во всех расчетах, основанных на этом расходе. Тарировка может производиться или на месте работ в полевой обстановке или на особо устроенных тарировочных станциях. Обыкновенно тарировочная станция состоит из длинного, узкого канала,

в котором вертушка перемещается с различными скоростями. Для этого вдоль канала по обоим берегам его укладываются на шпалах рельсы (черт. 250), по которым движется помощью электромотора особая тележка *A* с испытуемой вертушкой *m*. Для тарировки каждой вертушки требуется от 30 до 50 поездок. В Петрограде тарировку можно производить в Опытовом Судостроительном бассейне Морского Ведомства, назначенном для опытов с моделями морских судов и имеющем длину 120 м., ширину 6,7 м. и глубину 3 м. Станция в г. Тетюшах устроена на берегу пруда: тележка *A* с вертушкою *m* перемещается по рельсам уложенным вдоль берега (черт. 251). Станция в Тифлисе представляет собою кольцевой бассейн *A*; здесь вертушка *m* движется по кругу (черт. 252). Для этого в середине бассейна устроена особая платформа *aa*, на которой укреплена вертикальная деревянная ось *b*, приводимая во вращательное движение в ручную помощью зубчатой передачи; сверху на оси расположена деревянная рама *c* легкой конструкции; к раме прекрепляется испытуемая вертушка *m*, а на противоположной стороне рамы расположен провивовес *d*.

Тарировка полевая производится на пруде, озере, вообще в *стоячей* воде. Для этого устанавливается створ *EF* (черт. 253), вдоль которого перемещается лодка с вертушкой; створы *AB* и *CD* в расстоянии *L* друг от друга служат для отсчета пути *L* пройденного вертушкой. Вертушка укрепляется на конце длинного бруса, находящегося на носу лодки. Лодка должна перемещаться по створу *EF* возможно равномернее; для этой цели лодку тянут по створу *EF* канатами с берега помощью ворота. Эту работу можно упростить тем, что лодку рабочие передвигают канатом без ворота, уходя от берега пруда возможно ровнее. На противоположном берегу пруда другая партия рабочих несколько задерживает лодку другим канатом. Перемещение лодки на веслах не может дать надежных результатов, так как движение получается неравномерное. Для полевой тарировки с успехом можно пользоваться моторной лодкой. Передвижение лодки необходимо делать с разными скоростями, от самых малых до скоростей 3—4 м.

Обработка полученных данных и вычисление постоянных коэффициентов вертушки производится проще всего графическим путем. По оси абсцисс наносим числа оборотов в секунду *n*, а по оси ординат— скорости передвижения вертушки в метрах; затем намечаем плавную кривую, проходящую по пути полученных точек, отбрасывая при этом точки, стоящие отдельно от других и полученные, очевидно, вследствие каких-либо случайных погрешностей при тарировке. В полученную кривую *mn* вписываем ломаную линию из 2 или 3 прямых (черт. 254),

для которых графически находим значения α и β; здесь α — представляет отрезок, отсекаемый на оси ординат данной прямой, а β — тангенс, угла составляемого этою прямою с осью абсцисс. Обозначим эти величины через α_1; β_1 и α_2, β_2; тогда в пределах числа оборотов от 0 до n_1 следует пользоваться формулой:

$$V = \alpha_1 + \beta_1 n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (f)$$

а в пределах от n_1 и больше—формулой:

$$V = \alpha_2 + \beta_2 n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (g).$$

Число оборотов n_1 соответствует на оси абсцисс пересечению означенных двух прямых. Такой способ применяется Швейцарским Гидрограф. Бюро.

Кроме формулы вида (f), которая назыв. формулой Вольтманна, для определения скорости течения V по числу оборотов n вертушки в технической литературе известны еще следующие формулы:

$$V = \alpha + \beta n + \gamma n^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (h)$$

$$V = an + \sqrt{bn^2 + c} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (i)$$

$$V = k(1 - \beta)n + \sqrt{(k\beta n)^2 + V_0^2} \quad \ldots (k).$$

Первая формула представляет уравнение *параболы* с осью параллельною оси ординат; постоянных коэффициентов три α, β и γ. Вторая формула представляет уравнение *гиперболы* с вещественною осью параллельною оси ординат; постоянных коэффициентов три: a; b и c; эта формула предложена Бомгартеном. Третья формула (Шмидта) представлает *гиперболу abc* (черт. 255) с ассимптотой df, проходящей через O; постоянных коэффициентов также три: k, β и V_0. Необходимо заметить, что при больших скоростях можно пользоваться формулой;

$$V = \beta n$$

которая представляет прямую проходящую через O. Подробности касающиеся вертушек можно найти в вышеуказанном труде профессора *Тяпкина*, а также в сочинении профессора *Колупайло*: „Гидрометрия", 1918.

Тарировку вертушки необходимо производить возможно чаще, так как при работе с вертушкой могут происходить разные незначительные аварии, которые изменяют коэф. α и β вертушки, как-то: небольшое искривление лопастей, увеличение трения в подшипниках от попадания воды и т. п.

Назначение живого сечения. Для измерения расхода реки нужно выбирать живое сечение таким образом, чтобы оно лежало на прямолинейном участке реки с параллельными берегами; тогда створ назначается перпендикулярно к берегам. При измерении скоростей вертушкой, передвигающейся на штанге, последняя устанавливается в реке по створу так, чтобы ось вертушки была нормальна к створу. При параллельных берегах скорости в реке будут нормальны к живому сечению; следоват., ось вертушки будет совпадать с направлением скорости. Здесь расход в живом сечении найдем, умножая среднюю скорость для вертикали на соответственную часть живого сечения и суммуя такие произведения, как это было объяснено в § 56. Но случаи существования таких участков реки вообще исключительные; берега обыкновенно не параллельны, и нельзя провести плоское живое сечение так, чтобы оно было нормально к скоростям; сечение, удовлетворяющее такому условию может быть только поверхностью *adc* (черт. 256). Во всех таких случаях назначают плоское живое сечение *abc* так, чтобы оно возможно ближе подходило к такой поверхности; очевидно, что назначение такого сечения заключает в себе много неопределенности. Скорости здесь не будут нормальны к плоскости живого сечения, а потому ось вертушки не совпадает с направлением скорости.

Измерение вертушкой, движущейся по штанге, дает не скорость V_0 в избранной точке реки, а составляющую этой скорости на нормаль к живому сечению, т.-е. $V = V_0 \operatorname{Cos} \alpha$ (черт. 257).

Если $mm = d\omega$ — элемент плоского живого сечения, а $nn = d\Omega$ — элемент поверхности, то элементарный расход:

$$q = V_0 \cdot d\Omega = V_0 \cdot d\omega \cdot \operatorname{Cos} \alpha = V \cdot d\omega.$$

Следоват., действительный расход в реке найдем, умножая скорости, полученные помощью вертушки, на соответственные части плоского живого сечения и суммуя такие произведения.

Если вертушка опускается в воду на троссе, то она устанавливается по направлению скорости и мы получаем скорость V_0; обыкновенно элементарный расход и в этом случае находят так же, как и в предыдущем случае, т.-е. полагают:

$$q' = V_0 \cdot d\omega; \text{ но } V_0 = \frac{V}{\operatorname{Cos} \alpha}; \text{ следов., } q' = \frac{V \,.\, d\omega}{\operatorname{Cos} \alpha} = \frac{q}{\operatorname{Cos} \alpha}.$$

Здесь очевидно получается расход *больше* действительного. Разность между обоими расходами будет тем меньше, чем ближе плоское живое сечение *abc* подходит к поверхности *adc*.

Вертушка Лелявского. Эта вертушка, подробное описание устройства которой помещено в вышеуказанном труде проф. Тяпкина, дозволяет определять скорость струйки в любой точке реки, а также углы, составляемые ею с вертикальною и горизонтальною плоскостями. Таким образом помощью этой вертушки можно определить направление скоростей на плане реки, а также в плоскости живого сечения. Помощью своего прибора Лелявский произвел многочисленные измерения на р. Днепре вблизи г. Екатеринослава, из которых можно вывести много ценных заключений относительно движения воды в реках. Подобные измерения представляют большой теоретический и практический интерес, так как могут дать нам точное представление о действительном распределении скоростей в речном потоке. Поэтому очень желательны как дальнейшее усовершенствование этой вертушки, так и измерения, подобные произведенным Лелявским, в особенности вблизи островов, мелей, регуляционных сооружений, мостовых опор и т. п.

Глава VIII. О движении воды в каналах или реках в случае местных изменений в русле.

§ 71. Проход реки под мостом. Рассмотрим обстоятельства движения воды в реке в случае местных изменений в русле при расширении или при сжатии русла, при проходе реки под мостом и т. п. Здесь нужно различать два случая движения воды: первый случай — когда русло не размываемо, и второй случай — когда русло может размываться.

Последний случай постоянно наблюдается в действительности и потому необходимо обратить на него особенное внимание. Однако вследствие сложности явлений вопросы, касающиеся этого случая, мало разработаны, почему в технической литературе не имеется почти никаких сведений, сюда относящихся. В виду этого мы ограничимся только первым случаем и прежде всего рассмотрим проход реки под мостом, как случай, постоянно встречающийся в практике и потому особенно важный.

Этот вопрос рассматривали многие известные гидравлики, как напр., *Готей*, *Прони*, *Добюиссон*, *Беланже*, *Дюпюи* и др., но вследствие сложности он не получил решения и до настоящего времени. Главные пункты, на которые инженеру необходимо здесь обратить внимание, суть следующие два. Первый пункт — это определение наибольшей скорости реки в сечениях под мостом, а именно по дну реки; зная

эту скорость, можем судить о том, насколько будет размываться ложе реки при устройстве моста. Важно знать скорость в реке под мостом еще и для того, чтобы судить о возможности взводного судоходства. Второй пункт — определе́ние подпора в сечениях реки перед мостом; вследствие подпора берега реки выше моста могут затопляться, и в практическом отношении важно знать величину затопляемой местности.

Обыкновенно переход реки мостом делается на пойме, затопляемой высокими водами; мост располагается на главном русле, а пойма пересекается земляными дамбами. При высоких водах дамбы представляют значительное препятствие для стока вод, подпирая течение с верховой стороны. На черт. 258_1 представлен план реки при высоких водах с показанием земляных дамб и мостового отверстия. Главное течение идет по направлению ab; вдоль дамбы с верховой стороны идут по направлению к мосту боковые течения cc'; с низовой стороны вдоль дамбы идут боковые течения ee' от моста к берегам. На черт. 258_2 показаны вертикальные разрезы по линиям cc' и ee'; таким образом разность горизонтов в пролетах моста равна mn, а разность горизонтов воды у берегов с верховой и низовой стороны дамб равна ce.

Мостовые сооружения всегда стесняют живое сечение реки и изменяют характер движения воды как под самым мостом, так и в некотором расстоянии выше моста и ниже его. Перед мостом горизонт воды подпирается, почему глубина делается больше; при входе в пролеты моста горизонт понижается, скорость увеличивается и глубина уменьшается; по выходе из пролета горизонт немного повышается, скорость уменьшается и устанавливается равномерное движение. Обозначим (черт. 258_3) ширину реки, глубину воды и скорость: перед мостом — l_0, H_0, V_0; под мостом — l', H', V' и ниже моста — l, H, V; обыкновенно $l_0 = l$; затем подъем горизонта воды ниже моста очень мал и потому можно принять $H' = H$ и $V = V_0$. Понижение горизонта воды под мостом обозначим через y; тогда $H_0 = H' + y$; величина y называется *подпором*. Вычислим подпор y. В § 64 было выведено следующее уравнение неравномерного движения:

$$y = (z_0 - z) = \alpha_1 \left(\frac{V'^2 - V_0^2}{2g}\right) + \int_0^s \frac{b_1 V^2}{R}\, ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (254_1),$$

где интеграл представляет высоту, затрачиваемую на побеждение гидравлических сопротивлений. Так как длина траэктории частицы при проходе под мостом довольно мала, то этим членом можно пренебречь.

Коэфф. $\alpha_1 = 1{,}1$ введен в виду неравномерного распределения скоростей по живому сечению. Равенство расходов представится так:

$$Q = H_0 l_0 V_0 = \mu(H'l'V') = HlV,$$

где μ — коэфф. расхода при движении воды под мостом; вообще $\mu = \alpha\varphi$; здесь α — коэфф. сжатия для всего живого сечения при вступлении реки под мост; φ — коэфф. скорости; приблизительно $\alpha = 1$ и тогда $\mu = \varphi$.

Отсюда находим:

$$V_0 = V\frac{H}{H_0}; \quad V' = V \cdot \frac{Hl}{\mu H'l'}.$$

Вставляя эти значения в уравн. (254) и полагая $H_0 = H + y$, а также имея в виду, что H' весьма мало отличается от H, получаем:

$$y = \frac{\alpha_1 V^2}{2g}\left[\left(\frac{l}{\mu l'}\right)^2 - \left(\frac{H}{H+y}\right)^2\right] \quad \dots\dots\dots (a).$$

Это уравнение 3-й степени относительно искомого y; первое приближение для y получим, положив в правой части $y = 0$; тогда

$$y = \frac{\alpha_1 V^2}{2g}\left[\left(\frac{l}{\mu l'}\right)^2 - 1\right] \quad \dots\dots\dots (b).$$

Второе приближение получим, если подставим эту величину для y в правую часть форм. (a); во многих случаях можно ограничиться первым приближением. Что касается значения μ, то, по Эйтельвейну, коэфф. расхода $\mu = 0{,}85$, если передняя часть быка обделана плоскостью; $\mu = 0{,}95$, если эта часть имеет вид двугранного угла. По Брессу, величина μ должна зависеть от отношения $\left(\frac{l'}{l}\right)$; чем больше это отношение, тем μ ближе к единице.

Численный пример. Пусть в естественном состоянии река имеет ширину $l = 100$ м., глубину $H = 3$ м., среднюю скорость $V = 1{,}5$ м. Определить подпор y при устройстве моста, отверстие которого $l' = 80$ м., в предположении, что опоры моста обделаны в виде закруглений или двугранных углов, и что, следоват., $\mu = 0{,}95$. По форм. (b) находим:

$$y = \frac{1{,}1.(1{,}5)^2}{2.9{,}81}\left[\left(\frac{100}{0{,}95.80}\right)^2 - 1\right] = 0{,}092 \text{ м.}$$

Средняя скорость под мостом:

$$V' = V \cdot \frac{l}{\mu l'} = 1{,}5 \cdot \frac{100}{0{,}95.80} = 1{,}5 \cdot 1{,}32 = 1{,}78 \text{ м.}$$

О донной скорости под мостом. При стеснении живого сечения мостовыми опорами средняя скорость увеличивается; в предыдущем чис-

ленном примере это увеличение составляет 32%; скорость w по дну увеличивается в еще большей степени, а потому, если русло состоит из размываемых грунтов, то русло под мостом размывается; вследствие этого размыва живое сечение увеличивается, а скорость уменьшается. При этой уменьшенной скорости размыв грунта приостанавливается и течение реки происходит так, как при неразмываемом грунте. Необходимо указать на то обстоятельство, что в живых сечениях под мостом распределение скоростей будет иным, чем в сечениях выше и ниже моста.

Действительно, если рассматривать линию тока M_0M', идущую вблизи дна, то, обозначая скорости, давления и ординаты в точках M_0 и M' через $w_1 p_1 z_1$ и $w_2 p_2 z_2$, где $z_1 = z_2$, и, пренебрегая гидравлическими сопротивлениями, получаем:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = \left(z_1 + \frac{p_1}{\Delta}\right) - \left(z_2 + \frac{p}{\Delta}\right).$$

Но по закону Паскаля имеем:

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\Delta}\right) = \left(z_0 + \frac{p_0}{\Delta}\right) \text{ и } \left(z_2 + \frac{p_2}{\Delta}\right) =$$

$$= \left(z + \frac{p_0}{\Delta}\right),$$

а потому:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = z_0 - z = y;$$

следовательно,

$$w_2 = \sqrt{2gy + w_1{}^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (c).$$

В сечениях перед мостом, как известно, скорость по дну $w_1 = 0{,}6\, V_0$; в сечениях под мостом скорость по дну w_2 определяется по уравн. (c).

Если взять данные вышеприведенного численного примера, то имеем: $V_0 = 1{,}5$ м.; $w_1 = 0{,}6 \cdot 1{,}5 = 0{,}9$ м.; подпор $y = 0{,}092$ м. Тогда по форм. (c) находим для донной скорости под мостом:

$$w_2 = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}092 + \overline{0{,}9}^2} = 1{,}62 \text{ м.}$$

Если определить эту скорость по средней скорости под мостом $V' = 1{,}78$ м., то получим:

$$w_2 = 0{,}6\, V' = 1{,}07 \text{ м.}$$

Отсюда видно, что вследствие перераспределения скоростей в живом сечении под мостом действительная донная скорость w_2 значительно

больше исчисленной по общей формуле (в рассматриваемом случае на 50%). По *Рабю* после размыва русла донная скорость w_2 делается равной квадрату коэффициента шероховатости γ в формуле (245) Базена, соответствующего материалу русла, т.-е.:

$$w_2 = \gamma^2.$$

Напр., для русел земляных в обыкновенных условиях (5-я категория) $\gamma = 1{,}30$ и потому $w_2 = (1{,}30)^2 = 1{,}69$ метра.

Зная предельную скорость w_2, можем определить наибольший подпор y, при котором является такая скорость; именно имеем по формуле (c)

$$w_2 = \sqrt{2gy + w_1^2} = \gamma^2;$$

откуда

$$y = \frac{\gamma^4 - w_1^2}{2g};$$

здесь w_1 — донная скорость в сечении реки перед мостом.

Обращаясь к предыдущему примеру, имеем: $w_1 = 0{,}9$ м.; $\gamma = 1{,}30$; тогда

$$y = \frac{(1{,}30)^4 - (0{,}9)^2}{2 . 9{,}81} = 0{,}104 \text{ м.}$$

В этом примере был найден подпор $y = 0{,}092$ м., что меньше 0,104 м., а потому заключаем, что в рассматриваемом случае, т.-е. при уменьшении ширины реки $l = 100$ м. до ширины $l' = 80$ м., размыва русла не будет. Скорость размыва $w_2 = \gamma^2 = (1{,}30)^2 = 1{,}69$ м.

Формулы Дюпюи для определения подпора. Выше был показан простейший и чаще других применяемый способ определения подпора. Многие авторы, в том числе Дюпюи, признают этот способ ошибочным и дают взамен его другие. В данном вопросе многие стороны его остаются не выясненными путем наблюдений, которые хотя и производились, но недостаточно подробно, так как измерения подобного рода представляют большие затруднения. В виду этого для изучения вопроса о подпоре остается один путь — производство опытов в лаборатории, на что до сих пор обращалось мало внимания. Вот причина, почему до сих пор теоретические выводы делались при предположениях, которые не были основаны на твердых опытных данных. Возможно строить теорию подпора только тогда, когда измерения на реках и опыты в лабораториях дадут для теории необходимый материал. В настоящее время таких материалов мы не имеем. Мы не имеем даже самого главного, именно точных продольных профилей поверхности

воды выше моста, под мостом и ниже его. С целью большего ознакомления с рассматриваемым вопросом приводим способ Дюпюи определения подпора, при чем пользуемся всеми его обозначениями.

Дюпюи рассматривает проход реки под мостом таким образом, что в плане течение ограничено линиями тока CBA и $C'B'A'$ (черт. 258_6), образующими постепенное сжатие потока от CC' до BB' и затем постепенное расширение его от BB' до AA'. Перед сечением CC' образуется подпор, при чем подпорная линия имеет вид кривой cd (черт. 258_4 и 258_5). Возвышение подпорного горизонта над нормальным горизонтом $dCBA$ равно $Cc = Y$; это возвышение называется *истинным подпором*. От сечения CC' до BB' поверхность быстро понижается, образуя перепад cb; при этом понижение Bb под нормальным горизонтом равно y'; но по Дюпюи могут быть случаи, когда точка b лежит выше B (черт. 258_5); в первом случае $y' < 0$, а во втором $y' > 0$. Затем от BB' до AA' горизонт постепенно повышается и в A сливается с нормальным. Величина $cc' = y''$ равная разности высот наиболее повышенной точки c и наиболее пониженной точки b называется *кажущимся подпором*. Обозначим глубину реки и ее ширину через H и L в сечении AB и через H' и L' в сечении BB'; затем живое сечение и скорость обозначим для AB через Ω и U и для BB'—через ω' и U'. Применим к течению реки между сечениями BB' и AA' формулы неравномерного движения. В § 65 дано уравнение (257) на стр. 400:

$$dz = \frac{udu}{g} + \frac{b_1 u^2}{R} ds,$$

где dz — разность горизонтов точек m и n в двух смежных сечениях mm' и nn'; ds — расстояние между этими сечениями; u — скорость в сечении mm'; R — гидравлический радиус в нем и b_1 — основной коэффициент трения. Затем имеем следующее уравнение (258), данное на стран. 402:

$$dz = i\,ds + dH,$$

где i — уклон реки до постройки моста, соответствующий глубине H и скорости U. Если обозначить через φ величину:

$$\frac{b_1 u^2}{R}$$

и величину dH через dy, то из предыдущих двух уравнений находим:

$$dy = \frac{udu}{g} + (\varphi - i)\,ds.$$

Разность глубин в сечениях BB' и AA' получим, проинтегрировав это выражение в пределах этих сечений, обозначив расстояние между ними через λ; именно находим:

$$y' = Bb = \int_{u'}^{U} \frac{u\,du}{g} + \int_{0}^{\lambda} (\varphi - i)\,ds,$$

или

$$y' = \frac{U^2 - U'^2}{2g} + \int_{0}^{\lambda} (\varphi - i)\,ds.$$

Для определения этого интеграла предположим, что живые сечения между BB' и AA' изменяются по закону прямой линии; тогда живое сечение $mm' = \omega$ в расстоянии s от BB' равно

$$\omega = \omega' + \frac{\Omega - \omega'}{\lambda} s.$$

Скорость u в этом сечении определим из равенства расходов:

$$\omega u = \Omega U; \text{ следовательно, } u = \frac{\Omega}{\omega} U.$$

Гидравлический радиус R принимаем равным тому, который соответствует равномерному движению и который определим из формулы Шези:

$$U = C\sqrt{Ri} = \sqrt{\frac{1}{b_1}}\sqrt{Ri}; \text{ следоват., } R = \frac{b_1 U^2}{i}.$$

Теперь получаем для φ такое выражение:

$$\varphi = \frac{b_1 u^2}{R} = i\,\frac{\Omega^2}{\left(\omega' + \frac{\Omega - \omega'}{\lambda} s\right)^2}.$$

После этого находим такое выражение для предыдущего интеграла, обозначив: $\omega' = b$ и $\frac{\Omega - \omega'}{\lambda} = a$:

$$\int_{0}^{\lambda} (\varphi - i)\,ds = i \int_{0}^{\lambda} \left\{ \frac{\Omega^2}{(b + as)^2} - 1 \right\} ds = i \left\{ \frac{\Omega^2 s}{b(b + as)} - s \right\}_{0}^{\lambda} = i\lambda \left(\frac{\Omega}{\omega'} - 1\right).$$

Следовательно,

$$y' = \frac{U^2 - U'^2}{2g} + i\lambda\left(\frac{\Omega}{\omega'} - 1\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (254_2).$$

Из предыдущего находим, полагая $R = H$:

$$U^2 = \frac{1}{b_1} Hi \text{ и } U' = U\frac{\Omega}{\omega'}, \text{ следов. } U'^2 = \left(\frac{\Omega}{\omega'}\right)^2 \frac{Hi}{b_1},$$

здесь примем, как среднее значение:

$$b_1 = 0{,}000366 \text{ и } \frac{1}{2gb_1} = 140.$$

Следовательно,

$$\frac{U^2 - U'^2}{2g} = \frac{Hi}{2gb_1}\left\{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega'}\right)^2\right\}.$$

Теперь получаем:

$$y' = \frac{Hi}{2gb_1}\left\{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega'}\right)^2\right\} + i\lambda\left(\frac{\Omega}{\omega'} - 1\right) = i\left(\frac{\Omega}{\omega'} - 1\right)\left\{\lambda - 140\,H\left(1 + \frac{\Omega}{\omega'}\right)\right\} \quad (254_3)$$

Так как $\Omega = LH$ и $\omega' = L'(H + y')$, где y' может быть и больше и меньше 0, то это уравнение можно переписать еще так:

$$y' = i\left\{\frac{LH}{L'(H + y')} - 1\right\}\left\{\lambda - 140\,H\left(1 + \frac{LH}{L'(H + y')}\right)\right\} \quad \ldots \quad (254_4).$$

Знак y' обусловливается знаком величины, стоящей во вторых больших скобках. Именно:

$$y' < 0, \text{ если } \lambda < 140\,H\left(1 + \frac{\Omega}{\omega'}\right);$$

это показывает, что в сечении BB' существует понижение горизонта под линией ABC. Наоборот,

$$y' > 0 \text{ при } \lambda > 140\,H\left(1 + \frac{\Omega}{\omega'}\right),$$

что дает в сечении BB' возвышение горизонта над линией ABC.

В пояснение своих формул (254_3 и 254_4) Дюпюи приводит результаты вычислений по этим формулам при $i = 0{,}0003$, для двух значений глубин $H = 1$ м. и $H = 5$ м. и для различных значений λ. Эти результаты показаны в нижеследующих таблицах.

Глубина H м.	$H = 1$ м.						
Расстояние λ м.	100	200	420	1000	2100	3000	4000
Величина y' м.	−0,15	−0,09	0	0,14	0,29	0,36	0.43

Глубина H м.	$H = 5$ м.						
Расстояние λ м.	100	200	420	1000	2100	3000	4000
Величина y' м.	−1,18	−1,03	−0,81	−0,45	0	0.26	0,50

Определим теперь величину *кажущегося подпора* $cc' = y''$. Обозначим для сечения CC': скорость U'', живое сечение ω'' и расстояние между сечениями CC' и BB' через λ'. Тогда также, как и выше, найдем:

$$y'' = \frac{U'^2 - U''^2}{2g} + \int_0^{\lambda'} (\varphi - i)\, ds = \frac{U'^2 - U''^2}{2g} + i\lambda'\left(\frac{\Omega^2}{\omega'\omega''} - 1\right) \ldots (254_5).$$

Величину *истинного напора* $Cc = Y$ получим, сложив уравнения (254_2 и 254_5).

$$Y = y' + y'' = \frac{U^2 - U''^2}{2g} + i\left\{\lambda\left(\frac{\Omega}{\omega'} - 1\right) + \lambda'\left(\frac{\Omega^2}{\omega'\omega''} - 1\right)\right\} \ldots (254_6).$$

Для первого приближения принимаем $U = U''$ и $\Omega = \omega''$, тогда имеем:

$$Y = i(\lambda + \lambda')\left(\frac{\Omega}{\omega'} - 1\right) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (254_7).$$

Так как $\Omega = LH$ и $\omega' = L'(H + y')$, то это выражение можем переписать в таком виде:

$$Y = i(\lambda + \lambda')\left\{\frac{L}{L'}\frac{H}{H + y'} - 1\right\} = i(\lambda + \lambda')\left\{\left(\frac{L}{L'} - 1\right) - \frac{L}{L'}\left(\frac{y'}{H} - \left(\frac{y'}{H}\right)^2 + \ldots\right)\right\}.$$

Если в этом выражении пренебречь квадратами и высшими степенями величины $\left(\frac{y'}{H}\right)$, то получим:

$$Y = i(\lambda + \lambda')\left(\frac{L}{L'} - 1\right) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (254_8).$$

Если воспользоваться данными предыдущего примера, то при $\lambda = \lambda' = 100$ м. находим: при $H = 1$ м., $Y = 0{,}078$ и при $H = 5$ м.; $Y = 0{,}09$ м.; при $\lambda = \lambda' = 1000$ м. получаем соответственно $Y = 0{,}44$ м. и $Y = 0{,}720$ м.

В случае, когда расстояния λ и λ' не велики и сила $\varphi = \frac{b_1 u^2}{R}$ мало отличается от i, то величина $y' < 0$, а скорость U'' будет близка к U; тогда, пренебрегая в выражениях для y' и y'' силами трения, получаем

$$y' = -y'' = \frac{U^2 - U'^2}{2g}; \quad Y = \int_0^{\lambda + \lambda'} (\varphi - i)\, ds \ . \ . \ . \ (254_9).$$

Эти выражения показывают, что истинный подпор Y может быть весьма мал в то время, когда величина y'' будет довольно значительной. Если же, наоборот силы трения будут велики, тогда величина

$$\int_0^{\lambda} (\varphi - i)\, ds \text{ будет значительно больше } \frac{U^2 - U'^2}{2g}.$$

В этом случае $y' > 0$ и получится профиль по черт. 285_5. Тогда действительный напор Y будет значительно больше y'.

§ 72. Стеснение реки или канала продольными дамбами. Здесь следует различать два случая: первый случай соответствует дамбам значительной длины, и второй случай—дамбам коротким. Рассмотрим *первый случай*. На черт. 259 представлен канал в продольном вертикальном разрезе и в плане; $A_0A - A_0A$ — канал или река нестесненная дамбами, $BC - BC$ — канал или река стесненная дамбами. Так как длина стесненного канала довольно велика, то можно считать движение в нем равномерным, также как и в нестесненной части канала. Глубина стесненного потока H' больше чем нестесненного; уклон дна принимаем на всем протяжении одинаковым. Предположим для упрощения, что канал имеет прямоугольное поперечное сечение, в котором ширина l весьма значительна в сравнении с глубиной H; поэтому можно принять, что гидравл. радиус $R = H$.

Пусть канал в нестесненной части имеет ширину l; глубину H; скорость V; те же элементы для канала в стесненной части: l', H' и V'. По форм. Шези имеем:

для первой части канала $b_1 V^2 = Hi$,
„ второй „ „ $b_1 V'^2 = H'i$.

Коэфф. трения b_1 принимаем одинаковым; отсюда находим:

$$\frac{H}{H'} = \left(\frac{V}{V'}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d).$$

Равенство расходов представится так:

$$Q = HlV = H'l'V'.$$

Отсюда

$$\frac{H'}{H} = \frac{lV}{l'V'} = \frac{l}{l'}\sqrt{\frac{H}{H'}} \text{ или } \frac{H'}{H} = \sqrt[3]{\left(\frac{l}{l'}\right)^2}.$$

Теперь находим увеличение глубины y:

$$H' - H = y = H\left[\sqrt[3]{\left(\frac{l}{l'}\right)^2} - 1\right] \quad \ldots\ldots\ldots (e).$$

Итак, увеличение глубины пропорционально глубине канала в нестесненной части. При паводках, когда глубина H может быть очень значительной, величина y будет также велика в предположении, что дамбы незатопляемы. Найдем скорость V' в стесненной части; из выражения (d) получаем:

$$V' = V\sqrt{\frac{H'}{H}}.$$

Так как $H' > H$, то $V' > V$; итак, несмотря на увеличение глубины канала, в стесненной его части скорость течения больше, чем в нестесненной части.

Сопряжение с верховой стороны горизонта DD с горизонтом GK производится двумя кривыми FE и ED. Кривая ED может быть принята приблизительно за прямую. Величину $EE' = y'$ определим по условию, что между сечениями AA и BB скорость V переходит в V'; следовательно,

$$y' = a_1 \frac{V'^2 - V^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f).$$

Тогда возвышение точки E определим из равенства (приблизительно):

$$EK = y' + E'K = y' + (H' - H).$$

Кривая FE есть линия подпора; ассимптота для этой кривой представляется линией GK, соответствующей глубине H; кривую FE построим по известной величине EK (§§ 65 и 66).

Численный пример. Пусть канал в нестесненной части имеет ширину в 120 м., глубину $H = 3$ м. и среднюю скорость $V = 1{,}25$ м. Определить глубину H' канала в стесненной части, если расстояние между дамбами $l' = 100$ м. По форм. (e) находим увеличение глубины:

$$y = 3\left[\sqrt[3]{\frac{120}{100}} - 1\right] = 3 \cdot 0{,}129 = 0{,}387 \text{ м.}$$

Следоват., глубина $H' = 3{,}387$ м.

Итак, устройством водостеснительных дамб достигается увеличение глубины на 13%. Скорость V также увеличивается, именно получаем:

$$V' = 1{,}25\sqrt{\frac{3{,}387}{3}} = 1{,}25 \cdot 1{,}06 = 1{,}325 \text{ м.}$$

Скорость увеличивается на 6%.

Найдем величину $EE' = y'$:

$$y' = 1{,}1 \cdot \frac{(1{,}325)^2 - (1{,}25)^2}{2g} = 0{,}126 \text{ м.}$$

Тогда подъем горизонта воды EK равен (приблизительно):

$$EK = 0{,}126 + (3{,}387 - 3) = 0{,}513 \text{ м.}$$

Переходим теперь ко *второму случаю*, когда дамбы канала имеют небольшое протяжение. В этом случае в стесненной части канала BC

(черт. 260) движение нельзя считать равномерным; наоборот, здесь движение будет *неравномерное* и глубина воды будет различна в различных живых сечениях. На длине $B'C'$ кривая поверхности воды представляется кривой спада; в точке C' она лежит ниже линии равномерного движения M_0M. Вследствие расширения русла горизонт воды из C' поднимается до D' на величину y; далее на протяжении $D'M$ горизонт соответствует равномерному движению. На протяжении $A'F'$ поверхность воды представляет кривую подпора; ассимптотой для этой кривой является линия M_0M равномерного движения. На длине $A'B'$ поверхность воды располагается по кривой $A'B'$. Найдем величину y. Пусть для сечения DD: ширина—l, глубина—H и скорость—V; для сечения CC' те же элементы: l', H' и V'. Здесь при постепенном расширении русла не будут проявляться водовороты, почему живая сила тратится только на увеличение потенциальной энергии, т.-е. на увеличение глубины; тогда получаем:

$$y = \alpha_1 \frac{V'^2 - V^2}{2g}.$$

Из равенства расходов:

$$Q = lHV = l'H'V'$$

находим:

$$V' = V\frac{lH}{l'H'},$$

а так как $H' = H - y$, то получаем:

$$y = \alpha_1 \frac{V^2}{2g}\left[\left(\frac{lH}{l'(H-y)}\right)^2 - 1\right] \quad \ldots \ldots \ldots (g).$$

Это уравнение 3-й степени относительно y; приближенное значение y получим, если в правой части этого выражения положим $y = 0$. По известной величине y находим линию $C'D'$, которую можно приближенно принять за прямую. Линию $B'C'$ строим как линию спада, о чем подробно излагается в § 65. Построив эту линию, найдем глубину в сечении BB. Далее на протяжении $A'B'$ поверхность воды поднимается на высоту, определяемую по формуле (g). Наконец, кривую $A'F'$ построим как линию подпора по указаниям, данным в §§ 65 и 66.

Численный пример. Положим, канал в нестесненной части имеет ширину $l = 120$ м., глубину $H = 3{,}0$ м. и среднюю скорость $V = 1{,}25$ м.; ширина стесненной части канала $l' = 100$ м.

По формуле (g) находим первое приближение для y:

$$y = 1,1 \cdot \frac{(1,25)^2}{2 . 9,81}\left[\left(\frac{120}{100}\right)^2 - 1\right] = 0,039 \text{ м.}$$

Следоват., наименьшая глубина в стесненном сечении канала равна:

$$H' = H - y = 3,000 - 0,039 = 2,961 \text{ м.}$$

Итак, существенное различие между обоими рассмотренными случаями заключается в том, что при длинных дамбах глубина получается более нормальной, а при коротких — глубина в некоторых частях стесненного русла будет менее нормальной. Что касается уклона поверхности воды, то при длинных дамбах уклон равен уклону нестесненного русла, а при коротких дамбах средний уклон получается большим, чем уклон нестесненного русла.

§ 73. Переход канала из узкого сечения в широкое. При переходе канала из узкого сечения в широкое следует различать два случая: первый случай соответствует длинной широкой части (черт. 261); второй случай—короткой широкой части (черт. 262_1). Пусть в узкой части ширина l, глубина H и скорость V, а в широкой части—l', H' и V'.

a) В *первом случае* поверхность воды в месте перехода из узкой части в широкую представляется двумя кривыми: кривой спада EC, для которой ассимптотой является линия FF, соответствующая глубине H, и кривой CK, при чем глубина постепенно уменьшается и делается равной H'. Найдем отношение глубин H и H'. По формуле Шези имеем:

для узкого русла $b_1 V^2 = Hi$,
„ широкого „ $b_1 V'^2 = H'i$.

Принимаем коэфф. трения b_1 одинаковым, так же как и продольный уклон i; тогда

$$\frac{H}{H'} = \left(\frac{V}{V'}\right)^2.$$

Затем равенство расходов дает:

$$Q = HlV = H'l'V'.$$

Следоват.,

$$\frac{H'}{H} = \frac{lV}{l'V'} = \frac{l}{l'}\sqrt{\frac{H}{H'}} \text{ или } \frac{H'}{H} = \sqrt[3]{\left(\frac{l}{l'}\right)^2} \quad \ldots\ldots (i).$$

Уменьшение глубины y при переходе из узкого русла в широкое равно:

$$y = H - H' = H\left[1 - \sqrt[3]{\left(\frac{l}{l'}\right)^2}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (k).$$

Понижение горизонта $C'C'' = y_1$ соответствует переходу скорости V в скорость V'; оно найдется из равенства:

$$y_1 = \alpha_1 \frac{V'^2 - V^2}{2g} = \alpha_1 \frac{V^2}{2g}\left[\left(\frac{Hl}{(H-y)l'}\right)^2 - 1\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; (l).$$

Полагая здесь в правой части $y = 0$, получим первое приближение для y_1, которым можно довольствоваться во многих случаях.

Численный пример. Пусть ширина узкого русла $l = 100$ м.; глубина его $H = 2$ м.; скорость $V = 1{,}3$ м., а ширина широкого русла $l' = 120$ м.

Глубина H' в широком русле определится из равенства (i):

$$H' = H\sqrt[3]{\left(\frac{l}{l'}\right)^2} = 2\sqrt[3]{\left(\frac{100}{120}\right)^2} = 2 \cdot 0{,}885 = 1{,}770 \text{ м.}$$

Уменьшение глубины при переходе из узкого русла в широкое равно

$$y = 2 - 1{,}770 = 0{,}230 \text{ м.}$$

Понижение горизонта $C'C''$ равно:

$$y_1 = 1{,}1 \cdot \frac{(1{,}3)^2}{2 . 9{,}81}\left[\left(\frac{100}{120}\right)^2 - 1\right] = -0{,}158 \text{ м.}$$

Скорость $V' = V\dfrac{HL}{H'L'} = 1{,}3 \cdot \dfrac{2 . 100}{1{,}77 . 120} = 1{,}224$ м.

б) Во *втором* случае, когда широкая часть занимает небольшое протяжение, получается следующая поверхность воды. Обозначим через l, H и V — ширину, глубину и скорость в узкой части; тогда найдем, что поверхность воды EC в узкой части понижается при подходе к сечению AA, имея ассимптотой линию FC' с глубиной H. Далее между сечениями AA и BB поверхность поднимается по кривой CD; в расширенной части между сечениями BB и $B'B'$ поверхность имеет вид подпорной кривой DD'. Затем при переходе из $B'B'$ в $A'A'$ поверхность представляется кривой $D'C'$, сопрягающейся с прямой $C'K$ соответствующей глубине H. Если бы широкая часть имела значительное протяжение, то глубина воды в ней равнялась бы H' и поверхность ее была бы GG'.

Примечание. Вопросы, изложенные в §§ 71—73, подробно разбираются в сочинении: „*Dupuit.* Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les canaux decouverts". 2-me ed. Paris. 1863.

§ 74. О движении воды на повороте реки. Движение воды в реке на ее повороте или закруглении отличается особенностью, которая впервые была теоретически разъяснена французским ученым *Буссинеском* еще в 1868 г. При повороте течение ударяет о вогнутый берег a (черт. 262_2) и размывает его; в то же время на выпуклом берегу b отлагается грунт. Это явление происходит оттого, что в плоскости каждого живого сечения ab поворота реки проявляются два течения: нижнее по дну и выше его от a к b и верхнее по поверхности и ниже ее — в обратном направлении. Так как одновременно те же частицы двигаются по кривым линиям закругления, то в результате получаются донные течения, имеющие вид кривых 1—1', 2—2'..., которые показывают, что частицы 1, 2,...., подвигаясь по дну по некоторым спиральным линиям, подходят к выпуклому берегу b, и при этом перемещают грунт по дну реки к этому берегу. Далее частицы жидкости поднимаются к верху и направляются к берегу a; у этого берега они опускаются вниз, размывая внизу грунт этого берега.

Этот вопрос подробно рассмотрел *проф. Н. Е. Жуковский*: он нашел величины проекций v и w скорости в плоскости живого сечения, где v — проекция на ось Y, направленную по радиусу закругления и w — проекция на ось Z, направленную вертикально вверх.

Если рассматривать движение в канале прямоугольного поперечного сечения высотою $2h$ (черт. 262_3), то значения v и w для частицы в расстояни z от плоскости XY будут следующие:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{\rho c^2 h^6}{120\mu^3 r^3}(1-t^2)\left(2+\sqrt{\frac{23}{7}-t^2}\right)\left(2-\sqrt{\frac{23}{7}-t^2}\right) \\ w &= \frac{\rho c^2 h^7}{420\mu^3 r^4}\,t(1-t^2)(5-t^2). \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (m).$$

Здесь $t=\frac{z}{h}$; r — расстояние рассматриваемой частицы от центра закругления; μ — коэффициент вязкости; $c=\frac{2A\mu}{h^2}$; A—постоянное количество.

Что касается скорости u по окружности радиуса r, то она равна:

$$u=\frac{A}{r}(1-t^2) \quad \ldots \quad (n)$$

Из выражений для u, v и w получается, что течение от берега a к берегу b существует в нижней части живого сечения, начиная с глубины $0{,}79\,H$ (H — глубина реки) и до дна реки. Во всей остальной части живого сечения проявляется течение в обратном направлении.

Наибольшая скорость v проявляется на поверхности и на глубине равной $0{,}38\,H$ от поверхности. В виду таких теоретических выводов весьма желательно измерять в реках скорости не только нормальные к живому сечению (u), но также скорости v и w в самом живом сечении, хотя, к сожалению, не имеется пока приборов для подобных измерений. Подробности см.: профес. *Н. Е. Жуковский*. „О движении воды на повороте реки". Математический сборник. Том 29. 1915 г.

Относительно движения воды в реках заметим еще следующее. По исследованию *Буссинека* (см. подробности в книге: профес. *Д. К. Бобылев*. Очерк теории водяных течений, выработанной Буссинеком. 1898) в прямых частях реки при *неравномерном* движении должны проявляться поперечные скорости, т.-е. в плоскости живого сечения. Он рассматривает два случая сечений; первое сечение — прямоугольное высотою $2h$ и весьма большою шириною a; второе сечение—круговое сечение радиуса R в предположении, что или все сечение занято потоком, или занято только на половину. Для прямоугольного сечения получаются такие выражения для проекций поперечной скорости:

$$v=0, \quad w=\left(\frac{z}{h}\cdot\frac{\partial h}{\partial s}\right)u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (n_1),$$

где u — скорость вдоль течения (по оси абсцисс); z — глубина воды в рассматриваемой точке, считая от поверхности воды; $\frac{\partial h}{\partial s}$ — изменение глубины потока вдоль оси его; s — абсцисса точки.

Для кругового поперечного сечения получаются такие выражения:

$$v=\frac{y}{r}W; \quad w=\frac{z}{r}W; \quad W=\left(\frac{r}{R}\cdot\frac{\partial R}{\partial s}\right)u \quad \ldots\ldots (n_2).$$

Здесь r — расстояние точки от центра сечения; u — скорость вдоль течения, т.-е. по оси абсцисс; $\frac{\partial R}{\partial s}$ — изменение радиуса R сечения вдоль потока.

Из этих выражений для v и w видно, что по известной скорости u в данной точке и по известному изменению глубины $2h$ или радиуса R по продольной оси возможно вычислить эти скорости.

Профес. *А. Милович* (см. его исследование: „Нерабочий изгиб потока жидкости". Бюллетени Политехнического Общества за 1914 г.) произвел целый ряд опытов в гидравлической лаборатории Донского Политехнического Института над движением воды в закруглениях; для опытов был устроен канал с парафиновыми стенками прямоугольного поперечного сечения шириною 0,24 м., высотою 0,15 м.; радиус внутреннего закругления 0,16 м. и наружного — 0,4 м.; угол при центре

180°. Для определения направления донных течений пускались помощью пипетки капли чертежной туши по дну канала у начала закругления; тогда ясно было движение частиц по кривым, показанным на черт. 262_2 и представляющим Архимедову спираль. Затем на поверхность воды в начале закругления бросался порошок голландской сажи; этот порошок относился в наружную сторону закругления.

Эти опыты доказали, что на закруглении в плоскости живого сечения существует донное течение от наружного закругления к внутреннему и что на поверхности проявляется течение обратное. Таким образом подтверждаются теоретические выводы Буссинека и профессора Жуковского. Причина, вызывающая эти течения в живом сечении, по мнению проф. Миловича совершенно иная, чем по теории Буссинека.

По Буссинеку вследствие трения частиц на дне канала проявляются в нижней части живого сечения канала вихревые нити, которые, двигаясь по закруглению, перекашиваются и сообщают донным частицам скорость в направлении внутреннего закругления, а поверхностным частицам — скорость к наружному закруглению. По теории профессора Миловича причина заключается в разности давлений, проявляющихся на стенках внутреннего и внешнего закругления.

При этом он находит, что изменение скоростей вдоль закругления в живом сечении следует закону площадей и выражается так (ср. равенство *n*)

$$ur = C \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (p),$$

где u — скорость частицы и r — расстояние частицы от центра закругления.

Из этого равенства видно, что наибольшие скорости соответствуют внутреннему закруглению, а наименьшие — наружному, и что закон изменения скоростей — *гиперболический.* Движение жидкости в закруглении происходит таким образом, что каждая частица имеет только поступательное движение. Для подтверждения этого проф. Милович применял небольшой цилиндрический поплавок, внизу которого были прикреплены две вертикальные взаимно перпендикулярные плоские рамки, затянутые шелком пропитанным парафином; на верхнем основании поплавка была назначена прямая линия (стрелка) по направлению течения в прямой части канала. При проходе такого поплавка по закруглению направление этой стрелки оставалось все время без перемены (черт. 262_2). Если бы жидкость в закруглении кроме поступательного движения имела еще вращательное, то стрелка на поплавке

изменила бы свое направление. Из вышеизложенного видно, что движение частиц на закруглении происходит по линиям тока, по своему виду подходящим к *винтовым;* при этом осью винта является дуга средней окружности закругления.

По Миловичу сопротивление в закруглении, имеющем средний радиус R, внутренний — r_1 и наружный — r_2, при центральном угле равном $n \cdot 90° + \delta°$ может быть представлено под таким видом для каналов и труб сечений прямоугольного и круглого:

$$H = \zeta \frac{V^2}{2g},$$

где V — средняя скорость течения в прямой части канала или трубы и ζ — коэфф. сопротивления приблизительно равный:

$$\zeta = \frac{4aR^3(n + \operatorname{Sin}\delta)}{\left\{r_1 r_2\left(1 + \frac{1}{m}\left(\frac{a}{R}\right)^2\right)\right\}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (q);$$

здесь: a — половина ширины сечения равная $\frac{1}{2}(r_2 - r_1)$; $m = 3$ для прямоугольного сечения и $m = 4$ для круглого сечения; n — число прямых углов и δ — острый угол, если закругление имеет центральный угол не равный целому числу прямых углов. Справедливость этой формулы поверялась опытами над движением воды в трубах змеевиков ($d = 3/4$ дюйма) с 6 и с 23 прямыми углами.

Если радиус закругления R очень мал сравнительно с шириной b канала, именно если $R < 2{,}15\,b$, то жидкость при движении по такому закруглению отходит от внутреннего закругления и тогда между потоком и стенкой внутреннего закругления образуется полость c (черт. 262_4), заполненная неподвижною жидкостью. Следоват., течение жидкости полным сечением канала возможно только при $R > 2{,}15\,b$. Окончательно автор этих опытов приходит к такому выводу. Каждое изменение направления движения жидкости (т.-е. изгиб потока) требует для своего выполнения затраты энергии, равной разности давлений на граничных поверхностях, т. е. боковых стенках. Эта разность давлений получается вследствие инерции при переходе прямолинейного движения в криволинейное и вызывает перемещение частиц внутри движущейся массы, т.-е. внутреннюю деформацию. Таким образом внешняя деформация потока, т.-е. поворот течения, переходит в деформацию внутреннюю.

Численный пример. Определим по форм. (q) коэфф. сопротивления ζ закругления с центральным углом в 90° при следующих данных:

радиус средней окружности $R = 0,75$ м.; внутренний радиус $r_1 = 0,6$ м.; наружный радиус $r_2 = 0,90$ м.; ширина прямоугольного канала $b = 2a = 0,30$ м.; $a = 0,15$; $n = 1$; $\delta = 0$; $m = 3$. Условие сплошного течения по каналу, т. е. без образования полости c, здесь выполнено, так как $0,75 > 0,645$.

По форм. (q) получаем:

$$\zeta = \frac{4 . 0,15 . (0,75)^3}{\left\{0,6 . 0,9\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{0,15}{0,75}\right)^2\right)\right\}^2} = 0,817.$$

По формуле *Вейсбаха* для прямоугольных сечений имеем:

$$\zeta = 0,124 + 3,104\left(\frac{a}{R}\right)^{7/2} = 0,135$$

или в 6 раз меньше.

Глава IX. О движении волн.

§ 75. Различные виды волн. Одиночная волна. Изучение движения волн необходимо для мореплавателей, судостроителей и для инженеров - гидротехников. Для этих последних это изучение важно в виду того, что волны действуют весьма разрушительно на морские и речные сооружения, как-то: маяки, набережные, молы, откосы берегов, дно каналов и т. п. На сколько велики могут быть удары волн на сооружения и на сколько следоват. разрушительно действие их, видно из того, что напр. в Шербурге бетонный массив объемом в 40 м^3. весом около 80 т. был переброшен волнами на высоту 4 м. и на расстояние 4 м.; в Сетте бетонный массив в 70 м^3. весом около 140 т. был сдвинут на 1 м., ходя представлял для удара волн площадь всего 7,5 м^2. При встрече волн с сооружениями волна разбивается и поднимается на очень большую высоту; напр. на маяке в Шербурге волна поднимается сплошной массой на высоту 36 м., а на Эдинстонском маяке около г. Плимута поднимается на высоту до 50 м.

При рассмотрении волн необходимо отличать движение волн от движения частиц воды, составляющих волну. Опытом установлено, что волны, движущиеся со скоростью многих миль в час, не увлекают с собою плывущего корабля и проходят по борту его и под дном, не изменяя заметно движение корабля. Волны идущие к берегу не увлекают с собою плавающих тел, которые после прохода волны остаются на своем месте.

Волны могут быть следующих видов.

а) Волны *одиночные*; такая волна не вызывает ряда других волн, а бежит по каналу одна, напр. волна перед пароходом идущим, по каналу. Эти волны могут возникать в длинных узких каналах.

б) Колебательные или *последовательные* волны образуются на водных площадях вследствие действия ветра; после утихшего ветра волнение не сразу успокоивается, а переходит в так называемую *мертвую зыбь*, которая представляет систему колебательных волн. К таким волнам принадлежат волны прилива и отлива, происходящие от совокупного действия луны и солнца на водные массы морей и океанов. Только размеры приливных волн значительно больше обыкновенных; напр. длина океанской волны (т.-е. расстояние между двумя смежными гребнями) после шторма не превосходит 600 фут., а приливные волны имеют длину до 4000 миль. Эти волны проявляются на очень больших водных поверхностях.

в) Стоячие волны (толчея) образуются на поверхностях, ограниченных плоскими стенками, перпендикулярными к движению колебательных волн. В этом случае волны, отражаясь от стенок, идут в прямо противоположном направлении, имея теже размеры; соединение волн до отражения и после отражения дает волну наз. толчеей. Поверхность воды изменяется в каждый момент, но гребни и впадины волн остаются на своих местах; таким образом волны поднимаются и опускаются на одном и том же месте, без видимого поступательного движения. Толчея может проявиться на ограниченных водных пространствах.

Волны на водных пространствах происходят от действия ветра. При скорости ветра меньше 0,25 м. никакого волнения на водной поверхности не проявляется. При скорости больше 0,5 м. поверхность покрывается *рябью*, т.-е. очень пологими волнами длиною в несколько сантиметров и высотою в несколько милиметров. При ветре со скоростью больше 1 м. получается волнение, состоящее вначале из волн незначительных размеров, затем при продолжительном ветре волны могут принять громадные размеры и тем больше, чем глубже море и чем оно обширнее. Вслед за прекращением ветра волнение приобретает более правильный вид и получаются колебательные волны.

Одиночные волны. Одиночные волны были наблюдаемы впервые в 1844 г. *Скотт-Росселем* в узком канале. Они могут быть произведены различным образом. Если устроить канал длиною 30 ф., шириною 12 д., высотою 8 д., и наполнить его водою на глубину 4 д., затем взять щит *а* (черт. 263_{1-5}) плотно прилегеющий к дну и стенкам лотка и передвигать его вправо—сперва ускоренно а затем замедленно, то в

результате перед щитом образуется водяное возвышение, которое распространяется по каналу вправо в виде одиночной волны. Объем волны равен объему воды вытесненному щитом. Высота волны тем выше, чем с большею скоростью перемещался щит. Такую же волну вызовем, если быстро опустим в левую часть канала какое-либо твердое тело (черт. 264_{1-2}). Наконец можно поступать еще так. Щит a (черт. 265_{1-4}) опустим в воду немного вправо от стены AB и в пространство $ABDC$ нальем воды на высоту AB, затем быстро вынем щит из воды; тогда получится одиночная волна. Если в объеме $ABDC$ было воды больше, чем нужно для образования одиночной волны, то позади ее получается еще добавочная *положительчая* волна (черт. 266), которая движется тише и потому в начале видим одну составную волну, а затем задняя волна отделяется от передней. Если высота объема воды $ABDC$ значительно больше ширины его, то волна стремится образоваться с высотой большею, чем высота соответствующая этому объему; поэтому недостающее количество воды увеличивается на счет воды в самом канале, вследствие чего образуется сзади одиночной волны добавочная *отрицательная* волна (черт. 267), которая расположена ниже горизонта воды в канале. Одиночная волна может проходить большие расстояния, мало изменяясь в виде, что зависит от глубины и ширины канала; высота волны увеличивается с увеличением глубины. Уменьшение высоты волны и ее разрушение происходит быстрее всего в узких и мелких каналах с поворотами и при большой шероховатости стенок; при этом частицы задерживаются трением больше всего около стенок и около дна и объем волны уменьшается.

Для объяснения механизма движения одиночной волны разделим объем воды в канале на весьма тонкие слои вертикальными поперечными плоскостями (черт. 268). Если волна образуется движением щита, как объяснено выше, то при таком способе слой воды, ближайший к щиту, под давлением щита несколько увеличивается в высоту и делается тоньше; этот слой передает давление следующему (вправо лежащему) слою, который также увеличивается в высоту и утоняется и т. д. Таким образом слои прилегающие к щиту становятся выше других, но тоньше. Щит вначале перемещается ускоренно, а потому слои ближайшие к нему делаются все выше и выше; толщина же их становится все меньше и меньше. Затем щит перемещается замедленно, поэтому слои не так сильно надавливаются, высота их уменьшается, а толщина увеличивается. Таким образом в канале перед щитом получается волна вида показанного на черт. Давления слоев a, b передаются слоям лежащим от них вправо в таком же порядке, которые

поэтому становятся последовательно несколько выше, но тоньше. Отсюда видно, что вдоль канала передается через слои воды давление, произведенное вначале щитом. Это-то давление и производит вышеописанную деформацию слоев воды. По мере передачи этого давления слоям вправо лежащим — деформация слоев влево лежащих уничтожается и эти слои принимают свой первоначальный вид. Следовательно, наблюдая движение одиночной волны, мы видим перемещение деформации воды, произведенной движением щита. При этом каждая частица воды перемещается, но мало, описывая троекторию *mn* (черт 269) в виде полуэллипса с большою осью, расположенною горизонтально и равной длине l, на которую передвинута стенка для образования волны (черт. 263_5); таким образом в начале частица движется вправо и вверх, а затем вправо и вниз. Перемеще ниечастиц легко наблюдать, если опустить шарики из воску на шелковинках на разные глубины. Опыт показывает, что частицы лежавшие в каком-либо поперечном сечении до прохода волны, будут лежать в одном и том же поперечном сечении и после прохода волны; следоват. частицы одного и того же сечения испытывают одно и тоже горизонтальное перемещение l, которое равно объему волны деленному на живое сечение канала. Вертикальное перемещение частицы пропорционально расстоянию ее от дна канала. Если высота волны h_0, глубина воды в канале H и расстояние частицы от дна h, то вертикальное перемещение равно $f = \frac{h_0}{H} h$. Частицы лежащие вблизи дна испытывают только горизонтальное перемещение.

Скорость волны по опытам *Скотт-Росселя* и *Базена* выражается так:

$$V = \sqrt{g(H+h)} = \sqrt{gH\left(1+\frac{h}{H}\right)} = \sqrt{gH}\left(1+\frac{h}{2H}\right) \quad . \ . \ . \ . \ . \ (255),$$

где H — нормальная глубина воды в канале и h — высота волны в наиболее повышенной точке.

Движение одиночных волн изучено теоретически *Буссинеком*, который вывел для V точное выраженце; именно:

$$V = \sqrt{gH}\left(1+\frac{3h}{4H}+\frac{H^2}{6h}\frac{d^2h}{dx^2}\right) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (256).$$

Здесь величина

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2h}{dx^2}$$

представляет кривизну поверхности волны, если количеством

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)^2$$

пренебречь по его малости сравнительно с единицей; при этом за ось абсцисс принята длина канала и совмещена с поверхностью воды, а переменная высота h волны принята за ординату. Следоват. из формулы Буссинека видим, что различные вертикальные слои волны движутся с разными скоростями в зависимости от высоты h волны в слое и от кривизны поверхности, соответствующей этому слою. Поэтому одиночные волны при своем движении должны искажаться и терять свой первоначальный вид. Если в канале глубиною H движется одиночная волна ABC высотою h_1 (черт. 270), то вследствие замедления движения головы B волны происходит наплыв жидкости со стороны быстрее идущих ближайших частей пласта, почему головная часть подымается, образуя *передовой вал* высотою около $\frac{3}{2}h_1$. Передовая волна соединяется с остальною массою одиночной волны несколькими возвышениями G и углублениями F. Если одиночная волна сзади ограничивается массою с выпуклостью обращенною вверх, то хвост волны стремится отделиться от остальной массы. Скотт-Россель наблюдал распадение длинной волны на несколько отдельных волн. Буссинек теоретически нашел, что может существовать такая одиночная волна, в которой все части движутся с одинаковою скоростью и которая поэтому не искажается. Такая волна называется *уединенной*. Скотт-Россель еще в 1844 г. доказал опытом возможность образования и распространения такой волны. Буссинек представляет уравнение уединенной волны в таком виде (см. подробности в сочинении: проф. *Д. Бобылев*. Очерк теории водяных течений, выработанной Буссинеком. 1898):

$$e^{k(s-c)} = 2\left(\frac{h_1}{h} - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{4\left(\frac{h_1}{h} - \frac{1}{2}\right)^2 - 1} \ldots\ldots\ldots \quad (257)$$

или

$$h = \frac{h_1}{\operatorname{Cos}^2 \frac{k}{2}(s-c)\sqrt{-1}} \ldots\ldots\ldots \quad (257a),$$

где $k = \sqrt{\frac{3h_1}{H^3}}$; H — глубина канала: h_1 — высота волны в ее вершине, h — переменная высота волны в точке, для которой абсцисса равна s; c — абцисса наибольшей ординаты кривой. Ордината центра инерции площади уединенной волны равна $\frac{1}{3}h_1$. Эта кривая имеет вид показанный на черт. 271; здесь ab — первоначальный горизонт воды канале; CMB — поверхность уединенной волны; KL — горизонталь-

пое дно канала; кривая CMB подходит к линии ab ассимптотически и имеет две точки перегиба m и n. Чертеж составлен для случая, когда высота волны $h_1 = \frac{1}{3} H$. Траектории описываемые частицами волны суть *параболы*, вершины которых обращены вверх, а оси идут вертикально вниз. На чертеже кривая NMN' представляет параболу, описываемую точкою N. Кривая $SDAR$ удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и кривая CMB. Когда высота волны h_1 довольно мала, то профиль уединенной волны можно приблизительно представить *синусоидой*, длина которой $L = 2\pi H$; эту кривую можно вычертить таким способом. Делим окружность диаметра h на $2n$ равных частей; центральный угол, соответствующий одному делению, равен $\varphi = \frac{\pi}{n}$. Затем по оси X откладываем $L = 2\pi H$ (черт. 272); эту длину делим также на $2n$ равных частей; из точек деления проводим линии параллельные оси Y, а из точек деления окружности проводим линии параллельные оси X; точки пересечения a, b, c принадлежат искомой синусоиде. Если какому-либо делению окружности соответствует центральный угол $\Psi = m\varphi = \frac{\pi m}{n}$, то соответственное деление по оси X равно $x = \frac{\pi H m}{n}$; следоват. $\Psi = \frac{x}{H}$. Поэтому уравнение рассматриваемой синусоиды представится так:

$$y = \frac{h}{2}(1 + \operatorname{Cos} \Psi) = \frac{h}{2}\left(1 + \operatorname{Cos} \frac{x}{H}\right) \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (a).$$

Если принять дно канала за ось X и ось Z направить вверх, то уравнение парабол описываемых частицами выражается по Буссинеку так:

$$\frac{3\Omega^2 z_0}{16 H^4} - (z - z_0) = \frac{3 z_0}{4 H^2}\left(x - x_0 - \frac{\Omega}{2H}\right)^2 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (258).$$

Здесь: Ω — объем жидкости, приподнятый уединенною волною; этот объем относится к единице ширины канала; H — глубина воды в канале; x_0 и z_0 — первоначальные координаты частицы M_0 до проявления волны; x и z — кординаты той же частицы при проходе волны; параметр параболы равен:

$$2p = \frac{2H^2}{3z_0} \text{ и } \Omega = 4H\sqrt{\frac{1}{3} H h_1} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (b).$$

Из уравнения параболы видно, абсцисса x_1 вершины параболы более абсциссы первоначального положения x_0 на величину $\xi = \frac{\Omega}{2H}$; орди-

наты z_1 вершин парабол выше ординат первоначального положения z_0 на величину:

$$\zeta = \frac{3\Omega^2 z_0}{16H^4} = \frac{h_1 z_0}{H} \qquad (c).$$

Ордината центра тяжести площади уединенной волны, считая ее от первоначального горизонта жидкости в канале, равна:

$$y = \frac{1}{3} h_1.$$

Полная энергия уединенной волны равна:

$$Э = \frac{\triangle \Omega^3}{8H^3} \qquad (d)$$

при этом кинетическая и потенциальная энергия волны равны между собою.

Пример. Пусть глубина канала $H = 1$ м.; высота волны $h_1 = 0{,}2$ м. Тогда объем $\Omega = 4\sqrt{\frac{1}{3} \cdot 0{,}2} = 1{,}0352$ м³.; затем $\xi = \frac{1{,}0352}{2} = 0{,}5176$ м. и $\zeta = 0{,}2\, z_0$, Следоват. при

$z_0 =$	1 м.	0,75 м.	0,5 м.	0,25 м.
$\zeta =$	0,2 м.	0,15 м.	0,10 м.	0,05 м.

Полная энергия волны $Э = \frac{\triangle (1{,}035)^3}{8} = 138{,}6 \frac{\text{килогр.}}{\text{метр.}}$.

Живая сила волны равна $\frac{1}{2} Э = 69{,}3 \frac{\text{килогр.}}{\text{метр.}}$.

Буссинек рассматривал также вопрос о распространении невысоких волн в канале с очень малым уклоном, при существовании в канале течения с равномерною скоростью U_0; он нашел, что в этом случае в канале могут двигаться двоякого рода волны — невысокия и неизменного вида. Волна первого рода (*нисходящая* волна) движется по течению со скоростью

$$V_1 = U_0 + \sqrt{gH} \qquad (e).$$

Волна второго рода (*восходящая*) движется против течения со скоростью

$$V_2 = U_0 - \sqrt{gH} \qquad (f).$$

Эти волны могут существовать только при течениях спокойных, для которых выполняется условие:

$$q < \sqrt{\frac{gH^3}{\alpha'}} \qquad (g).$$

где q — расход канала на единицу ширины его и $\alpha' = 1{,}1$. В стремительных же течениях эти волны не образуются. — Если в канале нет течения, то обе волны движутся с одною и тою же скоростью, приблизительно равною $V = \sqrt{gH}$, но в разные стороны. Эти выражения получены, пренебрегая трением; в общем они подтверждаются опытами Базена. Если же принимать во внимание уклон дна канала и трение жидкости, то оказывается, что обе эти причины уменьшают скорость волны.

§ 76. Колебательные или последовательные волны. Трохоидальные волны. Колебательныя волны могут быть двух родов: *трохоидальные* и *синусоидальные*; первые соответствуют случаю, когда скорость частиц не имеет потенциала и когда следоват. движение будет вихревым; вторые получаются тогда, когда скорость частиц имеет потенциал и следоват. движение не вихревое. В обоих случаях предполагается, что на частицы действует только сила тяжести. Рассмотрим случай *трохоидальных* волн при глубине бассейна неопределенно большой. Такие волны проявляются в океанах или в обширных морях после того, как стихнет ветер; тогда волны принимают довольно правильный вид и называются *зыбью*.

Движение частиц. Движение частиц происходит в вертикальных параллельных плоскостях перпендикулярных к бегу волн. Плоскость XY берем вертикальной параллельной направлению движения волны; ось X распологаем на свободной поверхности, когда волнения нет; ось Y — вертикально вниз. Уравнение движения частиц для этого случая было получено в 1802 г. профессором в г. Праге *Герстнером*.

Это уравнение приводится во всех курсах без вывода; оно только проверяется по двум условиям: по условию неразрывности массы при движении и по условию, что давление на свободной поверхности во всех точках постоянно. Так как эти условия действительно удовлетворяются, то заключаем, что эти уравнения справедливы. Здесь применяются уравнения гидродинамики, данные Лагранжем. Это один из немногих случаев применения их.

По Герстнеру кооординаты частицы x и y в функции от времени t выражаются следующим образом:

$$x = \alpha + \frac{1}{k} e^{-k\beta} \operatorname{Sin} k(\alpha + st) \quad y = \beta + \frac{1}{k} e^{-k\beta} \operatorname{Cos} k(\alpha + st) \ldots . (259).$$

Здесь сделаны следующие обозначения: s — скорость перемещения волны, т.-е. скорость, с которой перемещается, напр., вершина волны; λ — длина волны, т.-е. расстояние между двумя смежными вершинами

волны; $\frac{1}{k} = R_0$ радиус круга, окружность которого равна λ; следоват.

$$\lambda = 2\pi \cdot \frac{1}{k}; \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ и } R_0 = \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Затем величины α и β переменные, зависящие от начальных координат a и b рассматриваемой частицы и независящих от t. Положим в предыдущих уравнениях $t = 0$ и пусть для этого времени известны координаты a и b частицы. Тогда получаем:

$$a = \alpha + \frac{1}{k} e^{-k\beta} \operatorname{Sin} k\alpha \qquad b = \beta + \frac{1}{k} e^{-k\beta} \operatorname{Cos} k\alpha \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (260).$$

Из этих двух уравнений найдем искомые α и β. Так как это уравнения трансцендентные, то решение их затруднительно; по этому можно поступить следующим образом: Задаемся определенными значениями величин α и β и из предыдущих двух уравнений определяем a и b, что удобно сделать графическим путем. Именно по взятым величинам α и β находим точку C (черт. 273), из которой как центра описываем круг радиуса $R = \frac{1}{k} e^{-k\beta}$; затем проводим радиус CM_0, составляющий с вертикальною линией CM_0' угол $\omega_0 = k\alpha$ называемый *начальною фазою*; получаем точку M_0, ординаты которой суть величины a и b. Точка M_0 представляет положение частицы для момента $t = 0$. Положение этой же частицы для времени t найдем так.

Так как

$$\omega = k(\alpha + st) = \omega_0 + kst$$

то по известным s и t определяем угол ω, называемый *фазой*; тогда проведя радиус CM, составляющий с вертикальной линией CM_0' угол ω, находим точку M, координаты которой x и y выражаются уравнениями (259). Отсюда видно, что с увеличением t частица перемещается по кругу радиуса

$$CM_0 = R = \frac{1}{k} e^{-k\beta}.$$

Итак траектория нашей частицы, движение которой представлено уравн. (259), есть *круг* радиуса CM_0 и с центром C, координаты которого суть α и β. Начальное положение частицы на этом круге, соответствующее $t = 0$, есть точка M_0, координаты которой суть a и b. Положению частицы в M_0', т.-е. фазе равной нулю, соответствует время t_0 определяемое равенством:

$$\alpha + st_0 = 0 \text{ и } t_0 = -\frac{\alpha}{s}.$$

Для этого момента времени получаем:

$$x = \alpha \text{ и } y = \beta + \frac{1}{k} e^{-k\beta} = \beta + R.$$

Движение частиц по кругу очевидно равномерное. Круговое равномерное движение можно представить состоящим из *двух колебательных движений*: одного — по горизонтальному диаметру и другого — по вертикальному. Действительно, если частица выходит из M_0' и движется по кругу в M_0 и далее до M_3, то проекция частицы на горизонтальном диаметре выходит из центра C и движется от C к M_3; при перемещении частицы от M_3 до M_5 проекция движется от M_3 к C; при дальнейшем перемещении частицы от M_5 до M_4 и от M_4 к M_0' проекция переходит от C до M_4 и от M_4 до C. Одновременно с этим проекция частицы на вертикальном диаметре переходит от M_0' к C, от C к M_5, от M_5 к C и от C к M_0'. Движения проекций очевидно неравномерные: движение проекций от окружности к центру — ускоренное и движение—от центра к окружности—замедленное.

Проекции u и v скорости частицы в круговом движении получим из уравн. (259):

$$u = \frac{dx}{dt} = se^{-k\beta} \operatorname{Cos} k(\alpha + st) \qquad v = \frac{dy}{dt} = -se^{-k\beta} \operatorname{Sin} k(\alpha + st).$$

Эти выражения вместе с тем представляют: первое — скорость движения проекции частицы по горизонтальному диаметру и второе — скорость движения проекции по вертикальному диаметру. Скорость V частицы по кругу равна:

$$V^2 = u^2 + v^2 = \left(se^{-k\beta}\right)^2 \text{ и } V = se^{-k\beta} \ldots\ldots\ldots\ldots (a).$$

Скорость V для определенного значения β есть величина постоянная; с увеличением β, т.-е. глубины погружение частицы, скорость V уменьшается и при $\beta = \infty$ получается $V = 0$. Радиус R окружности, описываемой частицей, равный:

$$R = \frac{1}{k} e^{-k\beta} = \frac{\lambda}{2\pi} e^{\frac{-\beta\lambda}{2\pi}} \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

также уменьшается с увеличением глубины β и при $\beta = \infty$ имеем $R = 0$. Уменьшение радиуса R с увеличением глубины показано на черт. 274. Время T пробега частицею всей окружности равно:

$$T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi}{ks} = \frac{\lambda}{s} \ldots\ldots\ldots\ldots (c).$$

Здесь $\frac{2\pi}{k}$ представляет окружность круга радиуса $\frac{1}{k}$ и равно длине волны λ; s—скорость перемещения волны; следов. T равно времени прохождения волною пути равного окружности этого круга со скоростью s.

Как увидим ниже

$$T=\sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (d),$$

а потому линейная скорость перемещения частицы по окружности равна:

$$V=\frac{2\pi R}{T}=R\sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda}} \quad \ldots \ldots \ldots (e).$$

Рассмотрим теперь другую частицу, движение которой определится уравн. (259), изменяя в них α на α_1 и оставляя без изменения величину β, получаем для нее:

$$x_1=\alpha_1+\frac{1}{k}e^{-k\beta}\operatorname{Sin}k(\alpha_1+st) \qquad y_1=\beta+\frac{1}{k}e^{-k\beta}\operatorname{Cos}k(\alpha_1+st).$$

Отсюда находим

$$(x_1-\alpha_1)^2+(y_1-\beta)^2=\left(\frac{1}{k}e^{-k\beta}\right)^2.$$

Это уравнение круга радиусом

$$R=\frac{1}{k}e^{-k\beta}.$$

Итак траектория для взятой частицы представляет круг того же радиуса, что и для первой частицы. Фаза этой частицы для времени t равна углу $k(\alpha_1+st)$ и начальная фаза равна $k\alpha_1$. Если брать другие значения для α, то получим траектории новых частиц, которые при своем движении описывают окружности того же радиуса R. Центры всех этих кругов лежат на одной и той же горизонтальной линии. Если соединить плавной кривой положения всех этих частиц для *одного и того же момента*, то все эти частицы будут лежать на кривой, которая назыв. *трохоидой* или *гипоциклоидой*. Эта кривая получается в том случае, когда внутри круга AK (черт. 275) радиуса $R_0=\frac{1}{k}$ взять точку P, отстоящую от центра C_0 на

$$C_0P=R=\frac{1}{k}e^{-k\beta},$$

и катить этот круг без скольжения вправо по горизонтальной линии AD; тогда точка P опишет трохоиду $PMQR$. Действительно, если

обозначить через a расстояние $AD = C_0C$, на которое переместится катящийся круг вправо, то диаметр AK примет положение NS и дуга $ND = AD = a$, а угол $\varphi = ka$; точка P примет положение M. Тогда координаты M относительно осей X и Y представятся так:

$$x = a + CM \cdot \operatorname{Sin} \varphi = a + \frac{1}{k} e^{-k\beta} \operatorname{Sin} ka;$$

$$y = \beta + CM \cdot \operatorname{Cos} \varphi = \beta + \frac{1}{k} e^{-k\beta} \operatorname{Cos} ka.$$

Здесь x и y суть функции переменного параметра a и представляют уравнение трохоиды при $t = 0$; эти уравнения получаются прямо из общих уравн. (259), полагая в них $t = 0$.

Уравн. (259) дают при β постоянном значения x и y как функции двух независимых величин a и t. При рассмотрении их можно различать три случая:

а) Если a — постоянно и t — переменно, то уравн. (259) представляют траекторию движения (круг) для какой-либо частицы M; координаты центра этого круга a и β.

б) Если a — переменно и t — постоянно, то теже уравнения дают положения всех частиц для этого момента и представляют уравнение трохоиды для этого t. При этом параметр a может принимать все значения от $-\infty$ до $+\infty$.

в) Когда a и t переменны, то означенные уравнения представляют ту же трохоиду, но в движении. Таким образом это будут уравн. движения трохоидальной волны.

Скорость движения волны s определяется из равенства, которое здесь дается без доказательства:

$$s^2 = \frac{g}{k} = \frac{g\lambda}{2\pi}; \text{ отсюда } s = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = 1{,}25\sqrt{\lambda} \text{ метров} = 2{,}27\sqrt{\lambda} \text{ фут.}$$

Время пробега волною пути λ равно:

$$T = \frac{\lambda}{s} = \frac{2\pi}{ks} = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}} = 0{,}8\sqrt{\lambda} \text{ метров} = 0{,}44\sqrt{\lambda} \text{ фут.}$$

Механизм движения трохоидальной волны. Этот механизм можно представить таким образом. Полагая, что β имеет какое-либо определенное значение, дадим для a все значения от $-\infty$ до $+\infty$; затем вообразим по горизонтальной линии бесконечно большое число кругов радиуса

$$R = \frac{1}{k} e^{-\beta k}$$

центры которых лежат от начала координат на переменных расстояниях равных a, a_1, $a_2 \cdots$ Тогда по уравн. (259) при $t=0$ находим координаты x и y точек M; они будут лежать на радиусах составляющих с осью Y углы γ равные ka, т.-е. $\gamma=0$; ka_1; $ka_2 \cdots$ при $a>0$ и $\gamma=-ka_1$; $-ka_2 \cdots$ при $a<0$. Положительные углы откладываем от вертикального радиуса в сторону обратную движению часов; отрицательные углы — в сторону движения часов. Соединяя положения всех этих точек кривой, получаем трохоиду для $t=0$. Теперь будем проведенные радиусы во всех взятых окружностях перемещать равномерно в сторону обратную движения часов, т.-е. будем давать для t все непрерывные значения начиная от 0; тогда во всякий момент концы означенных радиусов будет лежать на трохоиде, которая будет тожественна с первоначальной и будет равномерно перемещаться по горизонтальному направлению справа налево; такая перемещающаяся трохоида представляет волну в движении справа налево. Что касается величины β, то надо давать ей все значения от β_0 до $+\infty$, где β_0 соответствует поверхности моря при волнении.

Всегда можно вычислить по заданным длине волны λ и высоте ее H прочие величины, а именно R_0; R; k и β. Радиус катящегося круга R_0 находим из выражения: $2\pi R_0=\lambda$; тогда

$$R_0=\frac{\lambda}{2\pi}; \text{ следоват. } k=\frac{1}{R_0}=\frac{2\pi}{\lambda}.$$

Радиус производящего круга определяем по высоте волны: $R=\frac{1}{2}H$. Из выражения

$$R=\frac{1}{k}e^{-k\beta_0} \text{ получаем } \frac{1}{2}H=\frac{\lambda}{2\pi}e^{-\frac{2\pi\beta_0}{\lambda}}.$$

Следоват.

$$e^{\frac{2\pi\beta_0}{\lambda}}=\frac{\lambda}{\pi H}; \text{ тогда } \frac{2\pi\beta_0}{\lambda}=lg\,nat\cdot\left(\frac{\lambda}{\pi H}\right); \text{ отсюда } \beta_0=\frac{\lambda}{2\pi}lg\,nat\cdot\left(\frac{\lambda}{\pi H}\right).$$

С увеличением β, начиная от β_0, радиусы R уменьшаются.

На черт. 275 показаны две трохоиды; одна более пологая соответствует отношению $\frac{\lambda}{H}=20$, что отвечает очень большой волне; другая более крутая построена для отношения $\frac{\lambda}{H}=4{,}4$, которое на море не проявляется и взято для большей ясности чертежа. Отношение $\frac{\lambda}{H}$, как

видно из нижеприведенной таблицы Пари, в среднем колеблется от 20 до 40; чем сильнее волнение, тем это отношение меньше.

На черт. 276 показана трохоида *MNP* и затем таже трохоида *M'N'P'* в перемещении справа налево; это перемещение, т.-е. кажущийся бег волны произошел от того, что все окружности повернулись около своих центров на один и тот же угол θ.

Деформация частиц жидкости. На черт. 274 показана масса жидкости разбитая на квадраты горизонтальными и вертикальными линиями. При волнении горизонтальные линии обращаются в трохоиды; чем далее от поверхности, тем положе эти трохоиды. Вертикальные линии при волне искривляются; искривление особенно велико в тех частях этих линий, которые ближе к поверхности. Вертикали, идущие от гребня и от впадины не искривляются. Таким образом полученные нами квадраты *aa* (черт. 274*a*) при волнении деформируются в параллелограммы *bb*. Квадраты вблизи гребня делаются тонкими и длинными по вертикали (черт. 274*b*); квадраты вблизи впадины—наоборот делаются широкими и низкими по вертикали (черт. 274*c*).

Пример. По *Невражину* при определении качки корабля принимают, что штормовая океанская зыбь дает волны длиною от 400 до 600 фут. при высоте волны в $\frac{1}{20}-\frac{1}{25}$.

При длине волны $\lambda=400$ ф. и высоте $H=20$ ф. время пробега T волною длины λ равно $T=8{,}8$ секунд; тогда скорость пробега $s=45{,}3$ фут. в секунду или 27 узлов в час.

Для этой волны получаем затем: радиус катящегося круга $R_0=\frac{1}{k}=\frac{\lambda}{2\pi}=63{,}6$ ф.; радиус производящего круга $R=\frac{1}{2}H=10$ ф.; величина $k=\frac{2\pi}{\lambda}=0{,}0157$; далее для поверхности волны

$$\beta_0=\frac{\lambda}{2\pi}\,lg\,nat\cdot\left(\frac{\lambda}{\pi H}\right)=117{,}1 \text{ фут.};\ \beta_0 k=lg\,nat\cdot\left(\frac{\lambda}{\pi H}\right)=1{,}85.$$

По этим величинам уравнение трохоиды для поверхности волны представим в таком виде (для футов):

$$x=a+10\,\mathrm{Sin}\,0{,}0157\,(a+45{,}3\,t);\ y=117{,}1+10\,\mathrm{Cos}\,0{,}0157\,(a+45{,}3\,t).$$

Измерение волн. При наблюдении волн следует определить три величины: скорость волны s, длину волны λ и высоту волны H. Если *MM*— курс корабля (черт. 277); *NN* направление движения волн и V— скорость корабля, то для определения скорости s нужно заметить время t прохождения по борту корабля гребня волны, т.-е. время про-

хождения им пути ab, при чем из ab нужно вычесть путь пройденный за время t кораблем, т.-е. вычесть Vt; тогда

$$s \cdot t = (ac - V \cdot t)\,\mathrm{Cos}\,\alpha = (L - V \cdot t)\,\mathrm{Cos}\,\alpha \quad \text{и} \quad s = \left(\frac{L}{t} - V\right)\mathrm{Cos}\,\alpha.$$

Длину волны определим, если заметим время t' прохождения гребня волны по носу корабля. За время t' корабль пройдет путь $cd = V \cdot t'$; тогда за время t' волна пройдет путь

$$cf = \lambda - ce = \lambda - Vt'\,\mathrm{Cos}\,\alpha = st'$$

отсюда

$$\lambda = (s + V\,\mathrm{Cos}\,\alpha)\,t'$$

но из предыдущего равенства:

$$s + V\,\mathrm{Cos}\,\alpha = \frac{L\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{t}$$

а потому

$$\lambda = L\frac{t'}{t}\,\mathrm{Cos}\,\alpha.$$

Определение высоты волны H можно сделать помощью хорошего анероида; при этом нужно иметь в виду, что возвышение анероида над горизонтом воды при положении корабля во впадине и на гребне волны различно; так напр. при проходе корабля через гребень, это возвышение может составлять всего 1 ф., а при проходе через впадину — 10 ф.; тогда к показанию анероида нужно прибавить разность этих высот 9 ф. Высоту волны можно определить, если наблюдатель на корабле поместится на мачте на такой высоте, что при положении корабля во впадине он будет в состоянии наблюдать на горизонте гребни волн. Тогда возвышение глаза наблюдателя над поверхностью воды представит довольно точно высоту волны. Наиболее длинные волны наблюдались в северной части Атлантического океана; длина их равнялась $1^1/_2$ мили или 2778 м.; время $T = 53$ секунд и скорость $s = 52{,}2$ метр.

В Европейских водах наблюдались волны с наибольшею длиною в 610 м.; для них $T = 20$ секунд. Французскими мореплавателями были произведены многочисленные наблюдения в разных океанах и морях над движением волн (около 4000 волн), собраные и опубликованные *Пари*. Главные результаты этих наблюдений приведены в следующей таблице.

Таблица XXX.

длины λ, высоты H и скорости s волн при разной силе ветра по данным *Пари*.

СОСТОЯНИЕ МОРЯ	Скорость ветра м.	Высота волны H м.			Длина волны λ м.			Скорость волны s м.			Время пробега T сек.			Отношение $\frac{\lambda}{H}$.			T сек. по вычисл. для средн. волн.
		Наибольшая.	Наименьшая.	Средняя.	Наибольшая.	Наименьшая.	Средняя.	Наибольшая.	Наименьшая.	Средняя.	Наибольшее.	Наименьшее.	Среднее.	Наибольшее.	Наименьшее.	Среднее.	
Очень сильное волнение	28,5	11,5	6,5	7,7	180	100	148	19,0	15,0	17,2	10,3	6,7	8,6	22	15	19	9,7
Сильное волнение	20,0	7,5	3,5	5,0	137	65	106	16,7	10,0	14,0	10,3	3,6	7,6	23	15	21	8,0
Сильная толчея	13,4	6,5	2,3	3,5	100	44	77	15,1	9,0	12,5	13,2	3,6	6,2	30	13	22	6,5
Большая волна	9,2	7,0	3,0	4,1	235	62	120	15,5	10,0	13,8	17,4	6,3	8,7	49	18	2[illegible]	8,8
Обыкновенная волна	5,9	4,5	1,0	2,4	160	38	78	17,0	6,8	11,9	15,3	2,4	6,5	63	15	32	6,5
Тихое море	5,7	4,0	0,8	1,6	150	32	62	13,1	8,0	10,8	7,3	3,3	5,7	80	22	39	6,4

В этой таблице показаны в метрах: скорость ветра; высота волны H; длина волны λ; скорость волны s; время пробега T в секундах; отношение $\frac{\lambda}{H}$ и значение $T = 0{,}8\sqrt{\lambda}$; при этом даны наибольшие, наименьшие и средние значения этих величин. Ветер соответствующий очень большому волнению носит термин „очень свежий ветер" и „ветер с порывами" (скорость ветра 23,6 и 30,1 м.); ветер соответствующий тихому морю носит термин „малый бриз" (скорость ветра 6,0 м.). Что касается бури и урагана, которым соответствуют скорости 38,1 и 46 м., то волны при этом не измерялись очевидно за невозможностью сделать это. Из наблюдений французских мореплавателей выяснилось, что высота волны быстро растет по мере усиления ветра; при крепком бризе и на просторе, волны легко достигают высоты 5 м.; в морях узких и не глубоких, как Ламанш, Китайское море и др. волны редко достигают высоты 6 м. Как только ветер утихает, так высота волн быстро уменьшается. В некоторых случаях наблюдались волны высотою 11,5 м. при скорости ветра около 30 м. в секунду. Длина волны, незначительная при начале ветра, возрастает быстрее высоты, так что при продолжительном ветре волны делаются более пологими. Так, напр., около мыса Доброй Надежды при сильном ветре и пурге, продолжавшихся 4 суток с большим постоянством, высота волны была около 6—7 метр., а длина 113 метр. в первый день и 235 м. в четвертый день; эти значения суть средние; были некоторые волны длиною 400 м.

Энергия волны. Трохоида представляет кривую, расположенную несиметрично относительно горизонтальной линии центров катящегося круга. Площадь занятая частью волны KEL (черт 278), лежащей выше этой линии, меньше площади $C_0KD + C_0'LC$, заключенной между линией центров и трохоидой DK и CL. Поэтому при наступлении покоя, когда никакого волнения уже нет, поверхность моря не будет совпадать с линией центров C_0C_0' а совместится с FG, т.-е. будет лежать ниже C_0C_0' на величину ξ_0. Трохоиды, лежащие ниже поверхностной трохоиды, при покое займут положение горизонтальных линий, отстоящих от линии центров катящихся кругов на величины ξ, которые будут зависить от глубины. Определим величину ξ, для чего рассмотрим какую-либо трохоиду $DKEC$, которой соответствует какое-либо значение β. Уравнение этой трохоиды получим, если в общем уравн. (259) примем для t какое-либо определенное значение, напр., $t = 0$; тогда

$$x = \alpha + R\,\mathrm{Sin}\,k\alpha \qquad y = \beta + R\,\mathrm{Cos}\,k\alpha.$$

Здесь $ka = \varphi$ начальная фаза, т.-е. угол MCP_1 (черт. 275) для положения центра какого-либо катящегося круга в C; для смежного круга начальная фаза равна $\varphi + d\varphi$ и т. д.; очевидно, что для определенного момента в пределах одной волны начальная фаза изменяется от 0 до 2π. Так как $d(ka) = d\varphi$ то $da = \frac{1}{k} d\varphi = R_0 d\varphi$.

Найдем площадь Ω, заключенную между трохоидой DEC и касательной AB (черт. 278). Если η — ордината трохоиды относительно оси AX', то элемент площади $d\Omega = \eta dx$, где

$$\eta = nq = mn - mq = y - (\beta - R) = R(1 + \mathrm{Co}\varphi)$$
$$dx = da + R\,\mathrm{Cos}\,\varphi \cdot d\varphi = (R_0 + R\,\mathrm{Cos}\,\varphi)\,d\varphi.$$

Теперь имеем, замечая, что $AB = \lambda = 2\pi R_0$:

$$\Omega = \int_0^\lambda \eta dx = R\int_0^{2\pi}(1 + \mathrm{Cos}\,\varphi)(R_0 + R\,\mathrm{Gos}\,\varphi)\,d\varphi\,.$$

$$\Omega = R_0 R\,[\varphi + \mathrm{Sin}\,\varphi]_0^{2\pi} + R^2\,[\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{1}{2}(\varphi + \mathrm{Sin}\,\varphi \cdot \mathrm{Cos}\,\varphi)]_0^{2\pi} = 2\pi R_0 + \pi R^2.$$

Вычислим высоту $AF = H$ прямоугольника $ABGF$, основание которого равно $AB = \lambda = 2\pi R_0$, а площадь равна Ω, тогда $H\lambda = \Omega$ или

$$H \cdot 2\pi R_0 = 2\pi R_0 + \pi R^2; \quad \text{отсюда} \quad H = R + \frac{R^2}{2R_0}.$$

Следовательно,

$$\xi = H - R = \frac{R^2}{2R_0} = \frac{\pi R^2}{2\pi R_0} = \frac{\pi R^2}{\lambda} \;\ldots\ldots\ldots \quad (f).$$

Из чертежа видим:

плющ. $ADCB$ — площ. $AFGB$ = площ. $DFGC$;
площ. $ADCB$ — площ. $(ADE + BCE)$ = площ. $DECKD$.

Только что было показано, что $AFGB = ADE + BCE$, а потому заключаем, что $DFGC = DECKD$. Следоват., при успокоении моря трохоида $DKELC$ совместится с FG, которая будет лежать ниже линии центров на величину ξ.

При волнении частицы в какой-либо момент лежат на трохоиде; можно принять за среднее положение всех этих частиц линию центров. Действительно, для какой-либо частицы, имеющей фазу φ, можно найти на той же трохоиде другую частицу с фазой $\pi - \varphi$, следов., обе эти частицы лежат на противоположных концах соответственных диаметров; поэтому заключаем, что общий центр тяжести этой пары частиц лежит на линии центров. Отсюда видно, что частицы, лежавшие

до волнения на линии FG, при волнении можно считать лежащими на линии C_0C_0', т.-е. частицы поднялись на высоту ξ. В таком случае эти частицы обладают потенциальною энергиею, соответствующей этой высоте, и при успокоении моря они, опускаясь на ξ м., производят работу на ед. веса (1 килогр.), равную $\xi \frac{\text{килогр.}}{\text{метр.}}$.

Определим *потенциальную энергию* для всех частиц, лежащих под свободною поверхностью на всю глубину моря и заключающихся в параллелепипеде, горизонтальные измерения которого суть: длина волны λ и ширина l, а вертикальное измерение его — глубина моря, предполагая ее бесконечно большой.

Пусть (черт. 279) FG—поверхность моря при успокоении; C_0C_0'— линия центров для трохоиды при волнении; расстояние между ними равно ξ_0; затем CC' — линия центров для трохоиды на глубине z от C_0C_0' и $F'G'$ — горизонтальная линия, в которую обращается эта трохоида при успокоении моря; расстояние между ними ξ. Линия $F'G'$ лежит в расстоянии h от FG. Рассмотрим элементарный слой $F'G'F''G''$ толщиною dh; вес этого слоя $G = \Delta\lambda \cdot l \cdot dh$, где λ — длина волны и вместе с тем длина слоя, а l — ширина слоя. Потенциальная энергия этого слоя при подъеме на ξ равна:

$$G\xi = \Delta\lambda \cdot l \cdot dh \cdot \xi;$$

но $(h + \xi_0) = (z + \xi)$, а потому $dh = dz + d\xi$; следоват.,

$$G\xi = \Delta\lambda l\,(\xi dz + \xi d\xi).$$

Разобьем весь слой между линией FG и дном моря на элементарные слои, затем найдем для каждого из них потенциальную энергию и полученные результаты сложим; тогда найдем потенциальную энергию для всего слоя толщиною от поверхности моря до дна его. В таком случае имеем:

$$(П.\ Э.) = \Delta\lambda l \int_0^{\infty} \xi dz + \Delta\lambda l \int_{\xi_0}^{0} \xi d\xi \quad . \ . \ . \ . \ . \ . (g).$$

Здесь пределы интегрирования назначены следующим образом:

при $h = 0$ имеем $z = 0$ и $\xi = \xi_0$,

а „ $h = \infty$ „ $z = \infty$ $\xi = 0$.

Вычислим каждый интеграл в отдельности. Так как

$$R = \frac{1}{k} e^{-k\beta}, \text{ где } \frac{1}{k} = R_0 = \frac{\lambda}{2\pi}, \text{ то } R = \frac{\lambda}{2\pi} e^{-\frac{2\pi}{\lambda}\beta}.$$

Для параметра $\beta = \beta_0$, соответствующего свободной поверхности моря, имеем для R значение R_1, равное:

$$R_1 = R_0 e^{-\frac{2\pi}{\lambda}\beta_0} = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{\pi H}{\lambda} = \frac{H}{2}.$$

Параметры β_0 и β представляют расстояния от OX линий C_0C_0' и CC'; очевидно, что $\beta = \beta_0 + z$; тогда

$$R = R_0 e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(\beta_0 + z)} = \frac{\lambda}{2\pi}\left(\frac{\pi H}{\lambda} e^{-\frac{2\pi}{\lambda}z}\right) = \frac{H}{2} e^{-\frac{2\pi}{\lambda}z}.$$

Затем имеем:

$$\xi = \frac{\pi R^2}{\lambda} = \frac{\pi R_0^2}{\lambda} e^{-\frac{4\pi}{\lambda}(\beta_0 + z)} = \frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{H}{2}\right)^2 e^{-\frac{4\pi}{\lambda}z}.$$

Также

$$\xi_0 = \frac{\pi R_1^2}{\lambda} = \frac{\pi}{\lambda}\frac{H^2}{4}.$$

Теперь получаем:

$$\int_0^\infty \xi dz = \frac{\pi H^2}{4\lambda}\int_0^\infty e^{-\frac{4\pi}{\lambda}z} dz = \frac{1}{16} H^2,$$

$$\int_{\xi_0}^0 \xi d\xi = -\frac{1}{2}\xi_0^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\lambda}\frac{H^2}{4}\right)^2.$$

Следовательно,

$$(П.\ Э.) = \frac{1}{16}\Delta\lambda l H^2 \left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi H}{\lambda}\right)^2\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (261).$$

Найдем *кинетическую энергию* для частиц, лежащих под свободною поверхностью в том же элементарном объеме, как и выше, т.-е. в объеме $\lambda \cdot l \cdot dh$; она равна:

$$\frac{1}{2} dm \cdot V^2;$$

здесь $dm = \frac{\Delta}{g}\lambda \cdot l \cdot dh = \frac{\Delta}{g}\lambda l(dz + d\xi)$.

Что касается скорости V, то частица при вращении по кругу R с угловою скоростью ω имеет линейную скорость $V = \omega R$. Обозначим через T время оборота частицею всей окружности; тогда

$$\omega \cdot T = 2\pi \text{ и } \omega = \frac{2\pi}{T}; \text{ но выше было дано: } T = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}.$$

тогда

$$\omega^2 = \frac{2\pi g}{\lambda}; \quad V^2 = (\omega R)^2 = 2g\frac{\pi R^2}{\lambda} = 2g\xi.$$

По этим значениям для dm и V^2 получаем:

$$\frac{1}{2} dm \cdot V^2 = \Delta\lambda l(dz + d\xi)\xi.$$

Только что мы получили такое же выражение для потенциальной энергии в том же элементарном слое; следовательно, потенциальная и кинетическая энергия равны между собою; полная энергия равна удвоенному значению потенциальной энергии. Итак, *полная энергия* равна:

$$(\textit{Полная энергия}) = \frac{1}{8}\Delta\lambda l \cdot H^2 \cdot \left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi H}{\lambda}\right)^2\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (262).$$

Примеры. 1) Найдем полную энергию для волны при следующих данных: длина волны $\lambda = 300$ фут.; высота волны $H = 2R_1 = \frac{1}{25} \cdot 300 = 12$ фут. По формуле (262) находим полную энергию на 1 погон. фут:

$$(\textit{Полная энергия}) = \frac{1}{8} \cdot 1{,}73 \cdot 300 \cdot \overline{12}^2 \left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi . 12}{300}\right)^2\right\} =$$
$$= 9342(1 - 0{,}008) = 9268 \text{ пудофутов.}$$

2) Возьмем волну, соответствующую тихому морю (см. таблицу на стр. 484); для нее примем длину $\lambda = 60$ м.; высоту волны $H = \frac{1}{40}\lambda = 1{,}5$ м. По формуле (262) находим полную энергию волны на 1 погон. метр:

$$(\textit{Полная энергия}) = \frac{1}{8} \cdot 1000 \cdot 60 \cdot \overline{1{,}5}^2 \left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi . 1{,}5}{60}\right)^2\right\} =$$
$$= 16820 \text{ килогр. метр.}$$

Количество движения волны. Количество движения частицы dm, имеющей скорость V, равное $dm \cdot V$, можно определить при помощи предыдущих вычислений. Рассмотрим элементарный слой $F'G'F''G''$ (черт. 279) толщиною dh, длиною λ и шириною l; масса этого слоя равна:

$$dm = \frac{G}{g} = \frac{\Delta}{g}\lambda l dh.$$

Скорость V, соответствующая этому слою, выражается так:

$$V = R\sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda}}.$$

Здесь

$$R = R_0 e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(\beta_0 + z)}.$$

Так как

$$R_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \text{ и } e^{-\frac{2\pi}{\lambda}\beta_0} = \frac{\pi H}{\lambda},$$

то

$$R = \frac{H}{2} e^{-\frac{2\pi}{\lambda} z}.$$

Затем имеем $dh = dz + d\xi$, а потому

$$dm \cdot v = \frac{1}{2} \Delta l H \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}} e^{-\frac{2\pi}{\lambda} z} (dz + d\xi).$$

В виду того, что

$$\xi = \frac{\pi}{\lambda} R_1^2 e^{-\frac{4\pi}{\lambda} z},$$

получаем:

$$d\xi = -\frac{R_1^2}{4} e^{-\frac{4\pi}{\lambda} z} dz.$$

Следовательно, количество движения волны на всю глубину моря равно:

$$MV = \int_0^\infty dm \cdot V = \frac{1}{2} \Delta l H \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}} \left\{ \int_0^\infty e^{-\frac{2\pi z}{\lambda}} dz - \frac{R_1^2}{4} \int_0^\infty e^{-\frac{6\pi}{\lambda} z} dz \right\}.$$

Здесь мы имеем:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{2\pi}{\lambda} z} dz = -\left(\frac{\lambda}{2\pi} e^{-\frac{2\pi}{\lambda} z} \right)_0^\infty = \frac{\lambda}{2\pi};$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{6\pi}{\lambda} z} dz = -\left(\frac{\lambda}{6\pi} e^{-\frac{6\pi}{\lambda} z} \right)_0^\infty = \frac{\lambda}{6\pi}.$$

Поэтому окончательно получаем для количества движения:

$$MV = \Delta l \lambda^{3/2} H \sqrt{\frac{1}{8g\pi}} \left(1 - \frac{H^2}{48} \right) \quad \ldots \ldots \quad (269).$$

Примеры. 1) Для волны, соответствующей тихому морю, примем $\lambda = 60$ м. и высоту $H = \frac{1}{40}\lambda = 1{,}5$ м. Тогда для этой волны имеем, полагая ширину $l = 1$ м.:

$$MV = 1000 \cdot (60)^{3/2} \cdot 1{,}5 \sqrt{\frac{1}{8 . 9{,}81 . \pi}} \left(1 - \frac{(0{,}75)^2}{12}\right) = 4375{,}7(1 - 0{,}047)$$

$$MV = 4170.$$

Количество движения выражается в весовых единицах и в единицах времени, а в данном случае — в килограммах и секундах.

2) Рассмотрим волну, соответствующую очень сильному волнению; для нее имеем в среднем: $\lambda' = 148$ м.; $H' = \frac{1}{20}\lambda' = 7{,}4$ м. Если в уравнении (263) пренебречь, по его малости, членом $\frac{1}{48}H^2$, то найдем, что количества движения для волны MV в первом примере и для волны во втором примере $M'V'$ относятся между собою так:

$$\frac{M'V'}{MV} = \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^{3/2} \frac{H_1}{H}.$$

На этом основании получаем:

$$M'V' = \left(\frac{148}{60}\right)^{3/2} \left(\frac{7{,}4}{1{,}5}\right) \cdot 4376 = 83700.$$

Действие морских волн на сооружения. Действие волн на сооружения может быть настолько сильным, что может вызвать сильные повреждения в них и даже может совсем разрушить их. Волна, подходя к сооружению по отлогому откосу, значительно изменяет свой вид: длина волны уменьшается, а высота увеличивается и гребень волны становится столь острым, что происходит разрушение волны; такая волна образует *бурун*. Волну, набегающую на берег, можно рассматривать как одиночную волну и скорость ее определять по следующей формуле *Скотт-Росселя*:

$$V = \sqrt{g(H_0 + H)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (264),$$

где H_0 — глубина моря у берега при штиле; H — возвышение гребня над первоначальным горизонтом моря. Если волна разрушается при $H = H_0$, то скорость волны при этом $V = \sqrt{2gH_0}$. По измерениям *Т. Стивенсона*, а также *Гайлларда* разрушение волны наступает при $H_0 : H = 0{,}7$ — в случае противного ветра или штиля — и при

$H_0 : H = 2{,}7$ при попутном ветре и при очень пологом береге. При буруне наблюдается сильное течение по откосу от берега к морю, что при большом волнении представляет серьезную опасность для купающихся в море. При встрече с отвесной стенкой волна производит удар. Величину удара волн при разных условиях измерял *Т. Стивенсон* в 1843 и 1844 г.г. на западных берегах Шотландии и нашел, что при ударе волн получается давление, изменяющееся от 0,3 до 3,0 килограм. на с.²; в других частях Шотландии получились давления еще большие, доходившие до 3,8 килогр. на с.²; он определил непосредственным измерением, что по высоте сооружения над и под горизонтом спокойного моря давления от волн получаются неодинаковыми; наибольшее давление соответствует горизонту спокойного моря (черт. 280).

На этом чертеже представлен поперечный разрез морского мола; при ветре волна ударяет в наружную стенку, при чем поднимается на большую высоту. Давление на единицу площади мола, производимое волной, распределяется неравномерно по высоте и может быть представлено ломаной линией *abcd*; наибольшее давление равно *be* и соответствует уровню моря при штиле; выше и ниже этого уровня давление значительно меньше.

По *Францiусу* и *Шиллингу* давление от удара волн в разных местах германских морских берегов не превосходит 1,5 килогр. на с.². Во Франции на берегу Атлантического океана удар волн вызывает давление, не превосходящее 2 килогр. на с.².

Гайллард производил измерения в С. Америке на берегах полуострова Флориды над ударом волн; он выражает давление при ударе волн под таким видом:

$$p = \Delta\zeta\frac{U^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (265),$$

где ζ — опытный коэффициент и U — скорость, равная сумме скоростей: s — скорость бега волны и v — линейная скорость частицы при движении ее по круговой или эллиптической траектории. Так как из предыдущего известно, что

$$s = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \text{ и } V = R_1\sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda}}, \text{ то } U = s + V.$$

Результаты измерений Гайлларда приведены в нижеследующей таблице.

ТАБЛИЦА XXXI.

измерений волн, скоростей s и V и давлений при ударе.

РАЗМЕРЫ ВОЛН.		Скорость s бега волны по измерению м.	Линейная скорость V частиц по вычислению м.	Наибольшее давление p килограм. на с.² по измерению.	Опытный коэффициент ζ в форм. (265).
Высота H м.	Длина λ м.				
0,61	14,0	2,56	0,88	0,072	1,16
0,76	18,3	1,87	0,98	0,112	1,45
0,91	22,9	3,57	1,13	0,157	1,36
1,22	25,0	3,72	1,24	0,198	1,53
1,52	36,6	4,63	1,62	0,228	1,11
1,83	45,7	5,55	1,89	0,325	1,12

Из этой таблицы видно, что как размеры наблюденных волн, так и величины давлений были довольно малы.

По *Даврна* наибольшее давление от удара волны можно вычислить довольно приблизительно, если пользоваться форм. (265), полагая коэфф. $\zeta = 2$. Как видно из нижеприводимых примеров, такой способ определения давления дает удовлетворительные результаты.

Примеры. 1) Определим давление при ударе волны, для которой длина $\lambda = 60$ м. и высота волны $H = 1,5$ м.

Вычисляем скорость бега волны s и линейную скорость v частиц при движении их по окружности согласно вышеприведенных формул и получаем:

$$s = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{9,81.60}{2\pi}} = 9,68 \text{ м.}$$

$$V = \tfrac{1}{2} H \sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda}} = \tfrac{1}{2} \cdot 1,75 \sqrt{\frac{2\pi.9,81}{60}} = 0,76 \text{ м.}$$

Тогда по Гайлларду $U = 10,44$ м.; следоват., по Даврна

$$p = \Delta\zeta \frac{U^2}{2g} = 1000 \cdot 2 \cdot \frac{(10,44)^2}{2.9,81} = 11110 \text{ килогр. на м.}^2$$

или

$$p = 1,11 \text{ килогр. на с.}^2$$

2) Рассмотрим волну, для которой $\lambda = 148$ м. и $H = 7{,}4$ м., и вычислим давление, производимое такой волной при ударе. По предыдущему находим:

$$s = \sqrt{\frac{9{,}81 . 148}{2\pi}} = 15{,}20 \text{ м.}. \quad V = \tfrac{1}{2} \cdot 7{,}4 \sqrt{\frac{2\pi . 9{,}81}{148}} = 2{,}39 \text{ м.}$$

Следоват., $U = 17{,}59$ м.; тогда давление при ударе равно:

$$p = 1000 \cdot 2 \cdot \frac{(17{,}59)^2}{2 . 9{,}81} = 31540 \text{ килогр. на м.}^2.$$

или

$$p = 3{,}15 \text{ килогр. на с.}^2.$$

§ 77. Синусоидные волны. Подобные волны образуются в каналах или вообще в водных пространствах небольшой глубины. При выводе теории их предполагается, что скорости частиц жидкости имеют потенциал и, следоват., движение жидкости безвихревое, и что движение жидкости происходит под действием сил тяжести.

Преобразование уравнений Эйлера. Теория синусоидных волн основывается на применении уравнений Эйлера (18), в которых надо предположить, что:

1) внешние силы имеют потенциал, т.-е. что проекции внешней силы X, Y, Z равны:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

где потенциальная функция $U = U(x, y, z)$;

2) скорости частиц имеют потенциал, т.-е. что проекции скорости W равны:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

где потенциальная функция $\varphi = \varphi(x, y, z)$;

3) плотность ρ есть постоянная величина.

При этих условиях можно из уравнений Эйлера (18) получить *одно* уравнение, которым и воспользуемся при решении задачи о волнах. Нетрудно убедиться в справедливости следующих выражений:

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(U - \frac{p}{\rho}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(U - \frac{p}{\rho}\right) = \frac{\partial Q}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(U - \frac{p}{\rho}\right) = \frac{\partial Q}{\partial z};$$

здесь сделано обозначение: $Q = U - \frac{p}{\rho}$.

Теперь первое из уравнений Эйлера (18) можем переписать следующим образом:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Так как по условию:

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x};\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\ \text{и}\ w=\frac{\partial\varphi}{\partial z},\ \text{то}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y.\partial x};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z.\partial x};\quad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t.\partial x},$$

следоват., предыдущее уравнение примет такой вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial y.\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial z.\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial t.\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0\ .\ .\ .\ (266).$$

Если W — скорость частицы, то

$$W^2=u^2+v^2+w^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2.$$

Возьмем производную по x, тогда найдем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}W^2\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x.\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x.\partial z}.$$

В силу этого равенства уравнение (266) можем переписать так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}W^2+\frac{\partial\varphi}{\partial t}-Q\right)=0.$$

Отсюда заключаем, что выражение в скобках не зависит от x.

Рассматривая подобным же образом второе и третье уравнения Эйлера (18), докажем, что выражение в скобках не завист также ни от y ни от z; следоват., оно может зависеть только от t; итак:

$$\frac{1}{2}W^2+\frac{\partial\varphi}{\partial t}-Q=\Psi(t)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (267).$$

Обозначим через φ_1 новую функцию, зависящую от φ и от Ψ, именно:

$$\varphi_1=\varphi-\int_0^t\Psi(t)dt.$$

Взяв производную обеих частей этого выражения по x, находим

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial x};\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial y};\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial z};\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\Psi(t).$$

Следоват., выражение (267) можно переписать еще так:

$$\frac{1}{2}W^2+\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}-Q=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (268).$$

В дальнейшем будем здесь писать φ вместо φ_1, но только нужно иметь в виду, что теперь $\varphi=\varphi(x, y, z, t)$.

Подставим в уравнение (268) вместо Q его значение, а вместо W^2— его проекции и найдем окончательно:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}-U+\frac{p}{\rho}=0 \quad \ldots\ldots \quad (269).$$

Далее уравнение (17) неразрывности жидкости можно написать так:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (270).$$

Применение найденных уравнений. Теперь переходим к применению уравн. (269) и (270) для случая движения синусоидных волн.

Пусть жидкость находится в канале прямоугольного поперечного сечения с постоянною глубиною h и с боковыми вертикальными и параллельными стенками; дно канала горизонтально. Ось X располагаем горизонтально по оси канала на свободной поверхности при равновесии жидкости, а ось Y— вертикально вверх. Уравнение плоскости дна: $y=-h$. Скорости лежат в вертикальных плоскостях, параллельных плоскости XY. Проекции скорости частицы имеют потенциал, т.-е.

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x};\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y};\quad \text{где } \varphi=\varphi(x, y, t),$$

согласно сказанному выше относительно функции φ_1. Решение задачи о движении волн приводится к отысканию этой функции φ, для чего послужат нам уравнения (269) и (270), в которых силовая функция

$$U=-gy \text{ и затем условия: } \frac{\partial\varphi}{\partial z}=0; \text{ также } \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0.$$

Тогда эти уравнения принимают такой вид:

$$\frac{p}{\rho}=-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\}-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-gy \quad \ldots\ldots \quad (271)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (272).$$

В дополнение к этим двум уравнениям выведем еще два уравнения, которые относятся к числу так называемых граничных условий. Если жидкость несжимаема, как в рассматриваемом случае, то может су-

ществовать свободная поверхность. Когда свободная поверхность граничит с пустотой, то давление на свободной поверхности $p=0$; при существовании атмосферы это давление равно атмосферному p_0. Вообще же $p=f(x, y, z, t)$, а потому для свободной поверхности, граничной с атмосферой, имеем:

$$p=f(x, y, z, t)=p_0=C.$$

Это и есть уравнение свободной поверхности. Частицы, лежащие на ней в момент t, вообще будут находиться на ней и в следующий момент $t+dt$, а потому должно быть выполнено условие:

$$f(y+dx; y+dy; z+dz; t+dt)=C.$$

Разлагая эту функцию в ряд по строке Тайлора, находим

$$f(x+dx; y+dy; z+dz; t+dt)=f(x; y; z; t)+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial t}dt+\varepsilon=C,$$

где ε — совокупность членов бесконечно малых высших порядков. Отсюда находим, заменяя характеристику f через p:

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz+\frac{\partial p}{\partial t}dt=0.$$

Разделим все члены на dt; тогда, замечая, что

$$\frac{dx}{dt}=u; \quad \frac{dy}{dt}=v; \quad \frac{dz}{dt}=w;$$

получаем окончательно пограничное условие для свободной поверхности:

$$u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial t}=0.$$

Для нашего случая имеем:

$$w=0 \text{ и } u=\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v=\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

а потому находим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial t}=0 \quad \ldots\ldots \quad (273).$$

На вертикальных боковых стенках канала и на горизонтальном дне его скорость W должна быть параллельна плоскости стенок и дна; последнее условие напишется так:

$$\text{при } y=-h, \quad v=\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0 \quad \ldots\ldots \quad (274).$$

Такое движение жидкости можно осуществить, если в сосуд с водой слегка погрузить цилиндрическое тело перпендикулярно к плоскости XY и, дав воде успокоиться, вынуть его из воды сразу; тогда начальные скорости частиц жидкости равны нулю и начальное значение $\varphi = \varphi_0 = 0$. Жидкость пройдет в волнообразное движение, параллельное плоскости XY.

Определение функции скорости. Определение функции φ на основании уравнений (271, 272, 273 и 274) может быть только приблизительным и в том только случае, когда скорости u и v настолько малы, что величинами

$$u^2; \quad v^2; \quad uv; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \,.\, \partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \,.\, \partial t}$$

можно по их малости пренебречь. При таком предположении уравнение (271) дает:

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gy \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (275).$$

Взяв производные этого выражения по x, y и t, находим:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \,.\, \partial t}; \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \,.\, \partial t} - g; \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Подставим эти значения в уравн. (273) и пренебрежем вышеуказанными величинами; тогда оно примет следующий вид:

$$g\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (276).$$

Мы удовлетворим уравнениям (272, 274, 276), если для φ возьмем такое выражение:

$$\varphi(x, y, t) = A\left\{e^{m(y+h)} + e^{-m(y+h)}\right\} \operatorname{Sin}(mx - st + \alpha) \ldots (277);$$

здесь A, α, m и s суть постоянные, а именно: α — начальная фаза для точки, имеющей абсциссу равную 0 при $t = 0$; затем

$$m = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{и} \quad s = \frac{2\pi}{T},$$

где λ — длина волны и T — время пробега волною длины λ. Величины A, α и m — произвольные; величину A выберем той же малости, что u и v.

Проверим, действительно ли это выражение для φ удовлетворяет вышеуказанным уравнениям. Взяв производную φ по x и y в выражении (277), находим:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -Am^2\left\{e^{m(y+h)} + e^{-m(y+h)}\right\}\operatorname{Sin}(mx - st + \alpha),$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = Am^2\left\{e^{m(y+h)} + e^{-m(y+h)}\right\}\operatorname{Sin}(mx - st + \alpha).$$

Очевидно, что уравнение (272) удовлетворяется. Так как

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = Am\left\{e^{m(y+h)} - e^{-m(y+h)}\right\}\operatorname{Sin}(mx - st + \alpha),$$

то, полагая здесь $y = -h$, получаем $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$ и уравнение (274) также удовлетворяется.

Уравнение свободной поверхности. Для свободной поверхности давление $p = p_0$, которое мы можем принять условно равным 0; тогда из уравнения (275) при помощи уравнения (277) находим:

$$y = -\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{As}{g}\left\{e^{m(y+h)} + e^{-m(y+h)}\right\}\operatorname{Cos}(mx - st + \alpha) \; . \; . \; . \; (278).$$

Ордината y той же малости, что и количество A, т.-е. весьма мала а потому, разлагая в ряд величины

$$e^{m(y+h)} \text{ и } e^{-m(y+h)},$$

можем ограничиться в разложении первым членом; тогда

$$e^{m(y+h)} = e^{mh}; \quad e^{-m(y+h)} = e^{-mh}$$

и для y найдем окончательно такое выражение:

$$y = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{y=0} = \frac{As}{g}\left\{e^{mh} + e^{-mh}\right\}\operatorname{Cos}(mx - st + \alpha) \; . \; . \; . \; (279).$$

Это и есть уравнение свободной поверхности жидкости при волнении; оно дает зависимость ординаты y от абсциссы x и от времени t Оно представляет уравнение *синусоиды* с амплитудой, равной:

$$k = \frac{As}{g}\left\{e^{mh} + e^{-mh}\right\}.$$

Необходимо затем убедиться в том, что уравнение (276) также удовлетворяется. Так как

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = As^2\left\{e^{m(y+h)} + e^{-m(y+h)}\right\}\operatorname{Sin}(mx - st + \alpha),$$

то уравнение (276) после сокращений примет такой вид:

$$gm\left\{e^{m(y+h)} - e^{-m(y+h)}\right\} - s^2\left\{e^{m(y+h)} + e^{-m(y+h)}\right\} = 0.$$

Оно удовлетворится, если y по его малости приравнять нулю и затем из полученного равенства определить s^2; тогда найдем:

$$s^2 = gm \frac{e^{mh} - e^{-mh}}{e^{mh} + e^{-mh}} \ldots \ldots \ldots \ldots (280).$$

При таком значении для s^2 уравнение (276) удовлетворяется.

На основании этого равенства имеем:

$$\frac{s}{g}(e^{mh} + e^{-mh}) = \frac{m}{s}(e^{mh} - e^{-mh}).$$

Поэтому можем уравнение (279) свободной поверхности представить еще так:

$$y = \frac{Am}{s}\{e^{mh} - e^{-mh}\} \operatorname{Cos}(mx - st + \alpha) \ldots \ldots (281).$$

Эта синусоида имеет амплитуду

$$k = \frac{Am}{s}\{e^{mh} - e^{-mh}),$$

равную вышеприведенному значению.

Обозначим через c скорость пробега волны; тогда

$$T = \frac{\lambda}{c}, \text{ а так как } s = \frac{2\pi}{T} \text{ и } m = \frac{2\pi}{\lambda}, \text{ то } s = \frac{2\pi}{\lambda} c = mc.$$

Теперь из уравнения (280) находим следующее выражение для скорости c:

$$c^2 = \frac{g}{m} \frac{e^{mh} - e^{-mh}}{e^{mh} + e^{-mh}} \ldots \ldots \ldots \ldots (282).$$

Исследуем это выражение в двух частных случаях.

a) Если глубина воды h очень велика сравнительно с длиной волны λ, тогда

$$e^{-mh} = 0; \quad c = \sqrt{\frac{g}{m}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}; \quad T = \frac{\lambda}{c} = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}} \ldots (283).$$

Эти выражения тожественны с полученными выше значениями для скорости бега волны и для времени пробега волны при трохоиде.

b) Если глубина h очень мала сравнительно с λ, то разлагая в ряды

e^{mh} и e^{-mh}, находим: $e^{mh} - e^{-mh} = 2mh = 4\pi \frac{h}{\lambda}$; $e^{mh} + e^{-mh} = 2$;

следовательно,

$$c^2 = gh \text{ и } c = \sqrt{gh}; \quad T = \sqrt{\frac{\lambda^2}{gh}} \ldots \ldots \ldots (284).$$

Траектории частиц. Выше было рассмотрено волнообразное движение частиц при трохоидальных волнах и было показано, что движение частицы по окружности круга обусловливается двумя колебательными движениями частицы — поперечным и продольным. В данном случае частицы находятся также в двух колебательных движениях—поперечном и продольном, что выражается движением их по эллипсам. Определим эти колебания. Пусть a и b — координаты частицы C_0 (черт. 281) в начальном положении, т.-е. при покое; x и y — координаты M в момент t; x_1 и y_1 — проекции перемещения частицы; очевидно $x = a + x_1$; $y = b + y_1$. Тогда проекции скорости частицы равны:

$$u = \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial\varphi}{dx}; \quad v = \frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Из выражения для φ (277) находим:

$$\frac{dx_1}{dt} = Am\left\{e^{m(y+h)} + e^{-m(y+h)}\right\}\text{Cos}\,(mx - st + \alpha);$$

$$\frac{dy_1}{dt} = Am\left\{e^{m(y+h)} - e^{-m(y+h)}\right\}\text{Sin}\,(mx - st + \alpha).$$

По предположению перемещения x_1 и y_1 весьма малы, а потому x и y весьма мало отличаются от a и b. На этом основании во вторых частях предидущих равенств можно заменить x и y через a и b и затем проинтегрировать их по t; откидывая постоянные, найдем:

$$MM_1 = x_1 = -\frac{Am}{s}\left\{e^{m(b+h)} + e^{-m(b+h)}\right\}\text{Sin}\,(ma - st + \alpha) =$$
$$= -B\,\text{Sin}\,(ma - st + \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots (285);$$

$$C_0M_1 = y_1 = \frac{Am}{s}\left\{e^{m(b+h)} - e^{-m(b+h)}\right\}\text{Cos}\,(ma - st + \alpha) =$$
$$= C\,\text{Cos}\,(ma - st + \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots (286).$$

Здесь одна независимая переменная t. Из этих выражений сейчас же получаем:

$$\left(\frac{x_1}{B}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{C}\right)^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (287).$$

Это уравнение *эллипса* с полуосями B и C. Угол $\omega = ma - st + \alpha$ отсчитывается от вертикали C_0E влево, т.-е. против движения часовой стрелки; приблизительно для чертежа ω равно тупому углу EC_0M. Уравнения (285 и 286) показывают, что частица имеет колебательное движение — составное из двух движений: из продольного колебания, параллельного оси X с амплитудой B, и из поперечного колебания,

параллельного оси Y с амплитудой C; в составном движении частица движется по эллипсу с полуосями B и C. При $b = -h$ получается:

$$B = \frac{2Am}{s}; \quad C = 0.$$

Следовательно, на дне канала частицы имеют только продольные колебания. Угол $\omega = ma - st + \alpha$ есть фаза рассматриваемой частицы; угол $\omega_0 = ma + \alpha$ есть начальная фаза для этой частицы и $\omega_0' = \alpha$ есть начальная фаза для частицы, для которой $a = 0$. При $h:\lambda = \infty$, т.-е. когда глубина воды в канале весьма велика; величина

$$e^{-m(b+h)} = e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(b+h)} = 0.$$

Тогда $B = C$ и частица при движении описывает *круг.*

Итак, в рассматриваемом случае волнообразное движение таково, что свободная поверхность в пересечении с вертикальною плоскостью, параллельною продольной оси канала, представляет *синусоиду* (уравнение 279), а колебательное движение частиц происходит в той же вертикальной плоскости по эллипсам (уравнение 287) и есть составное — из продольного по горизонтальной линии и из поперечного — по вертикали. Выводы эти только приблизительные, как это видно из способа получения означенных уравнений.

Механизм движения волн. Этот механизм во всем сходен с вышеописанным для трохоидальных волн. Уравнение (281) свободной поверхности представляет синусоиду и для определенного t дает зависимость между x и y. Задавшись значением для x, определим y и таким образом построим синусоиду, которая в точности представит свободную поверхность в момент t. Для нашего рассуждения важно знать положение центра эллипса для той частицы, которая в момент t имеет координаты x и y. С этою целью рассмотрим на поверхности воды частицу (черт. 282), которая во время штиля занимала положение C (a, $b = 0$); вместе с тем это будет центр эллипса $EHE'H'$, по которому эта частица будет перемещаться во время волнения. Перемещение этой частицы для времени t, равное x_1 и y_1, определим из уравнений 285 и 286, полагая в них $b = 0$; тогда имеем:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\frac{Am}{s}\left\{e^{mh} + e^{-mh}\right\}\operatorname{Sin}(ma - st + \alpha) = -B'\operatorname{Sin}\omega \\ y_1 &= \frac{Am}{s}\left\{e^{mh} - e^{-mh}\right\}\operatorname{Cos}(ma - st + \alpha) = C'\operatorname{Cos}\omega \end{aligned}\right\}\ldots(288).$$

Для момента $t = 0$, который принимаем за начальный, получаем для различных частиц начальные фазы $\omega = ma + \alpha$, где абсциссы a со-

ответствуют взятым частицам. В этот момент частицы имеют ординаты $y_0 = C' \cos \omega$ и лежат на радиусах-векторах эллипсов, данных уравн. (288); радиусы-векторы составляют с вертикалью EC_0 углы ω_0, определяемые равенством:

$$\frac{x_0}{y_0} = -\frac{B'}{C'} \operatorname{tg} \omega_0.$$

Геометрическое место всех этих частиц в момент $t = 0$ будет синусоида, данная уравнением $y_0 = C' \cos \omega_0$. При увеличении t начальные фазы ω_0 обращаются в фазы $\omega = ma - st + \alpha$, и каждая частица перемещается по своему эллипсу; при этом радиусы-векторы, идущие от центров эллипсов к частицам, составляют с вертикалью угол ω, равный:

$$\frac{x_1}{y_1} = -\frac{B'}{C'} \operatorname{tg} \omega.$$

На черт. 282 показана точка C_0 $(a, 0)$; это положение нашей частицы при штиле; при волнении эта частица описывает эллипс $HEH'E'$ с осями $C_0H = B$ и $C_0E = C$. По заданной фазе ω находим из уравн. (288) перемещения частицы x_1 и y_1 и ее положение. Радиусами B и C опишем большую и малую окружность; отложив от вертикали EC_0 влево угол ω, проведем C_0I до пересечения с большою окружностью и, опустив из I перпендикуляр IM_2 на ось X, находим $C_0M_2 = x_1 = B \sin \omega$. Если затем из точки M_1, пересечения радиуса MI с малою окружностью, проведем M_1M параллельно оси X до пересечения с IM_2, то получим точку M; это будет положение частицы на эллипсе; для нее имеем: $MM_2 = M_1N = y = C \cdot \cos \omega$. С возрастанием t радиус MI будет перемещаться против часовой стрелки; одновременно радиус-вектор C_0M будет перемещаться в том же направлении. Для каждого момента t частицы, принадлежащие разным эллипсам, будут лежать на одной и той же синусоиде, которая при перемещении частиц по своим эллипсам будет перемещаться параллельно оси X и влево (черт. 283) со скоростью c, определяемой уравн. (282). На этом чертеже показаны две синусоиды I—I и II—II; пунктирная синусоида есть сплошная синусоида, но перемещенная влево.

Численный пример. Рассмотрим движение волны, для которой длина $\lambda = 0{,}3$ м.; скорость волны $c = 0{,}75$ м.; глубина канала $h = 0{,}2$ м.; $A = 0{,}001$.

На основании этих данных вычисляем: время пробега или период $T = \frac{\lambda}{c} = 0{,}4$ сек.; $m = \frac{2\pi}{\lambda} = 20{,}911$; $s = \frac{2\pi}{T} = 15{,}708$; $mh = 4{,}1822$.

Затем:

$$e^{mh}=65{,}449;\ e^{-mh}=0{,}015;\ e^{mh}+e^{-mh}=65{,}464;\ e^{mh}-e^{-mh}=65{,}434$$

Малая полуось эллипса:

$$C=\frac{Am}{s}(e^{mh}-e^{-mh})=0{,}001\cdot\frac{4}{3}\cdot 65{,}464=0{,}087\ \text{м.}$$

Большая полуось эллипса:

$$B=\frac{Am}{s}(e^{mh}+e^{-mh})=0{,}001\cdot\frac{4}{3}\cdot 65{,}434=0{,}087\ \text{м.}$$

Уравнение эллипса, который в данном случае обращается в круг:

$$x_1^2+y_1^2=(0{,}087)^2.$$

Скорость перемещения частицы по кругу радиуса C:

$$V=\frac{2\pi C}{T}=1{,}364\ \text{м.}$$

Уравнение свободной поверхности волны:

$$y=\frac{Am}{s}(e^{mh}-e^{-mh})\operatorname{Cos}(mx-st+\alpha)=$$

$$=0{,}087\operatorname{Cos}(20{,}911x-15{,}708t+\alpha).$$

Высота волны $H=2C=0{,}174$ м.; отношение $\frac{H}{\lambda}=0{,}58$.

§ 78. Движение нескольких систем волн. Толчея. Если в канале проявляются волны, принадлежащие к различным системам, и если для этих систем потенциалы скоростей обозначим через φ_1, $\varphi_2 \ldots$, то для составного движения волн будем иметь потенциал скорости

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2+\ldots$$

Тогда уравнение свободной поверхности согласно уравнению (279) выразится так:

$$y=-\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{y=0}=-\frac{1}{g}\left\{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right)_{y=0}+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right)_{y=0}+\ldots\right\}=y_1+y_2+\ldots$$

Следоват., при таком движении волн ординаты свободной поверхности равны сумме ординат для отдельных систем волн. Каждая система волн движется независимо друг от друга. Когда начальные условия движения произвольны, то движение получается составным из систем волн всевозможных длин λ и всевозможных скоростей c, определяемых величинами λ. Поэтому вид свободной поверхности постепенно

изменяется с t. Но когда глубина воды h очень мала сравнительно с λ, то скорость $c = \sqrt{gh}$ равна постоянной величине для всех систем волн, почему вид составных волн остается все время без изменения.

Рассмотрим случай двух систем волн, движущихся в одну и ту же сторону с одной и той же амплитудой и с разными длинами волн λ и λ' довольно близкими. Согласно уравнению (279), уравнение свободной поверхности можно написать для этого случая в таком общем виде:

$$y = a \operatorname{Sin}(mx - st) + a \operatorname{Sin}(m'x - s't),$$

или

$$y = 2a \operatorname{Cos} \left\{ \left(\frac{m - m'}{2}\right) x + \left(\frac{s - s'}{2}\right) t \right\} \cdot \operatorname{Sin} \left\{ \left(\frac{m + m'}{2}\right) x - \left(\frac{s - s'}{2}\right) t \right\}.$$

Это выражение можно переписать еще так:

$$y = 2a A \operatorname{Sin} \left\{ \left(\frac{m + m'}{2}\right) x - \left(\frac{s - s'}{2}\right) t \right\} = 2aAB \quad . \quad . \quad . (289).$$

Здесь m, s и m', s' суть коэффициенты для первой и второй системы волн, равные:

$$m = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad m' = \frac{2\pi}{\lambda'}; \quad s = \frac{2\pi}{T}; \quad s' = \frac{2\pi}{T'}.$$

Коэфф. m и m' по условию довольно близки, так как λ и λ' мало отличаются друг от друга; также близки s и s'. Коэфф. a есть амплитуда, по условию одинаковая для обеих систем. Величина $2aA$ представляет амплитуду составного движения. Так как Aa, а следоват., и амплитуда составного движения изменяются медленно с изменением x и t, при чем эта амплитуда колеблется от 0 до $2a$, то форма волны в составном движении изменяется также медленно. В рассматриваемом случае поверхность воды представляется в виде волновых групп, отделенных друг от друга полосами спокойной воды. Расстояние l между серединами двух смежных групп можно найти следующим образом. Очевидно l равно расстоянию между такими частицами той и другой группы, для которых амплитуда $2aA$ одинакова, т.-е. для которых существует такое равенство:

$$\operatorname{Cos} \left\{ \left(\frac{m - m'}{2}\right) x - \left(\frac{s - s'}{2}\right) t \right\} = \operatorname{Cos} \left\{ \left(\frac{m - m'}{2}\right) \left(x + \frac{4\pi}{m - m'}\right) - \left(\frac{s - s'}{2}\right) t \right\}.$$

Из этого выражения видно, что если частица первой группы имела абсциссу x, то частица второй группы, имеющая ту же амплитуду, будет иметь абсциссу

$x - \frac{4\pi}{m - m'}$, следоват., искомое расстояние $l = \frac{4\pi}{m - m'} = \frac{2\lambda\lambda'}{\lambda' - \lambda}$.

При малой разности $\lambda' - \lambda$ величина l может получиться весьма значительной. Означенные группы волн имеют некоторую скорость перемещения W, которую определим следующим образом. Очевидно, W есть та скорость, с которой передается изменение амплитуды в пределах расстояния l. Уравнение (289) можно переписать еще так:

$$y = 2aB\mathrm{Cos}\left\{\left(\frac{m - m'}{2}\right)\left(x - \frac{s - s'}{m - m'}\, t\right)\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (290).$$

Выражение (279) для колебательного движения, данное в предидущем §, можно представить в таком общем виде, положив $\alpha = 0$:

$$y = a\,\mathrm{Cos}\, m\,(x - ct),$$

где c коэффициент при t представляет скорость передачи волнового движения. Аналогично с этим заключаем, что в выражении (290) коэффициент при t равный $\frac{s - s'}{m - m'}$ представляет искомую скорость W. Очевидно можно представить W еще так:

$$W = \text{пред.}\left(\frac{s - s'}{m - m'}\right) = \frac{ds}{dm}.$$

Но по уравн. (280) в предидущем §:

$$s^2 = gm\,\frac{e^{mh} - e^{-mh}}{e^{mh} + e^{-mh}},$$

а потому

$$\frac{ds}{dm} = W = \frac{g}{2s}\,\frac{e^{2mh} - e^{-2mh} + 4mh}{(e^{mh} + e^{-mh})^2}.$$

Подставим сюда из уравнения (282) значение для mc^2, где c — скорость распространения волны при длине λ, тогда найдем окончательно:

$$W = \tfrac{1}{2}c\left\{1 - \frac{4mh}{e^{2mh} - e^{-2mh}}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (291).$$

Здесь $mh = 2\pi\frac{h}{\lambda}$; при $\frac{h}{\lambda}$ очень большом находим $W = {}^1/_2\, c$, а при $\frac{h}{\lambda}$ очень малом получаем $W = c$.

Толчея. Рассмотрим случай, когда две системы волн идут одна навстречу другой, имея одинаковые: амплитуду a, длину λ и скорость c. Тогда в результате получается система волн, называемая *толчеей*. Уравнение свободной поверхности этих волн возьмем по уравн. (281); именно для первой системы волн:

$$y_1 = \frac{Am}{s}(e^{mh} - e^{-mh})\,\mathrm{Cos}\,(mx - st + \alpha) = C\,\mathrm{Cos}\,\omega \;.\;.\;.\; (a),$$

и для второй системы волн:

$$y_2 = \frac{Am}{s}(e^{mh} - e^{-mh})\,\mathrm{Cos}\,(mx' + st + \beta) = C\,\mathrm{Cos}\,\omega' \;.\;.\;.\; (b).$$

Здесь α и β — произвольные постоянные, соответствующие значению фаз при $x = x' = 0$ и при $t = 0$; $m = \frac{2\pi}{\lambda}$; $s = mc$, где c — скорость перемещения волны; абсциссы x и x' для одного и того же t отличаются на половину длины волны, т.-е. $x' = x + \frac{1}{2}\lambda$; разные знаки перед st указывают на прямопротивоположное движение волн в этих двух системах.

На основании сказанного в начале этого § найдем, что для составного движения волн уравнение свободной поверхности выразится суммой двух предидущих выражений. Тогда, имея в виду, что:

$$\mathrm{Cos}\,(mx' + st + \beta) = \mathrm{Cos}\,(mx + \pi + st + \beta) = -\,\mathrm{Cos}\,(mx + st + \beta)$$

получаем:

$$y = y_1 + y_2 = C[\,\mathrm{Cos}\,\{mx - st + \beta\} - \mathrm{Cos}\,\{mx + st + \beta\}\,] =$$
$$= -\,2C\,\mathrm{Sin}\left(st + \frac{\beta - \alpha}{2}\right)\mathrm{Sin}\left(mx + \frac{\beta + \alpha}{2}\right),$$

или

$$y = -\,D\,\mathrm{Sin}\left(mx + \frac{\beta + \alpha}{2}\right) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (292);$$

здесь

$$D = 2C\,\mathrm{Sin}\left(st + \frac{\beta - \alpha}{2}\right) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (c)$$

представляет амплитуду составного движения. В противоположность волнам, до сих пор рассмотренным, амплитуда в этом случае является переменной от t. При каком-нибудь определенном t выражение (292) для y представляет синусоиду, которая с изменением t изменяет свой вид. На черт. (284) представлена свободная поверхность волн в случае толчеи; синусоиды 1 — 1, 2 — 2, 3 — 3, 4 — 4 и 5 — 5 представляют поверхность волн в последовательные моменты времени. Из чертежа

видно, что все эти синусоиды пересекаются в точках B, которые называются *узлами;* узлы характеризуются тем, что для них $y=0$ при всяком t; затем наибольшие амплитуды (положительные и отрицательные) соответствуют точкам E, находящимся посередине расстояния между отдельными узлами. Эти результаты получаем прямо из уравнения (292).

Действительно, чтобы $y=0$ при всяком i, нужно чтобы:

$$\operatorname{Sin}\left(mx+\frac{\beta+\alpha}{2}\right)=0,$$

или чтобы: $$mx+\frac{\beta+\alpha}{2}=k\pi, \text{ где } k=0;\ 1;\ 2\ldots$$

отсюда находим:

$$x=-\frac{\alpha+\beta}{4\pi}\lambda+\frac{k\lambda}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (d).$$

В частном случае, когда $\alpha=\beta=0$, находим $x=\frac{\lambda}{2};\ \lambda;\ \frac{3}{2}\lambda\ldots$

Наибольшее значение для y получим, если приравняем нулю производную от количества

$$\operatorname{Sin}\left(mx+\frac{\beta+\alpha}{2}\right);\ \text{тогда получаем: } \operatorname{Cos}\left(mx+\frac{\beta+\alpha}{2}\right)=0;$$

следовательно, $$mx+\frac{\beta+\alpha}{2}=(2k-1)\frac{\pi}{2}, \text{ где } k=1;\ 2;\ 3\ldots$$

отсюда: $$x=-\frac{\alpha+\beta}{4\pi}\lambda+(2k-1)\frac{\lambda}{4}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (e).$$

В частном случае, когда $\alpha=\beta=0$, находим $x=\frac{\lambda}{4};\ \frac{3\lambda}{4}\ldots$

Таких образом картина поверхности волн при толчее получается следующая. В момент t_1 поверхность имеет вид синусоиды $1-1-1$, при которой частицы занимают: одни — самое верхнее положение, а другие — самое нижнее положение; затем точки a, a... опускаются вертикально вниз, а точки b, b... поднимаются вертикально вверх; в момент t_2 все частицы достигают горизонтального положения OX; в этот момент поверхность воды представляет плоскость. В следующие моменты точки a опускаются ниже плоскости OX, а точки b поднимаются выше этой плоскости; в момент t_3 все эти точки занимают положение синусоиды $5-5-5$. Затем те же частицы a', b' начинают двигаться в обратном направлении. Траектории aa', bb' суть вертикальные линии.

Моменты t_1, t_2 и t_3 определим, рассматривая значение амплитуды D. Момент t_2 вычислим, полагая:

$$\mathrm{Sin}\left(st+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=0; \text{ тогда } st+\frac{\beta-\alpha}{2}=k\pi, \text{ где } k=0,\ 1,\ 2\ldots;$$

отсюда:
$$t_2=-\frac{(\beta-\alpha)\lambda}{4\pi c}+\frac{k\lambda}{2c}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (f).$$

При $\alpha=\beta$ находим:

$$t_2=\frac{k\lambda}{2c}.$$

Если затем производную предидущей величины приравняем нулю, то найдем моменты t_1 и t_3; именно получаем:

$$\mathrm{Cos}\left(st+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=0; \text{ тогда } st+\frac{\beta-\alpha}{2}=k\cdot\frac{\pi}{2}, \text{ где } k=1,\ 2,\ 3\ldots$$

Отсюда:

$$t_1=-\frac{(\beta-\alpha)\lambda}{4\pi.c}+\frac{k\lambda}{4c}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (g).$$

При $\alpha=\beta$ получается:

$$t_1=\frac{k\lambda}{4c}.$$

Литературные указания. При изучении предмета этой главы могут быть полезными следующие сочинения:

1) *Невражин*. Теория корабля. Части I и II. 1913.
2) *Guyou*. Théorie du navire. 1894.
3) *Dunkerley*. Hydraulics. Vol. I and II. 1908.
4) *Forchheimer*. Hydraulik. 1914.
5) *Appell*. Traité de mécanique rationelle. T. III. 1909.
6) *Lamb*. Lehrbuch der Hydrodynamik, deutsch von Friedel. 1907.

В № 4 имеются подробные указания на литературу; № 6 содержит наиболее полное изложение предмета, но требуется очень большая математическая подготовка. Автор в своем изложении придерживался сочинения Аппелля (№ 5).

Дополнение к тексту.

В конце стр. 218 надо поместить следующее добавление.

К выше перечисленным в этом § формулам следует отнести еще формулы Ланга и Биля.

11) Формула *Ланга* (из третьей группы):

$$\frac{t}{\Delta} = Ri = b_1 V^2 = \left(a + \frac{b}{RV}\right) V^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (196\,a).$$

для новых труб

для метров: $a = 0{,}000153$ $\quad b = 0{,}00000573$

„ футов: $a = 0{,}0000466$ $\quad b = 0{,}00001880$

для старых труб

для метров: $a = 0{,}000255$ $\quad b = 0{,}00000573$

„ футов: $a = 0{,}0000777$ $\quad b = 0{,}00001880$

12) Формула *Биля* (из третьей группы):

$$\frac{t}{\Delta} = Ri = b_1 V^2 = \left\{a + \frac{f}{\sqrt{R}} + \frac{b}{V\sqrt{R}}\right\} V^2 \quad \ldots \ldots \quad (196\,b).$$

Здесь f—коэф. *шероховатости* стенок и b—коэф. *вязкости* жидкости зависящей от свойств жидкости и от температуры. По степени шероховатости все русла разделяются на 5 категорий.

Эти коэффициенты для *воды* при $t = 12°C$ и для стенок с различною шероховатостью имеют следующие значения:

	Категории шероховатости.				
	I	II	III	IV	V
для метров $a =$	0,00012				
для футов $a =$	0,00003657				
для метров $f =$	0,0000064	0,000018	0,000036	0,000054	0,000072
для футов $f =$	0,00000353	0,00000994	0,00001988	0,00002982	0,00003976
для метров $b =$	0,0000118	0,0000088	0,0000057	0,0000032	0,0000032
для футов $b =$	0,0000214	0,0000159	0,0000103	0,0000058	0,0000058

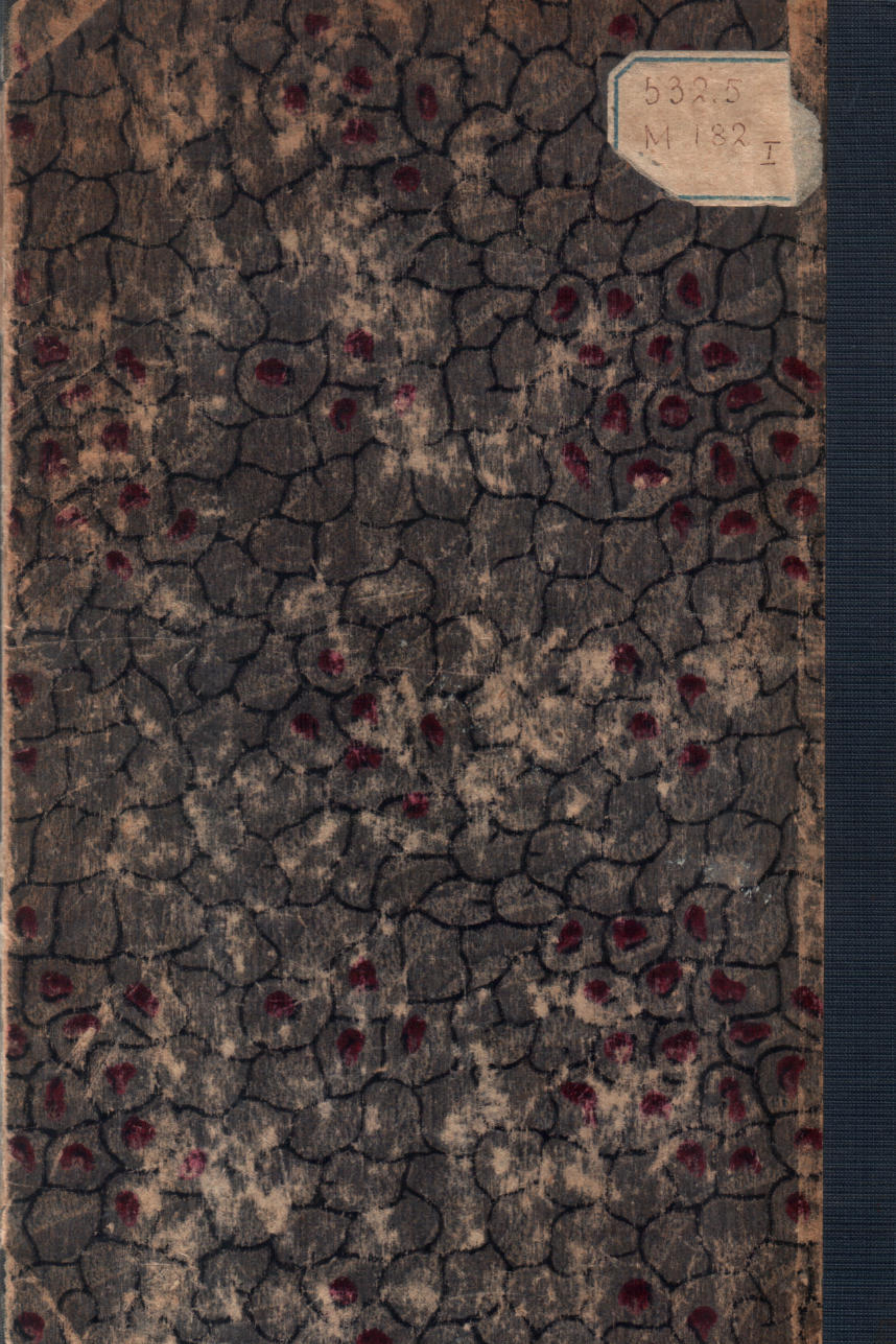
К I категории относятся медные и свинцовые трубы, к II категории—железные, газовые трубы; к III—новые чугунные трубы, затертые бетонные трубы; к IV—обыкновенный бетон, неструганные доски; к V—обыкновенная кирпичная кладка, тесовая кладка.

Новые чугунные трубы относятся к III категории а старые чугунные трубы—к IV категории.

---

1. I категории относятся [illegible] в II кате-
гии—[illegible] и III—[illegible] групп, [illegible]
[illegible] трубы и IV—[illegible]
в V—[illegible].
Первая группа [illegible] относится к III категории [illegible]
[illegible] группа—в IV категории.




532.5
M 182 I